R. BIBLIOTECA UNIVERSITARIA ALESSANDRINA
A
d
6
ROMA

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obſeruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Toloſani.*

Acceſſit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiuſdem D. de FERMAT Epiſtolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Ieſu.
M. DC. LXX.

35

ILLVSTRISSIMO VIRO D.

D. IOANNI BAPTISTÆ

COLBERTO,

REGI AB INTIMIS CONSILIIS ET A SECRETIS,

Ærarij Cenſori generali,

SVMMO REGIORVM ÆDIFICIORVM, NAVIGATIONIS ET COMMERCII PRÆFECTO, Regni Adminiſtro, &c.

PRODIT in lucem tuis auſpicijs, Vir Illuſtriſſime, Diophantus varijs auctus parentis mei obſeruationibus; Illas mole quidem exiguas, ſed pondere, ni fallor, maiores, quæ tua eſt ſumma humanitas, forſitan non aſpernaberis, præſertim cum ad numeros pertineant qui radicis inſtar ac velut in centro Matheſeos poſiti, diffunduntur in omnes illius circuli partes. Cur enim Geometria, & quidquid ei affine eſt, alium quam te

ambiat Patronum, qui terrarum orbem animo metiris, vt in extremis Regionibus in quibus olim emoriens natura defeciſſe videbatur, præclara Regis maximi facta celebrentur, & Barbarorum pectora liberalibus imbuta diſciplinis miteſcant. Cum vero illas ferè omnes aut earum ſemina Matheſis contineat, menti imperio natæ & membris famulitio aptis opitulatur, paciſque ac belli temporibus idonea, non tantum Regijs ædibus magnificè extruendis, ſed etiam vrbibus tutò propugnandis vtilem ſe præbet. Huius doctrinæ non immeritò captus illecebris Parens meus, quem adhuc lugeo, illam ſucciſiuis horis in medio forenſium negotiorum ſtrepitu, abſque vllo tamen Iuriſprudentiæ, & Senatorij muneris diſpendio non infeliciter excoluit. An autem hæ, quas tibi, Vir Illuſtriſſime, offero lucubrationes, pondere, vt dixi, majores ſint quam mole, ſi ſatis otij ſuppeteret, tu facillimè iudicares, qui Lynceâ ſagacitate in abdita quæque penetrans, veritatem ab errore non minus quam veram virtutem à fucatâ ſecernis, & eorum qui operam nauant ærario puras manus æquè dignoſcis, ac puritatem auri ſe probare poſſe Matheſeos quondam ille genius Archimedes celeberrimo circa coronam Hieronis experimento demonſtrauit. Sed te aliò vocant multa magnaque, in quibus ità verſaris, vt te pluribus parem, & adhuc majoribus dignum oſtendens, inuicti Principis famam, illiuſque ſubditorum leuamen, tibi laborum metam proponas. Id abunde teſtantur commercij reparatæ, & Piratarum repreſſæ vires qui Herculem Gallicum Herculeas columnas tranſeuntem & vtrumque mare committentem vident è latebris tanquam è Caci ſpeluncâ & pertimeſcunt; idem quoque teſtantur portus bellicis inſtructi nauibus quæ peregrinis non indigent armamentis, & hoſtibus terrorem incutiunt vt pateat qui mari potitur, eum rerum potiri; teſtantur denique hinc reſtauratæ tuis curis Artes, nobilique conſortio, vt egregiorum æmulatione opificum certatim augeri ac perfici poßint, tuâ induſtriâ ſociatæ, illinc ſcientiarum arcana in tuis ipſis penatibus mirum in modum illuſtrata. Quæ ſatis fidem faciunt quantum tibi cordi ſit non ſolum vt Regni, ſed etiam vt Reipublicæ litterariæ fines

promoueantur & vt quidquid ex nouo illius orbe aduehitur, aſpirante tui fauoris aurâ obliuionis & inuidiæ ſcopulos vitare poßit; nunquam illos metuet hoc tui nominis præſidio munitum opus, ſi benignâ manu, vt enixè rogo, ſuſcipias iſtud æterni monumentum obſequij, quod tibi voveo,

Addictiſſimus S. FERMAT.

Lectori Beneuolo.

DIOPHANTVM hîc habes, & varias quibus auctus eſt obſeruationes, paucas illas quidem & breues, non tamen contemnendas; nec enim me latet hujuſmodi opera ponderari potius quam numerari à peritis æſtimatoribus, quibus vnica demonſtratio, imò interdum vnicum Problema magni voluminis inſtar eſt; in Mathematicis nimirum diſciplinis, noua Laconico licet more exhibita veritas pluris fieri ſolet, quam verboſa quorumdam tautologia; Doctis tantum quibus pauca ſufficiunt, harum obſeruationum auctor ſcribebat, vel potius ipſe ſibi ſcribens, his ſtudijs exerceri malebat quam gloriari; adeo autem ille ab omni oſtentatione alienus erat, vt nec lucubrationes ſuas typis mandari curauerit, & ſuorum quandoque reſponſorum autographa nullo ſeruato exemplari petentibus vltrò miſerit; norunt ſcilicet plerique celeberrimorum huius ſæculi Geometrarum, quam libenter ille & quantâ humanitate, ſua ijs inuenta patefecerit; Quamobrem ſuperſtites quoſdam Ipſius amicos, ſæpe hortatus ſum ſæpiuſque hortabor, vt ſi quos illius ingenij partus blandâ manu ſuſceperint, illos in muſæi vmbrâ diutius deliteſcere non patiantur; dum autem plura quæ breui, vt ſpero, prodibunt, colligo, tibi non iniucundam fore duxi, nouam horum Diophanti operum, iſtarumque ſimul obſeruationum editionem: Illas Parens meus quaſi aliud agens & ad altiora feſtinans margini variis in locis appoſuit, præſertim ad quatuor vltimos libros; cum enim ardua ſectarctur ille, faciliora & vulgo Logiſtarum nota quæ duobus primis libris continentur, aut vt ipſius Diophanti verbis vtar, τὰ ἐν ἀρχῇ στοιχειώδως ἔχοντα ferè omnino prætermiſit; Qualis autem Quantuſque in Arithmeticis fuerit Diophantus, ſat ſciunt qui primis, vt dicitur, labris puram Logiſticam guſtauerunt; tredecim ille ſcripſerat Arithmeticorum libros, quorum ſex tantum extant, vnuſque de numeris multangulis, reliqui vel temporis iniuriâ perierunt, aut alicubi forſan Theſauri inſtar ita ſeruantur, vt nullius videantur eſſe, dum publici juris fieri non poſſunt; meminit Diophanti Suidas in voce Hypathia & Lucillius libro ſecundo Anthologiæ capite vigeſimo ſecundo Diophanti Aſtrologi recordatur; an vero Suidas & Lucillius de hoc eodemque loquantur, nihil comperti habemus; cum multi circa Neronis tempora vixiſſe putant, nec deeſt qui Antonino pio imperante eum floruiſſe leuibus fretus coniecturis ſuſpicetur; illud audacter aſſerere licet, hoc Auctore nullum antiquiorem hactenus innotuiſſe, qui hanc inſtaurauerit doctrinam, quam à Græcis acceptam Arabes cum ipſo Algebræ nomine ad

nos tranſmiſiſſe exiſtimantur ; eximia vero Problemata quæ hoc opus complectitur, adeo humanæ mentis captum videntur ſuperare, vt ad eorum explanationem indefeſſo Xylandri labore & miranda Bacheti ſagacitate opus fuerit, duo illi fuere doctiſſimi horum librorum interpretes, nam vix eo nomine dignus eſt Græcus Scholiaſtes ; Bombellius verò in Algebra quam Italico ſermone vulgauit, Diophanti quæſtionibus ſuas permiſcens, fidi interpretis partes non ſuſtinuit ; neque eo functus eſt munere ſubtiliſſimus Vieta qui peragrans auia Logiſticæ loca, nec alterius inhærens veſtigiis, ſua maluit in lucem proferre inuenta quam facem præferre Diophantæis ; quantum autem Analyticam vltra veteres terminos promouerit Parens meus, tuum erit, Erudite Lector, judicium ; vtinam ipſius cœptis non obſtitiſſent anguſtiæ temporis, & plura parantem mors heu nimium immatura nobis illum non præripuiſſet, plura procul dubio ex eodem fonte manaſſent, nec ſuis quædam iſtorum problematum demonſtrationibus carerent ; quin vero ipſe eas penes ſe, & in ſcrinio, vt ita loquar, pectoris habuerit, tum aliæ lucubrationes, tum illius animi candor & modeſtia dubitare non ſinunt ; licet autem à tot tantiſque viris laudatus Parens, à liberis abſque inuidia laudari poſſit, nec illud ingenti luctui ſolatium, vel potius irritamentum denegari debeat, magis tamen libenter, ni fallor, illius encomium perleges quod in diario Doctorum elegantiſſimo, & in pleriſque clariſſimorum ſcriptorum libris occurrit ; horum nonnulli magnificè jamdudum mentionem fecere variorum ipſius operum, quæ licet inedita non tamen latuerunt, vt abundè teſtantur quædam excerpta quæ adjicere non piget, & doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs illius epiſtolis à R. P. Iacobo de Billy Societatis Ieſu Sacerdote, cuius perſpicaciſſimum ingenium & eruditio commendatione non egent, cum in ipſius operibus ſatis eluceant ; cæterum quidquid in hoc erratum fuerit, id Typographorum incuriæ tribuas, & æqui bonique conſulas quæſo. VALE.

ELOGE DE MONSIEVR DE FERMAT,
Conſeiller au Parlement de Toloſe.

Du Iournal des Sçauans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy auec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conſeiller au Parlement de Toloſe. C'eſtoit vn des plus beaux eſprits de ce ſiecle, & vn genie ſi vniuerſel & d'vne eſtenduë ſi vaſte, que ſi tous les ſçauans n'auoient rendu témoignage de ſon merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choſes qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ſes loüanges.

Il auoit toûjours entretenu vne correſpondance tres particuliere auec Meſſieurs Descartes, Toricelli, Paſcal, Frenicle, Roberual, Hugens, &c. & auec la plus part des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il auoit lié vne amitié ſi étroite auec M. de Carcaui, pendant qu'ils eſtoient confreres dans le Parlement de Toloſe, que comme il a eſté le confident de ſes eſtudes, il eſt encore aujourd'huy le depoſitaire de tous ſes beaux eſcrits.

Mais parce que ce Iournal eſt principalement pour faire connoître par leurs ouurages les perſonnes qui ſe ſont renduës celebres dans la republique des lettres; on ſe contentera de donner icy le catalogue des eſcrits de ce grand homme; laiſſant aux autres le ſoin de luy faire vn éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la ſçience des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy vne methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Vne autre *de maximis & minimis*, qui ſert non ſeulement à la determination des problemes plans & ſolides; mais encore à l'inuention des touchantes & des lignes courbes, des centres de grauité des ſolides, & aux queſtions numeriques.

Vne introduction aux lieux, plans & ſolides; qui eſt vn traité analytique concernant la ſolution des problemes plans & ſolides; qui auoit eſté veu deuant que M. Descartes eut rien publié ſur ce ſujet.

Vn traité *de contactibus ſphæricis*, où il a demonſtré dans les ſolides ce que M. Viet Maiſtre des Requeſtes, n'auoit demonſtré que dans les plans.

Vn autre traité dans lequel il reſtablit & demonſtre les deux liures d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et vne methode generale pour la dimenſion des lignes courbes, &c.

De plus, comme il auoit vne connoiſſance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il eſtoit conſulté de toutes parts ſur les difficultez qui ſe preſentoient; il a éclaircy vne infinité de lieux obſcurs qui ſe rencontrent dans les anciens. On

a imprimé depuis peu quelques-vnes de ſes obſeruations ſur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Caſtelli de la meſure des eaux courantes, en a inſeré dans ſon ouurage vne tres-belle ſur vne Epiſtre de Syneſius, qui eſtoit ſi difficile, que le pere Petau qui a commenté cét autheur, a aduoüé qu'il ne l'auoit pû entendre. Il a encore fait beaucoup d'obſeruations ſur le Theon de Smirne & ſur d'autres Autheurs anciens. Mais la pluſpart ne ſe trouueront qu'éparſes dans ſes Epîtres ; parce qu'il n'eſcriuoit gueres ſur ces ſortes de ſujets, que pour ſatisfaire à la curioſité de ſes amis.

Tous ces ouurages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuſes de l'antiquité, n'empeſchoient pas que M. de Fermat ne fit ſa charge auec beaucoup d'aſſiduité, & auec tant de ſuffiſance, qu'il a paſſe pour vn des plus grands Iuriſconſultes de ſon temps.

Mais ce qui eſt de plus ſurprenant, c'eſt qu'auec toute la force d'eſprit qui eſtoit neceſſaire pour ſoûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il auoit encore vne ſi grande delicateſſe d'eſprit, qu'il faiſoit des vers Latins, François & Eſpagnols auec la meſme elegance, que s'il eût veſcu du temps d'Auguſte, & qu'il eût paſſé la plus grande partie de ſa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

On parlera plus particulierement des ouurages de ce grand homme, lors qu'on aura recouuert ce qui en a eſté publié, & qu'on aura obtenu de M. ſon fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore eſté.

OBSERVATION DE MONSIEVR DE FERMAT ſur Syneſius, rapportée à la fin de la traduction du liure de la meſure des eaux courantes, de Benedetto Caſtelli.

LES pages qui reſtent vuides dans ce cayer m'ont donné la penſée de les remplir de la belle obſeruation que j'ay appriſe ces iours paſſez, de l'incomparable Monſieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me ſouffrir ſouuent dans ſa conuerſation. C'eſt ſur la quinziéme Lettre de Syneſius Eueſque de Cyrene, qui traite d'vne matiere qui n'a eſté entenduë par aucun des interpretes, non pas meſmes par le ſçauant Pere Petau, ainſi qu'il l'aduoüe luy-meſme dans les Notes qu'il a faites ſur cét Autheur ; Et ie donne dautant plus volontiers cette obſeruation, qu'elle a beaucoup de rapport auec les traitez qui ſont cy-deuant.

Cét Eueſque eſcrit à la ſçauante Hypatia, qui eſtoit la merueille de ſon ſiecle, & laquelle enſeignoit publiquement la Philoſophie, auec l'admiration de tous les ſçauans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. I'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Ie me trouue ſi mal, que i'ay beſoin d'vn hydroſcope. Ie vous prie d'en faire faire vn de cuiure, & de me l'acheter. C'eſt vn tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'vne fleute ; ſur ſa longueur il porte vne ligne droite, qui eſt coupée en trauers par de petites lignes, par leſquelles nous iugeons du poids des eaux. L'vn des bouts eſt couuert d'vn cone, qui eſt poſé également deſſus, en telle ſorte que le tuyau & le cone ont vne meſme baſe. L'on appelle cét inſtrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aiſe-

ment compter les ſections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoit le poids de l'eau.

Comme nous auons perdu la figure & l'vſage de cét inſtrument, de meſme qu'vne infinité d'autres belles choſes, que les Anciens auoient inuentées, & dont ils ſe ſeruoient, les ſçauans de ce temps icy ſe ſont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel eſtoit cét inſtrument dont parle Syneſius. Il y en a qui ont crû que c'eſtoit vne Clepſydre, mais le Pere Petau a rejetté auec raiſon cette opinion. Pour luy, il aduoüe, qu'il ne le comprend pas; il ſoupçonne pourtant que c'eſtoit vn inſtrument qui ſeruoit à niueler les eaux, & qui auoit du rapport auec celuy dont Vitruue fait mention au liure 8. ch. 6. de ſon Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il eſt aiſé de juger par la lecture de Vitruue, & de Syneſius; que ce ſont deux inſtrumens fort differens, & en figure, & en vſage; & que ſi tous deux ont des ſections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates ſont perpendiculaires ſur l'horizon, & celles de l'hydroſcope luy ſont paralleles. Ie paſſe ſous ſilence pluſieurs autres differences, que ie pourrois remarquer, pour rapporter le ſentiment de Monſieur de Fermat, qui eſt ſans donte le veritable ſens de Syneſius. Cét inſtrument ſeruoit pout examiner le poids des differentes eaux pour l'vſage des malades; car les Medecins ſont d'accord que les plus legeres ſont les meilleures; le terme *ῥοπὴ*, dont ſe ſert Syneſius le monſtre clairement. Il ne ſignifie pas icy *libramentum* le niuelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Machines, il ſignifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de la le traitté des equiponderans d'Archimede a pour titre *ἰσοῤῥοπικῶν*. Mais dautant que la balance, ny aucun autre inſtrument artificiel, ne pouuoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cauſe qu'elle eſt petite entre elles, les Mathematiciens inuenterent ſur les principes du traité d'Archimede *de his quæ vehuntur in aqua*, celuy dont parle Syneſius, qui monſtre par la nature des eaux meſmes, la difference du poids qu'elles ont entre-elles, la figure en eſt telle; A F eſt vn Cylindre de cuiure A B eſt le bout d'en haut, qui eſt toûjours ouuert, E F eſt le bout d'embas, qui eſt couuert du cone E I F, qui a la meſme baſe que le bout d'embas; A E, B F, ſont deux lignes droites coupées par diuerſes petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact ſera l'inſtrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuſte en telle ſorte qu'il ſe tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empeſchera; mais il y enfoncera iuſques à vne certaine meſure, qui ſera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diuerſement, ſuiuant que l'eau ſera plus ou moins peſante; car plus l'eau ſera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle ſera peſante, comme il nous ſeroit aiſé de le demonſtrer, s'il en eſtoit queſtion icy. Voila la figure & l'vſage de cét inſtrument, & la raiſon de cét vſage. La lettre de Syneſius s'y rapporte ſi exactement dans toutes ſes circonſtances, que feu Monſieur de Monchal, Archeueſque de Toloſe, ayant enuoyé cette explication au Pere Petau, il aduoüa que Monſieur de Fermat eſtoit le ſeul qui auoit compris quel eſtoit l'inſtrument, & il auoit écrit que dans vne ſeconde impreſſion il la mettroit dans ſes notes. Mais parce que cela n'a pas eſté fait, i'ay crû que le Lecteur ſçauant & curieux ne ſera pas marry que ie luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monſieur Deſcartes.

MONSIEVR,

Ie n'ay pas eu moins de joye de receuoir la Lettre par laquelle vous me faites la faueur de me promettre voſtre amitié, que ſi elle me venoit de la part d'vne Maiſtreſſe, dont j'aurois paſſionnement deſiré les bonnes graces. Et vos autres eſcrits qui ont precedé me font ſouuenir de la Bradamante de nos Poetes, laquelle ne vouloit receuoir perſonne pour ſeruiteur, qui ne ſe fut auparauant éprouué contre elle au combat. Ce n'eſt pas toutesfois que ie pretende me comparer à ce Roger, qui eſtoit ſeul au monde capable de luy reſiſter; mais tel que ie ſuis, ie vous aſſeure que i'honnore extremement voſtre merite. Et voyant la derniere façon dont vous vſez pour trouuer les tangentes des lignes courbes, ie n'ay autre choſe à y répondre, ſinon qu'elle eſt tres bonne, & que ſi vous l'euſſiez expliqué au commancement en cette façon ie n'y euſſe point du tout contredit, &c.

AVTRE LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT,

pag. 348. tom. 3. des Lettres de Monſieur Deſcartes.

MONSIEVR,

Ie ſçay bien que mon approbation n'eſt point neceſſaire, pour vous faire connoiſtre quelle opinion vous deuez auoir de vous meſme, mais ſi elle y peut contribuer quelque choſe, ainſi que vous me faites l'honneur de m'eſcrire, ie penſe eſtre obligé de vous auouer icy franchement, que ie n'ay jamais connu perſonne, qui m'ait fait paroiſtre qu'il ſceut tant que vous en Geometrie. La tangente de la ligne courbe, que décrit le mouuement d'vne roulette, qui eſt la derniere choſe que le Reuerend Pere Merſenne a pris la peine de me communiquer de voſtre part, en eſt vne preuue tres aſſeurée; car dautant qu'elle ſemble dependre du rapport qui eſt entre vne ligne droite & vne circulaire, il n'eſt pas aisé d'y appliquer les regles qui ſeruent aux autres; & Monſieur de Roberual qui l'auoit propoſée, qui eſt ſans doute auſſi l'vn des premiers Geometres de noſtre ſiecle, confeſſoit ne la ſçauoir pas, & meſme ne connoiſtre aucun moyen pour y paruenir. Il eſt vray que depuis il a dit auſſi qu'il l'auoit trouuée, mais ç'a eſté juſtement le lendemain apres auoir ſceu que vous & moy luy enuoyions; & vne marque certaine qu'il ſe mécontoit, eſt, qu'il diſoit auoir trouué en meſme temps que voſtre conſtruction eſtoit fauſſe, lors que la baſe de la courbe eſtoit plus ou moins grande que la circonference du cercle; Ce qu'il eut peu dire tout de meſme de la mienne, ſinon qu'il ne l'auoit pas encore veue; car elle s'accorde entierement auec la voſtre. Au reſte, Monſieur, ie vous prie de croire que ſi i'ay témoigné cy-deuant n'approuuer pas tout à fait certaines choſes particulieres qui venoient de vous, cela n'empeſche point que la declaration que ie viens de faire ne ſoit tres vraye. Mais comme on remarque plus ſoigneuſement les petites pailles des diamans, que les plus grandes tâches des pierres communes, ainſi i'ay crû deuoir regarder de plus prés à ce qui venoit de voſtre part, que s'il fut venu d'vne perſonne moins eſtimée. Et ie ne craindray pas de vous dire que cette meſme raiſon me conſole, lors que ie voy que de bons eſprits s'eſtudient à reprendre les choſes que i'ay écrites, en ſorte qu'au lieu de leur en ſçauoir mauuais gré, ie penſe eſtre obligé de les en remercier. Ce qui peut, ce me ſemble, ſeruir à vous aſſeurer que c'eſt veritablement, & ſans fiction, que ie ſuis, &c.

P. Herigone, tom. 6. Curſus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NVnquam fallit hæc methodus, vt aſſerit eius inuentor, qui eſt doctiſſimus Fermat Conſiliarius in Parlamento Toloſano excellens Geometra nec vlli ſecundus in arte Analytica: qui optimè etiam reſtituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac vrbe vidimus manuſcripta in manibus plurimorum, quibus ſubnexa eſt ab eodem auctore ad locos planos & ſolidos Iſagoge.

D. ISMAEL BVLLIALDVS
Exercitatione de Poriſmatibus.

HAnc de poriſmatibus ſcriptiunculam data mihi occaſione compoſui, cùm ante biennium vir illuſtriſſimus ac ampliſſimus Dominus de Fermat in ſuprema Curia Toloſana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritiſſimus, rerum Mathematicarum doctiſſimus, propoſitiones quaſdam ſubtiliſſimas & poriſmata quæ tam theorematicè quam problematlcè proponi poſſunt, ad amicos ſuos huc miſiſſet. Ex Pappi vnius monumentis & collectionibus Mathematicis poriſmatum naturam & vſum diſcere poſſumus, cùm ex Vereribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipſum nullus ſupetſit. Illius tamen ſententia legenti ſtatim obuia non eſt; textúſque corruptione, & applicationis poriſmatum defectu obſcurior proculdubio euadit. Interea dum tanto viro ſua edere libuerit, noſtra, qualiacumque tandem ſint, publici iuris facere placuit; vt alios ad eorundem inueſtigationem impelleremus; ipſumque Ampliſſimum Dominum de Fermat, ad ſua edenda, vtinam & ad alia ſublimis intellectus ſui εὑρήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim eſt, quem omnes Europæ Mathematici ſuſpiciunt; quem à ſubtiliſſimis ætatis noſtræ Geometris Bonauentura Cauallerio Bononiæ, & Euangeliſta Torricello Florentiæ ſummis laudibus in cœlum ferri, eiuſque inuenta mirabilia prædicati auribus meis audiui, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multáque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatiſſimum toto pectore veneror ac colo.

R. P. MARINVS MERSENNVS ORDINIS MINIMORVM
Reflectionum Phyſicomathematicarum pag. 215.

CVm autem viuos potius quam mortuos quærerem, vnus abſuit Clariſſimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctiſſimoque Senatore, Domino d'Eſpagnet, velut auulſum Bergeraco, triduò amplexus ſum.

Doctrinæ

DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM.

Collectum à R. P. Iacobo de Billy S. I. Sacerdote ex varijs Epiſtolis quas ad eum diuerſis temporibus miſit D. P. de Fermat Senator Toloſanus.

Erudito Lectori.

SATIS eſt in limine huius operis fixiſſe nomen Fermatij, vt grande aliquid ſuſpiceris, ille enim tantus vir fuit nihil vt fingere potuerit paruum, imo ne mediocre quidem, mens eius tot ſplendoribus illuſtris erat vt nihil obſcurum pateretur, ſolem diceres qui tenebras ſtatim excutiat & in ipſis etiam abyſſis lucem immodicam radiorum ſuorum multitudine procreet: Diophantum hactenus mirati ſunt vniuerſi & merito quidem, verum ille quantus quantus ſit, pigmæus eſt reſpectu noſtri gigantis, qui longum totius orbis mathematici iter emenſus, noua climata alijs inuiſa peragrauit; Vietam prædicauere quotquot Algebricis operationibus noſtro ſeculo vacauerunt, ſufficitque ad famam alicui conciliandam, ſi dicamus illum in opere analyſeos, mentem huius authoris aſſecutum, ſed necdum ille pertigit ad eius ſcientiæ culmen, vt multis exemplis infra explicandis planum fiet; Claudium Gaſparem Bachetum vt ſubtiliſſimum analyſtam & mihi alias intimum veneratus ſum ſemper, atque iſtius in Diophantum elucubrationes præclare demonſtrant quam perſpicax fuerit in numeris, at viſus illius hebetior eſt ſi cum oculis lyncei noſtri omnia etiam abſtruſiſſima penetrantis comparetur.

Verum ne hoc opuſculum ſola illius authoritate fulciatur, lubet hic paucis aperire quid recens repererit & quam late vagetur nouum ipſius inuentum; ac primo, hactenus Analyſtæ in quibuſdam ſubtilioribus æquationibus duplicatis vnicam ſolutionem reperire potuerunt, aſſeritque ipſe Bachetus ne duas quidem poſſe inueniri, Fermatius infinitas mox dabit, nec ipſum remorabuntur numeri ficti & nihilo minores qui ſæpius occurrunt in eiuſmodi operationibus, ſed ipſos ventilabit ocyùs, & ſubtiliſſimo ſcrutinio ad veros tandem reducet: deinde nemo quod ſciam triplicatas æquationes ſoluit hactenus niſi eas ex arte prius compoſuerit & aptarit tali ratione vt obuiæ ſtatim ſint ſolutiones ipſis etiam tyronibus, Fermatius ſingularem inuenit methodum qua ſolui poſſunt datæ vt libet ſi vnum excipias caſum quem ſumus infra explicaturi: tertio quis vnquam in numeris compoſitis ex quinque ſpeciebus quotlibet ſolutiones exhibuit? Quis ex primitiuis radicibus elicuit deriuatiuas tum primi gradus, tum ſecundi, tum tertij, & ſic deinceps in infinitum, nemo plane: vni Fermatio debetur hoc inuentum, vnus ille hæc omnia non ex alienis cumulauit operibus, quod rhapſodi quidam facere conſueuerunt, ſed proprio marte cudit & ex ſuis ipſe fontibus hauſit: hoc ille

cùm mihi amiciſſimè communicaſſet per literas, iudicaui digniſſimum quod typis mandaretur, & ne ab eius mente vllatenus recedam exſcribendum mihi videtur in primis compendium quoddam totius methodi cui nomen dedit appendicis ad diſſertationem Claudij Gaſparis Bacheti de duplicatis apud Diophantum æqualitatibus. En ipſiſſima illius verba.

Propoſuit feliciter ſatis pleroſque duplicatæ æqualitatis & modos & caſus ſubtilis ille & doctiſſimus analyſta Bachetus ad quæſtionem vigeſimam quartam libri ſexti Diophanti, ſed integram ſanè non demeſſuit ſegetem, quas enim quæſtiones vnicâ tantum, aut ad ſummum duplici ſolutione circumſcribit, ad infinitas porrigere & promouere nihil vetat, imo procliui id exequi operatione eſt in promptu. Proponatur ſextus modus quem ipſe ſatis prolixe explicat pag. 439. & 440. caſus omnes ab ipſo enumerati ex noſtrâ quam mox exhibituri ſumus methodo infinitas admittunt ſolutiones, quæ à primâ per iteratas analyſes gradatim in infinitum deriuantur. Methodus hæc eſt: quæratur ſolutio quæſtionis propoſitæ ſecundum methodum vulgarem hoc eſt ſecundum methodum Bacheti aut Diophantæam, prodibit ſtatim valor numeri ſiuè radicis ignotæ, quo peracto iteretur analyſis & pro valore nouæ inueſtigandæ radicis, ponatur vna radix plus numero vnitatum prioris radicis, reducetur quæſtio ad nouam æqualitatem duplicatam, in qua vnitates vtrinque reperientur quadratæ propter priorem ſolutionem, ideoque differentia æquationum ex numeris tantum & quadratis, quæ ſunt proximæ inter ſe ſpecies, conſtabit, quare reſoluetur ex Diophanto & Bachetò noua hæc duplicata æqualitas ex quâ pari artificio tertia, & ex tertia quarta, & ſic in infinitum deducentur; quod non aduertiſſe aut Diophantum aut Bachetum imo & Vietam diſpendium huc vſque analyſeos maximum fuit, ſed præcipuum inuentionis noſtræ artificium in iis ſe prodit quæſtionibus, in quibus primigenia analyſis pro valore incognitæ radicis exhibet numerum notâ defectus inſignitum, qui ideo minor eſſe nihilo intelligitur; methodus autem noſtra in hoc caſu, non ſolum in problematis quæ per duplicatas æqualitates ſoluuntur locum habet, ſed generaliter in aliis quibuſcumque vt experienti notum fiet; ſic igitur procedit: quæratur quæſtio propoſita ſecundum methodum vulgarem, ſi non ſuccedat ſolutio poſt abſolutam operationem, quia nempe valor numeri habet notam defectus & ideo minor nihilo deprehenditur, non tamen deſpondendum animum confidenter pronuntiamus, quæ oſcitantia, vt verbis Vietæ vtar, fuit & ipſius & veterum analyſtarum, ſed iterum quæſtionem tentemus, & pro valore radicis ponamus 1 N. — numero quem ſub ſigno defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubiè æquatio quæ per veros numeros ſolutionem quæſtionis repræſentabit. Hactenus Fermatius.

Ecce tibi epitomen huius opuſculi quod diuidemus in tres partes; prima ſpectabit ſolutiones infinitas æquationum duplicatarum, ſiue illæ occurrant per ſignum +, ſiue per ſignum —: ſecunda gradum faciet ad triplicatas æquationes, in quibus arcana quædam & huc vſque inaudita aperiemus: tertia conſcendet ad numeros ex quinque vel quatuor ſpeciebus compoſitos, qui quadrato æquati dabunt radices infinitas, ſi primitiuis adiungantur deriuatiuæ, exhibebitque artem iſtiuſmodi radices eruendi.

PARS PRIMA.

De ſolutionibus infinitis duplicatarum æqualitatum.

DElibanda eſt hic breuiter methodus vulgatis duplicatæ æqualitatis quæ ſic 1
habet. Duorum terminorum quadrato æquandorum cape differentiam elige
duos numeros hanc differentiam producentes, tum vel quadratum ſemiſſis ſummæ
producentium æquetur maiori termino, vel quadratum ſemiſſis differentiæ producen-
tium æquetur termino minori, ſic enim habebitur valor radicis juxta quem reſoluti
duo termini exhibebunt quadratos. Exempla dabimus hîc in tribus tantum caſibus ex
quibus reliquos caſus aſſequi facile eſt.

Primus caſus eſt dum ſolæ radices & vnitates æquantur quadrato, vt contingit 2
in duobus terminis ſequentibus 2 N + 12 & 2 N. + 5. horum differentia 7. produ-
citur ab 1 & 7. illorum ſumma eſt 8. quadratus dimidiæ ſummæ eſt 16. qui æquatus 2
N + 12 dat 2. pro valore radicis in vtroque termino, vel eorumdem producentium
differentia eſt 6. quadratus ſemiſſis illius 9. æquetur minori termino 2 N + 5. & ha-
bebitur idem valor 2. duoque termini dati erunt 16. & 9.

Secundus caſus eſt dum quadrata, radices, & vnitates æquantur quadrato, & eſt 3
numerus quadratorum quadratus, vt ſi æquentur quadrato 4 Q + 20 N + 8. & 4 Q
+ 4 N − 8. horum differentia eſt 16. N + 16. quam producunt 4. & 4 N + 4. ſummæ
4 N + 8 ſemiſſis quadratus eſt 4 Q. + 16 N + 16. qui æquatus priori termino ex ſupra-
dictis dat 2. pro valore radicis. Hîc nota ex infinitis producentibus differentiam
ſuperiorem, tales eligi debere vt numerus habens adiunctum characterem radicis,
duplus ſit lateris quadrati qui idem eſt in vtroque termino, propterea eligimus 4 N.
vt quadratus ſemiſſis illius æquetur quadratis 4 Q. igitur duo termini dati æquiuale-
bunt 64. & 16.

Tertius caſus quem adnotaſſe operæ pretium erit & qui nobis ſæpiſſime futurus 4
eſt vſui, eſt cum vnitatum numerus in vtroque termino quadratus eſt, ſiue ſit idem,
ſiue diuerſus, vt ſi æquandi ſint quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. diuide
quadratum maiorem 64. per 16. & quotiens 4. multiplicet minorem terminum 1 Q.
+ 16. 8 N. ita enim productus 4 Q. + 64. − 32 N habebit eaſdem vnitates quadratas
quas alius terminus 3 Q + 64. + 48. N. hi duo æquandi ſunt quadrato. Horum diffe-
rentiam 1 Q. + 16 N producunt 1 N. & 1 N. + 16. (nota iterum 16 eſſe duplum 8. la-
teris quadrati qui eſt communis vtrique termino) horum producentium ſumma eſt 2 N
+ 16. quadratus dimidiæ ſummæ 1 Q + 64 + 16. N. æquatur 4. Q + 64. − 32 N. &
fit 16. pro valore, ergo duo termini iuxta hunc valorem reſoluti ſunt 144 & 1600.

Præceptum generale ad ſolutiones infinitas duplicatarum æqualitatum.

Cape valorem radicis per methodum vulgarem, hunc connecte 1 N. cum ſuo 5
ſigno, ſiue ſit illud plus, ſiue minus & fiet noua radix ſecundum quam reſolui de-
bent duo termini in datâ æquatione duplicatâ æquati quadrato & fient noui termini
quadrato æquandi, in his inueniatur valor radicis per methodum vulgarem, & præ-
cipuè per tertium caſum quem poſtremo dedi, & quem adnotaſſe dixi operæ pretium
fore, ita extabit nouus valor pro poſterioribus terminis; hunc connecte primo va-

lori, prout indicat eius ſignum plus vel minus, & fiet nouus valor pro prioribus terminis qui dati ſunt quadrato æquandi.

6 Sit in exemplum vterque terminus ſequens æquandus quadrato 4 N. + 1 & 1 Q. − 2 N + 1. præter 2. qui eſt obuius valor, inuenietur etiam valor $\frac{3}{4}$ per methodum vulgarem. Lubet vti vtroque valore ad nouas ſolutiones, ac primo iuxta præceptum pro noua radice capio 1 N + 2. ergo 4 N. + 1 qui fuit primus terminus æquatus quadrato erit 4 N + 9. (nam ſi 1 N. dat 1 N + 2 habebis 4 N. dare 4 N + 8. cui adde vnitatem in eodem primo termino exiſtentem fietque 4 N + 9 ſimili ratione ſumendo rurſus 1 N. + 2. pro 1 N. & iuxta illam reſoluendo 1 Q − 2 N + 1 qui eſt ſecundus terminus datæ æqualitatis, fiet nouus terminus æquandus quadrato 1 Q + 2 N + 9. ab hoc tolle priorem 4 N. + 9. & abſolue hanc duplicem æqualitatem modo communi fietque valor pro poſterioribus terminis $\frac{27}{4}$ cui adde 2 (quia ſumpta fuit noua radix 1 N + 2) & habebis valorem nouum radicis pro data æqualitate $\frac{35}{4}$.

7 Rurſus placet per alium valorem $\frac{3}{4}$ inuenire nouum valorem : pono pro noua radice 1 N + $\frac{3}{4}$ iuxta quam reſoluti dati termini 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 dant nouos terminos 4 N + 4. & 1 Q + $\frac{1}{16}$ − $\frac{1N}{2}$, igitur quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus eſt, poterit hæc æqualitas duplicata reſolui, ſoluatur vt dictum eſt num 4. in tertio caſu & inuenietur pro poſterioribus terminis valor [illegible]. cui adde $\frac{3}{4}$ (quia ſumpta eſt noua radix 1 N + $\frac{3}{4}$) extabitque valor alius pro data æqualitate [illegible].

8 Habes ergo ſecundos valores deriuatiuos ex primis, atque ex tuis ſecundis potes tertios eruere eodem prorſus artificio, vt ſi libeat per radicem $\frac{35}{4}$ elicere tertiam, connectes illam cum 1 N. vt ſit noua radix 1 N + $\frac{35}{4}$ iuxta quam reſoluti dati termini 4 N + 1. & 1 Q. − 2 N + 1. eo modo quo reſolui debere iam diximus, dabunt nouos terminos 4 N + 36 & 1 Q + $\frac{961}{16}$ + $\frac{31N}{2}$ in quibus vnitatum numerus eſt quadratus ergo valor radicis pro nouis illis terminis erit [illegible]. cui ſi addas $\frac{35}{4}$. juxta poſitionem præcedentem habebis pro valore in datis terminis + [illegible]. & iuxta illum reſoluti dati termini exhibebunt quadratos.

9 Hinc vides poſſe inueniri valores infinitos : etenim ex primis orientur ſecundi & ex ſecundis tertij, & ſic in infinitum, in exemplo dato iam habes quinque valores, ex poſtremis iterum poſſunt erui noui; ergo quælibet data æqualitas duplicata habet ſolutiones infinitas, quod erat demonſtrandum.

Non deſpondendus animus ſi occurrant pro ſolutione numeri ficti & minores nihilo.

10 Vſu uenit interdum vt in problematum enodatione reperiantur numeri ficti, vnde fit vt inexperti ſtatim cadant animis, vt pote qui in caſum vt ipſi exiſtimant impoſſibilem inciderint, verum audacter affirmamus cum noſtro Fermatio etiam inde elici poſſe ſolutionem.

11 Sit verbi gratia æqualitas duplicata data 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q & inuentus ſit per methodum vulgarem valor radicis − 4 iuxta quam reſoluti duo termini dant veros quadratos 9 & 49 illa radix eſt numerus fictus, fateor, hæc tamen ſic inſeruiet ad veros numeros inueniendos ; pone pro noua radice 1 N − 4 & juxta illam reſolue duos terminos priores, fientque noui termini 9 − 2 N. & 2 Q − 20 N. + 49 (quia 2 N. æquiualebunt 2 N 8. quæ ſi ſubtrahas ab vnitate vt poſtulat ſignum defectus habebis 9 − 2 N. pro priori termino nouo non aliter 2 Q dabunt 2 Q + 32 − 16 N. & 4 N dabunt 4 N − 16 quos ſi tollas ab 2 Q + 32 − 16 N iunctis cum vnitate vt primitiuus numerus indicat fiet 2 Q − 20 N. 449.) quare cum in iſtis terminis vnitatum numerus ſit quadratus, inuenietur valor per methodum Diophantæam, ex hoc valore inuento tolle 4 quia radix

eſt 1 N − 4 fietque valor pro æqualitate data [illegible]. igitur per numerum fictum inuentus eſt verus numerus qui ſatisfacit quæſtioni vt ipſe per examen probare poteris.

Rurſus ſi detur iſta duplicata æqualitas 8 Q. + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N. facile 12
inuenientur radices − 2 & − $\frac{24}{7}$ ſed quia numeri iſti ficti ſunt, cape pro noua radice 1 N − 2 iuxta quam reſoluti duo priores termini dant nouos terminos quadrato æquandos 8 Q + 4 − 16. N & 2 Q + 4 − 4 N. igitur per methodum Bacheti pro iſtis nouis terminis inuenietur valor radicis + $\frac{24}{7}$ vnde ſi tollas 2. quia noua radix fuit 1 N − 2 extabit noua radix pro data æqualitate duplicata + $\frac{10}{7}$ ergo ex numero ficto inuentus eſt verus ſatisfaciens duplicatæ æqualitati. Idem fieri poteſt de alio numero ficto; imo & & ex illis inueniri poſſunt alij ſine numero.

Tertium exemplum ſit in iſtis terminis quadrato æquandis 1 + 2 N + 2 Q & 1 + 6 13
N + 2 Q per methodum communem reperitur valor − 4 igitur redintegranda eſt operatio, & ponendum pro noua radice 1 N − 4. & ſecundum illam reſoluendi priores termini, vt iam dictum eſt, fientque termini noui 2 Q + 25 − 14 N. & 2 Q + 9 − 10 N. ergo quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus eſt inuenietur ex methodo Diophantæá valor radicis pro poſterioribus terminis, hinc tolle 4. iuxta nouam radicem & relinquetur pro æqualitate datâ valor verus & realis [illegible], non ergo cadendum animo ſi occurrant aliquando numeri ficti quia reduci poſſunt ad veros vt demonſtratum eſt in exemplis prioribus.

In hoc genere ſoluẽdi duplicatas æqualitates, debet differentia terminorum æquandorum conſtare quadratis & radicibus ſolis.

Sæpius contingit in ſolutione æqualitatum, vt differentia terminorum conſtet ra- 14
dicibus ſolis, vt ſi oporteat æquare quadrato 1 Q + 1 − 1 N & 1 Q + 1 − 3 N tollendo ſecundum à primo differentia eſt 2 N. aliquando etiam differentia terminorum conſtat radicibus & vnitatibus, vt ſi termini ſequentes æquentur quadrato 9 Q + 15 − 21 N. & 9 Q + 24. − 48 N. ſupponendo enim primum maiorem vel minorem (quod plerumque liberum eſt) erit differentia 27 N − 9 vel 9 − 27 N. verum in Fermatianâ methodo hoc curandum vt differentia terminorum conſtet radicibus & quadratis alioquin vel in impoſſibile caderes, vel labor tuus nullam nouam produceret ſolutionem, vt autem differentia conſtet quadratis & radicibus, debent vnitates quadratæ diuerſæ reduci ad eumdem quadratum vt ſupra docuimus num. 4.

Sit exempli gratiâ æqualitas duplicata ſequens 1 Q + 1 N + 2 & 1 Q + 3 N + 3 15
valor radicis per methodum communem eſt 2, ergo iuxta methodum Fermatianam ſumi debet pro noua radice 1 N − 2. & iuxta illam oportet reſoluere priores terminos, fientquè noui termini æquandi quadrato 1 Q − 3 N. + 4. & 1 Q − 1 N + 1 ſi horum caperes differentiam haberes 2 N − 3 vel 3 − 2 N. prout primus terminus ſupponeretur maior aut minor, cape quoſuis numeros qui has differentias producant, nihil proficies, nec vnquam ad optatum peruenies finem, niſi reducas illos terminos ad eumdem quadratum quod fit diuidendo maiorem quadratum per minorem & per quotientem multiplicando terminum illum qui minorem quadratum continet, in eo igitur exemplo diuide 4. per 1. & quotiens 4. multiplicet terminum 1 Q − 1 N + 1. ita enim habebuntur duo termini noui ad noſtram methodum apti 4 Q − 4 N + 4. & 1 Q − 3 N + 4.

Rurſus ſint duo termini æquandi quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. 16
per methodum vulgarem valor eſt 16. ergo pro nouâ radice ſumi debet 1 N. + 16 iuxta quam ſi reſoluantur priores termini fient termini noui quadrato æquandi 1 Q. + 24 N.

+ 256. & 3 Q + 144 N + 1600. caue capias horum differentiam 2 Q + 120 N + 1344. impoſſibile enim foret hoc pacto ad ſolutionem peruenire, quid igitur facies ? Illud quod hactenus factitatum eſt ſæpius : diuides 1600. per 256 & per quotientem $\frac{25}{4}$ multiplicabis 1 Q + 24 N + 256 & productus inde natus $\frac{25Q}{4}$ + 150 N. + 1600 cum 3 Q + 144 N + 1600. repræſentabit duos terminos æquandos quadrato, eorumque terminorum differentia conſtabit quadratis & radicibus : ergo ad nouam ſolutionem peruenire fas erit.

Hoc genus operandi non tantum valet ad ſolutiones duplicatarum æqualitatum , ſed etiam ad alias quaſcunque.

17 Ferax eſt admodum ager iſte quem colere cœpimus, etenim methodus Fermatiana, non tantum valet ad ſoluendas æqualitates duplicatas in infinitum, ſed etiam ad alias ; ſit verbi gratia inueniendus numerus cuius duodecuplum ſublatum ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. faciat cubum. ponatur numerus ille 1 N. ergo 8 Q + 8 − 12 N. æquatur cubo, finge latus 2 − 1 N. cubus erit 8 − 12 N + 6 Q. − 1 C. æquandus 8 Q + 8 − 12 N. & fit pro valore radicis − 2 quæ radix licet ficta ſatisfacit propoſitæ quæſtioni. Verum vt inde habeatur numerus verus, pone pro nouâ radice 1 N − 2 & iuxta eam reſolue prædictum numerum 8 Q + 8 − 12 N. fietque nouus terminus 8 Q − 44 N + 64. æquandus cubo, finge latus huius cubi 4 $\frac{11N}{12}$ (4 eſt latus cubi 64. in nouo termino exiſtentis, $\frac{11N}{12}$ vero eſt quotiens qui fit diuidendo 44 N. in nouo termino exiſtentem per triplum quadratum lateris cubici 4. nempe 48) eius cubus 64 − 44 N. + $\frac{121Q}{12}$ − $\frac{1331C}{1728}$ æquatus nouo termino 8 Q − 44 N + 64 dat pro radice 2 $\frac{938}{1331}$, vnde ſi tollas 2. ob nouam radicem poſitam 1 N − 2 reſtabit valor pro priori poſitione $\frac{938}{1331}$ talis eſt numerus quæſitus, eius enim duodecuplum ſi tollas ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. dat $\frac{5124031424}{2357947691}$ cubum à latere $\frac{1724}{1331}$.

18 Rurſus, ſi quæras triangulum rectangulum, cuius area iuncta hypotenuſæ faciat quadratum, formabis illud ab 1 N + & 1 N. latera ſunt 2 Q + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q. + 2. N. junge aream 2 C + 3 Q + 1 N. hypotenuſæ 2 Q + 1 + 2 N & fit 1 + 3 N + 5 Q. + 2 C æquandus quadrato; finge latus 1 + $\frac{3N}{2}$ & habebis $\frac{11}{8}$ pro valore, pone igitur nouam radicem in N. − $\frac{11}{8}$ & juxta illam reſolue ſingulas particulas numeri ſuperioris & ſummam inde ortam æqua quadrato fietque numerus $\frac{2673}{9248}$ pro valore radicis ad primas poſitiones.

19 Simili ratione ſi ſit inueniendum triangulum rectangulum, cuius area juncta vni lateri circa rectum faciat quadratum, formabis illud vt mox dictum eſt in numero præcedenti & area 2 C + 3 Q + 1 N. jungetur lateri 1 + 2 N. & fiet valor − $\frac{3}{8}$ cape igitur pro noua radice 1 N. − $\frac{3}{8}$ & iuxta illam reſolue ſingulas particulas numeri quadrato æquari & fiet noua ſumma 2 C + $\frac{3Q}{4}$ + $\frac{51N}{32}$ + $\frac{49}{256}$ æquanda quadrato : finge latus $\frac{7}{16}$ + $\frac{51N}{28}$ & fiet valor pro numeris primo poſitis $\frac{1425}{1568}$ ac proinde triangulum quæſitum erit $\frac{10988674}{2458624}$. $\frac{6927424}{2458624}$. $\frac{8530050}{2458624}$.

Noua methodus ad ſolutionem duplicatarum æqualitatum.

20 Sit data æqualitas duplicata 25 Q + 4 N − 6 & 9 Q + 20 N. − 6 ſeu oporteat

æquare quadrato vtrumque numerum propoſitum; methodus communis eſt reuocare numeros quadratorum diuerſos ad eundem vt dictum eſt num. 4. verum hoc non eſt neceſſe, ſed poreſt ſumi immediaté differentia numerorum quæ eſt 16 Q — 16 N. tum inueniendi ſunt tales producentes, vt ſumma radicum faciat 10. N (ſeu duplum radicis 254) tales ſunt 8 N. & 2 N — 2 horum enim producentium ſummæ ſemiſſis quadratum æquatum priori termino 25 Q + 4 N — 6. quem ſuppoſuimus maiorem dabit valorem $\frac{1}{3}$.

Rurſum ſi darentur duo ſequentes termini $\frac{1129}{9}$ + 121 — $\frac{1210N}{9}$ & 1 Q + 121 — 26 N. æquandi quadratis, cum numerus vnitatum vtrobique ſit idem quadratus ex methodo vulgari capienda eſſet differentia $\frac{1120}{9}$ — $\frac{976N}{9}$ tum ſumendi forent producentes $\frac{488N}{99}$ & $\frac{110N}{11}$ — 22 & inde inueniendus valor radicis. Fermatius ſumit producentes $\frac{8N}{3}$ & $\frac{14N}{3}$ — $\frac{22}{3}$ ergo ſumma producentium $\frac{22N}{3}$ — $\frac{212}{3}$ huius ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus $\frac{1129}{9}$ + 121 — $\frac{1210N}{9}$ dat valorem radicis $\frac{638}{33}$. 21

Iterum ſit ſoluenda æqualitas duplicata 1699 + 5746 N. + 169. & 1 Q + 10 N. + 169. tripliciter iſta æqualitas ſolui poteſt: primo accipiendo differentiam terminorum illorum quæ eſt 1698 Q + 5736 N & eligendo duos producentes in quorum vno ſit 26, duplum videlicet lateris quadrati 169. atque hæc eſt methodus communis: ſecundo ſolui poteſt reuocando diuerſos quadratorum numeros ad eundem, quod fieret ducendo ſingulas particulas numeri poſterioris in 169. vt explicatum eſt num. 4. tertio ſoluetur eadem æqualitas eligendo producentes 14 N & 12 N + $\frac{2868}{7}$ ita enim ſumma radicum erit 26 N. duplum lateris quadrati 1699. atque hæc eſt methodus Fermatiana quæ dat pro valore radicis $\frac{2041075}{203168}$. 22

Dicet aliquis iſtam methodum eſſe quidem ingenioſam, ſed inutilem, vt pote quæ prodeat tantum ex numeris arte conquiſitis, & tali ratione diſpoſitis vt & illi producant differentiam terminorum quadrato æquandorum, & in ſummâ reperiatur duplum lateris majoris quadrati. At quiſquis hoc opponit ignorat eâ ratione ſolui pulcherrimum & difficillimũ problema quod alias torſit omnes Algebriſtas, & quod inſolutum manſiſſet, ni Fermatius hac methodo fultus ſoluiſſet nodum Gordianum. Denique qui inutilitatem huius methodi accuſat videat ſolutionem multorum problematum infra num. 45. 47. 48. 50. Quomodo autem inueniantur iſti producentes facile eſt iudicare nam ſumendum duplum lateris quadrati majoris & illud diuidendum in duas partes quæ producant differentiam quadratorum, vt in primo exemplo ſumitur 10. diuidendus in duos qui faciant 16. & inuenientur producentes 8 & 2. ita de cæteris. 23

Poſt inuentos per analyſin primitiuos numeros iterata operatio exhibet ſolutionem.

Contingit non raro, vt in enodatione alicuius problematis incidatur in numeros fictos: iam ſupra oſtenſum eſt quomodo huic malo medeatur ars analytica Fermatij, ſed accipe inſuper radicem ſingularem ex qua fructus innumeri prodibunt: radix illa eſt iterata operatio, ſed ne incaſſum redintegres operationem analyſis exhibebit numeros primitiuos in ſecundâ operatione ponendos. 24

Quæratur verbi gratia triangulum rectangulum cuius tam hypotenuſa quam ſumma laterum circa rectum ſit numerus quadratus, formetur triangulum ab obuiis Numeris 1 N + 1 & 1 N. ergo tria latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 N + 2 Q. igitur hypotenuſa 2 Q. + 1 + 2 N. & ſumma laterum circa rectum 2 Q. + 1 + 4 N. æquantur, quadrato & fit per methodum cõmunem valor radicis $\frac{12}{7}$ vnde duo numeri à quibus formatum eſt triangulum erunt — $\frac{5}{7}$ & — $\frac{12}{7}$ ſeu in integris accipiendo ſolos numeratores — 5 — 12 triangulum autem inde formatum eſt 169. 119. 120. vnde infero ad ſolu- 25

tionem problematis inueniendum eſſe aliquod triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit quadratus & differentia laterum circa rectum ſit quadratus atque hæc concluſio elicitur vi analyſeos præcedentis,iſtud autem triangulum eſt 169. 119 120. quod formatur vel ab − 5 & − 12.vel a + 5 & + 12.quare itero operationem & formo triangulum quæſitum ab 1 N + 5. & 12. & peruenio tandem ad æqualitatem duplicatam quæ non dabit amplius numeros fictos , ſed veros beneficio trianguli illius primitiui vt diſtinctius videbitur infrà num. 45.

26 Rurſus ſi proponatur quærendum triangulum rectangulum quo productus ſub hypotenuſa in ſummam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus area, faciat quadratum formabitur triangulum ab obuiis Numeris 1 & 1 N + 1. ergo latera erunt 1 Q + 2 N + 2. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. duo itaque 1 Q + 2 N + 2 in 1 Q + 3 N 1 & productus 1 QQ + 5 C. + 9 Q. + 8 N. + 2. multatus area 1 C. + 3 Q + 2 N dat reſiduum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 6 N + 2 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 2 N + 1. eius quadratum eſt 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquandum numero ſuperiori & fit valor $\frac{1}{2}$ proindeque ſi hic ſiſteremus ſecundum latus quod fuit 1 Q + 2 N foret minus nihilo & ad ſolutionem poſtulatam ineptum, quare iteranda eſt operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2. ita enim latera erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. productus ex hypotenuſa in ſummam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius mulctatus areâ erit 1 QQ + 4 C + 6 Q + 20 N. + 1 æquandus quadrato, finge latus 1 + 10 N − 1 Q & fit pro valore verus numerus $\frac{23}{6}$ ergo iuxta poſitiones formandum erit triangulum a $\frac{29}{6}$ & 2 ſiue in integris accipiendo ſolos numeratores à 29 & 12 & fient latera quæſiti trianguli 985. 697. 696. Idem omnino contingeret ſi poneres pro noua radice 1 N. − $\frac{1}{2}$ & iuxta illam reſolueres 1 QQ + 4 C + 6 N + 2 inde enim orietur nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ + 2 C + $\frac{3Q}{2}$ + $\frac{5N}{2}$ + $\frac{1}{16}$ finge latus $\frac{1}{4}$ + 5 N. − 1 Q & fit valor $\frac{23}{12}$. hinc tolle $\frac{1}{2}$ ob nouam radicem & fit $\frac{17}{12}$ pro primis poſitionibus, quare juxta poſitiones formabitur triangulum in integris ab 29. & 12 vt ſupra.

27 Iterum quæratur triangulum rectangulum ita vt hypotenuſa ſit quadratus ſicut & differentia laterum ponatur 1 N + 1 & 1 pro duobus numeris à quibus formetur triangulum, ergo latera erunt 1 Q. + 2 + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 N + 2. tolle poſtremum 2 N + 2. à medio 1 Q + 2 N. igitur differentia 1 Q − 2 & hypotenuſa 1 Q + 2 + N. æquantur quadrato & fit per duplicatam æqualitatem $\frac{17}{12}$ pro valore radicis, ergo iuxta poſitiones numeri formantes triangulum erunt − $\frac{5}{12}$ & 1 ſeu in integris abiecto denominatore, − 5 & 12. poſſes iterare operationem , & inuenire triangulum quæſitum , ſed aduerte vltró illud offerri ex formatione 5 & 12. fit enim triangulum rectangulum 169. 119. 120. vbi hypotenuſa & differentia laterum eſt quadratus numerus.

Bachetus impoſsibilitatem agnoſcit vbi Fermatius facilitatem inuenit.

28 Fatendum eſt ingenuè plurimas quæſtiones per methodos ordinarias ſolui infinitis vt cum vterque numerus quadrato æquandus conſtat radicibus diuerſis & eodem quadrato, facilè enim eſt eo in caſu reperire quotlibet ſolutiones, propterea Bachetus ad quæſtion. 24 lib. 6. cum in ſecundo modo ſoluendi duplicatas æqualitates dixiſſet vnicam ſolutionem afferri, in quarto modo ſolutiones adhibet infinitas. Verum aliæ ſunt æqualitates duplicatæ delicatiores in quibus per methodos communes vnica ſolutio, vel ad ſummum duplex inuenitur, vnde ille idem illuſtris Diophanti commentator loco citato ait vnicam ſolutionem afferri poſſe, dum numerorum ex tribus ſpeciebus compoſitorum differentia conſtat vnicâ ſpecie, vel enim in vno numerorum quadrato

quadrato æquandorum ſunt tres ſpecies ex vna parte & duæ tantum ex alia, eſtque vnicus vtrinque quadratus, vel dum ſunt tantum duæ ſpecies in terminis æquandis, & vnus conſtat quadratis & vnitatibus, alter autem vnitatibus & radicibus, addit autem contingere duas ſolutiones cum tam quadratorum quam vnitatum numerus eſt quadratus; ego vero, pace tanti viri dixerim, aio ex methodo Fermatianá etiam in his omnibus caſibus contingere ſolutiones infinitas vt exemplis ſequentibus planum erit.

Primum exemplum ſit in duplicatá æqualitate 1 Q + 3 N + 7. & 1 Q − 5 N + 7. 29
differentia eorum terminorum conſtat vnicá ſpecie eſtque 8 N & ſit valor 3. fruſtra Bachetus per ſuam methodum alium quæreret, ſed ponatur pro nouâ radice 1 N + 3. ergo noui termini erunt 1 Q + 25 + 9 N. & 1 Q + 1 + 1 N. igitur quoniam numerus vnitatum quadratus eſt vtrobique poterit ſolui iſta æquatio nec te terreant numeri ficti qui occurrent iam enim ſupra dedimus modum ex illis eliciendi veros.

Secundum erit in 4 Q − 1 N − 4 & 4 Q + 15 N. vbi ſunt tantum duæ ſpecies ex vna 30
parte, & quam Bachetus ſoluit inueniendo vnicum valorem [illegible]. pone pro nouâ radice 1 N + [illegible]. ergo iuxta illam reſoluti priores termini dabunt nouos æquandos quadrato 4 Q + 1 + 9 N. & 4 Q + 25 N. ac proinde cum habeatur numerus vnitatum quadratus inueniri poteſt valor radicis eritque [illegible].

Tertium exemplum ſit in duobus terminis 1 Q + 9 & 9 + 24 N æquandus quadra- 31
to, duos inuenies valores ad ſolutionem iſtius æqualitatis, nempe 3 & [illegible] inde inuenies infinitos, ponendo pro noua radice 1 N + 3 vel 1 N + [illegible] verum hoc indicaſſe ſatis eſto.

Deinde Bachetus ait reperiri duas ſolutiones in iis duplicatis æqualitatibus 32
quarum termini habent tam numerum quadratum quam vnitatum quadratum vt ſi dentur æquandi quadrato 1 Q + 12 N + 1 & 1 Q + 1 nam per methodos vulgares reperientur valores [illegible] vel [illegible] at ſi quis petat alios, hæret Bachetus, noſter tamen Fermatius inde ſe alacriter expedit & ſubminiſtat infinitos. Adde quod ne in hoc quidem caſu ſemper dabit duos valores Bachetus vt ſi dentur duo termini æquandi quadrato 1 Q + 3 N + 1 & 1 Q − 1 N + 1 vnicum enim eius methodus valorem exhibet, imo continget ſæpè vt ne vnum quidem ſit exhibiturus vt ſi dentur æquandi quadrato 1 Q − 6 N + [illegible] & 1 Q − 2 N + [illegible] hoc autem continget quia valor exhibetur cum defectu; jam autem ſupra diximus per methodum Fermatianam innumeros valores exhiberi etiam dum numeri ficti occurrunt.

Præterea cum Diophantus l. 4. q. 29. eo deueniſſet vt 9 QQ − 4 C + 69 − 12 N. 33
+ 1 æquandus foret quadrato, Bachetus ait quatuor tantum modis id fieri poſſe, ſublatis enim quadratoquadratis & vnitatibus vel tollet radices, vt maneat æquatio inter cubos & quadratos; vel tollit cubos vt maneat æquatio inter radices & quadrata, vnde inuenit tantum duos valores [illegible] & [illegible]. Fermatius vero reperit infinitos, primo enim expungit etiam quadrata, vt remaneat æqualitas inter cubos & quadratoquadrata vel inter radices & vnitates. Secundo aſſerit Bachetus ſi fingatur latus iſtius quadrati 3 Q + 6 N − 1. fore vt incidatur in incommodum & 24 Q + 40 C æquentur nihilo, Verum hoc incommodum non pertimeſcit Fermatius. Tertio ex quolibet valore inuento, alios reperit in infinitum vt iam explicatum eſt.

Deinde Bachetus lib. 4. q. 28. ait eſſe impoſſibile æquari cubo 8 C + 8 N − 1 Q
− 1 & affert rationem quia non poteſt fingi cubus iſte niſi à latere 2 N − 1 vel tollantur 34
cubi & vnitates: verum, pace tanti viri dixerim, falſum hoc eſt, primo enim poteſt fingi latus iſtius cubi [illegible] − 1 ex fit valor [illegible] deinde fingendo latus 2 N − 1 fiet radix − [illegible] & reſoluendo numerum ſuperiorem iuxta hanc nouam radicem. Hæc fuſius explicabun- infrà in tertiá parte.

Vietam Fermatius antecellit.

35 Non ſatis caute negauit Vieta numerum compoſitum ex duobus cubis poſſe diuidi in alios duos cubos. Fermatius enim docet id poſſe fieri ex iis quæ habet Bachetus ad l. 4. Q. 2. Diophanti (quod tamen ipſe Bachetus non aduertit) ſit igitur 9. compoſitus ex duobus cubis 1 & 8 diuidendus in alios duos cubos, quærantur primum duo cubi quorum differentia ſit 9. beneficio huius canonis: vtrumque datorum cuborum 1 & 8 ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum & minori quotienti adde maius latus, à maiore autem quotiente aufer minus latus, ſumma & reſiduum exhibebunt quæſitorum latera cuborum: proinde latera illa ſunt $\frac{20}{7}$ $\frac{17}{7}$ cubi vero $\frac{4913}{343}$ $\frac{8000}{343}$. Secundo datis duobus cubis inueniuntur alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum; hoc autem commode fiet per canonem ſequentem, productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per ſummam cuborum, à majore quotiente aufer minus latus à minore quotiente aufer minus latus, relinquentur latera quæſitorum cuborum. At duorum cuborum mox inuentorum differentia eſt 9. ergo latera nouorum cuborum quorum differentia eſt 9. erunt *188479* & *36520* (ſuppoſito vtrique denominatore cõmuni *90391*) cubi autem erunt *6695590842626239* & *48707103808000* (modo tamen vtrique ſupponatur communis denominator *738542637646471*) horum igitur cuborum differentia eſt 9 ſicut & priorum. Tertio extat alius canon quo inueniuntur duo cubi quorum ſumma æqualis eſt differentiæ duorum cuborum datorum, & eſt eiuſmodi: vtrumque datorum cuborum duc ter in latus alterius, productos diuide per ſummam datorum cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à majore latere, relinquentur cuborum quæſitorum latera. Ergo cum duorum cuborum poſteriorum differentia ſit 9. ſi per hunc canonem inueniantur duo cubi quorum ſumma ſit æqualis illi differentiæ habebuntur latera quæſitorum cuborum [illegible] [illegible].

36 Vieta ſoluit acutiſſime problema Adriani Romani quod fuerat propoſitum omnibus totius orbis mathematicis in vno caſu, dum videlicet numerus cum quo debet fieri æquatio minor eſt binario, idque per ſectiones angulares, vbi ingenij ſui vim mirificè oſtendit & maximam inde exiſtimationem vbique terrarum ſibi comparauit. Verum Fermatius noſter, etiam dum numerus binario maior eſt, quo in caſu nullum eſt ab ſectionibus angularibus præſidium, ſoluit quæſtionem; ſit enim 45.(1)—3795(3)+95634(5) &c. nihil omnino immutando in terminis Adriani numerus æqualis cuius numero dato (eo enim recidit problema Adriani vt Vieta ipſe vel agnouit vel emendauit) ſit autem datus numerus ℞ 8 + 6, qui eſt binario maior, aſſerit Fermatius valorem radicis primigeniæ facillime deſignari per radices vniuerſales eritque in eo caſu ℞ poteſtatis 45 (3 + ℞ 2 + ℞ bin. 10. + ℞ 72) + ℞ poteſtatis 45 (3 + ℞ 2 — ℞ bin. 10 + ℞ 72) Rurſus ſi detur numerus 4 aſſerit Fermatius valorem radicis fore ℞ poteſtatis 45 bin. 2 + ℞ 3 + ℞ poteſtatis 45. reſidui 2 — ℞ 3. & ſic infinitum valores nouos dabit etiam ſupra binarium, cum Vieta ne vnum quidem etiam ſectionum angularium ope ſuffultus exhibere poſſit.

37 Vieta l. 5. zetet. 9. infeliciter ſoluit quæſtionem tertiam libri ſexti Diophanti; cum enim iſte proponat inuenire triangulum rectangulum cuius area aſſumens datum numerum faciat quadratum, coarctauit Vieta quæſtionem ad datum numerum ex duobus quadratis compoſitum, at Fermatius innumeris modis ſoluit problema de dato quocumque numero ſi enim dentur 3 nùmeri ſequentes exhibet triangulum quæſitum [illegible] [illegible] [illegible].

Diophantum in plurimis Fermatius ſuperat.

Diophantus l. 5. q. 8. tradit artem inueniendi tria triangula rectangula quæ ſint æqualia quoad aream; qui vero plura ab ipſo expetet numquam obtinebit, præterea numquam tradidit Diophantus methodum inueniendi triangulum dato triangulo æquale quoad aream. Fermatius vtrumque mox atque eadem operatione præſtabit, ſit verbi gratiâ inueniendum triangulum rectangulum cuius area ſit 6. qualis eſt area trianguli rectanguli 3. 4. 5. eſto vnum latus cuiuſpiam trianguli rectanguli 3 & aliud latus ſit 1 N + 4 horum quadrata ſimul ſumpta exhibent 25 + 1 Q. + 8 N. pro quadrato hypotenuſæ: quare iſte numerus æquatur quadrato, deinde area iſtius trianguli $\frac{3}{2}$ N + 6. debet eſſe ſextupla alicuius quadrati (quia poſtulatur aream eſſe 6, ergo eius areæ ſextans quadratus eſt ac proinde ille ductus in 36. efficiet quadratum, efficit autem 9 N + 36. igitur hic numerus æquandus eſt quadrato. En igitur duos terminos duplicatæ æqualitatis 9 N + 36. & 25 + 1 Q + 8 N. in his autem vnitatum numerus quadratus eſt, ergo valor radicis facile reperietur eritque − [illegible] ac proinde 1 N + 4 erit [illegible]. aliud autem latus circa rectum eſt 3 igitur horum quadrata ſimul ſumpta faciunt quadratum cuius latus [illegible] erit hypotenuſa ergo habes triangulum rectangulum [illegible] [illegible]. 3. cuius area eſt ſextupla cuiuſpiam quadrati nempe [illegible]. huius vero quadrati latus eſt [illegible]. per quod ſi diuidas ſingula latera trianguli mox reperti, habebis triangulum quæſitum [illegible]. [illegible]. [illegible]. cuius area eſt 9. aduerte nos inueniſſe hoc triangulũ per illud quod datum fuit 3. 4. 5. ac per inuentum inueniri poſſe tertium, per tertium, inuenietur quartum & ſic in infinitum. Ecce tibi quatuor triangula rectangula quorum area eſt 840 primum 58. 40. 42. ſecundum 74. 24. 70. tertium 113. 15. 112. quartum [illegible] [illegible] [illegible].

Diophantus l. 6. q. 6. incidit in illam duplicatam æqualitatem 1 + 1 Q & 1 + 14 N. poteſt illa reſolui duobus modis, ſupponendo primum ex illis maiorem vel minorem altero, prout libuerit: & ſunt duæ radices [illegible] & [illegible]. ſciſcitare ab illo tertiam, non dabit. Fermatius poteſt dare infinitas, pro exemplo ſumatur noua radix 1 N + $\frac{24}{7}$ & juxta illum reſoluantur 1 + 1 Q & 1 + 14. N. fientque noui termini 1 Q + [illegible] [illegible] & 49 + 14 N. ergo cum vnitatum numeri ſint quadrati in vtroque termino, reſolui poteſt per methodum, eritque radix pro duobus terminis poſterioribus [illegible] cui necto $\frac{24}{7}$ & fiet valor radicis pro data æqualitate + [illegible]. 39

Diophantus l. 6. poſt quæſt. 15. & 17. omiſit tertium caſum quo quæri poteſt triangulum rectangulum vt tam hypotenuſa quam alterum laterum circa rectum, detractâ areâ faciat quadratum: omiſit inquam illud problema raræ ſubtilitatis non alia de cauſa niſi quia incidit in numeros fictos quorum enodationem ignorauit. Fermatius illud acutiſſime ſoluit; primo enim per analyſin deprehendit inueniendum eſſe triangulum rectangulum in quo productus ſub hypotenuſa in ſummam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus area, ſit quadratus, deinde triangulum iſtiuſmodi inuenit eiuſque ratiocinium & praxim dedimus ſupra num. 26. vbi diximus triangulum 985. 697. 696. ſatisfacere huic lemmati. Tertio latera huius trianguli nectit characteri radicum vt ſit triangulum quæſitum 985 N. 697 N. 696 N. cuius area 242556 4. tollatur ab hypotenuſa 985 N & 697 N. ita duo reſidua 985 N − 2425569 & 697 N & 2925564 erunt æquanda quadrato, æquetur illud poſtremum quadrato ab 697 N. orto ſitque 485809 æquale 697 N − 2425569. & fiet valor radicis [illegible] ideoque triangulum ab initio quæſitum erit [illegible] [illegible] [illegible]. En quo Diophantus nuſquam attingere potuit, multa alia dabimus eiuſmodi in ſequentibus quæ Diophantus omiſit, vt pote ſibi ignota. 40

Quæſtiones duodecim circa hactenus dicta.

41 Quot exempla dedimus tot ſunt problemata difficillima, quibus enodandis impares erunt algebriſtæ vulgares. Primum enim exemplum in quo propoſita eſt duplicata æqualitas 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 ita enunciari poteſt. Inuenire numerum octonario majorem cuius quadruplum additum vnitati faciat quadratum & cuius duplum ſubtractum ab eius quadrato cum vnitate iuncto faciat rurſus quadratum, numerus quæſitus eſt $\frac{21}{4}$. Secundum exemplum ſic proponetur. Inuenire numerum cuius duplum detractum vnitati quadratum exhibet & cuius quadruplum ſubtractum ab vnitate iunctâ cum duplo eius quadrato faciat quadratum. Hinc exiſtit duplicata æqualitas inter 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q vbi valor radicis eſt [illegible]. Tertium exemplum in quo 89 + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N æquantur quadrato, ſic proponi poteſt in problema. Inuenire numerum cuius ſedecuplum cum octuplo quadrato additum 4. facit quadratum & cuius quadruplum cum quaternario & duplo ipſius quadrato, facit quadratum, hic valor eſt $\frac{15}{7}$. Omitto reliqua exempla vt proponam illuſtriores quaſdam quæſtiones.

Inuenire infinities duos numeros quorum productus ſublatus ab alterutro eorum, aut ab illorũ ſummâ aut à differentiâ relinquat quadratum.

42 Sint duo illi 1 N. & 1 − 1 N ſic enim ſatisfiet duobus poſtulatis prioribus, reſtat ergo vt duobus poſterioribus ſatisfiat, ſuppono 1 N eſſe minorem, ergo productus 1 N − 1 Q. ſubtractus à differentia 1 − 2 N dat pro reſiduo 1 Q + 1 − 3 N. ſubtractus autem à ſumma 1. relinquit 1 Q + 1 − 1 N. illa ergo duo reſidua æquantur quadratis & fit per methodum vulgarem [illegible] pro valore radicis ac proinde duo numeri quæſiti ſunt [illegible]. Supponatur nunc pro nouâ radice 1 N. + [illegible] & iuxta illam reſoluantur duo reſidua ſupradicta, fientque de nouo, duo termini 1 Q + [illegible] & 1 Q + [illegible] æquandi quadratis, igitur quoniam in vtroque termino vnitatum numerus eſt quadratus, inuenietur valor pro his terminis [illegible] huic adde [illegible] & fiet valor pro prioribus terminis, igitur duo numeri quæſiti erunt [illegible] & [illegible].

Potes ex iſto poſteriori valore elicere alium tertium, & ex tertio quartum, & ſic in infinitum. En tibi alios duos numeros ſatisfacientes quæſtioni 10416 & 41449 modò ſuppoſueris denominatorem 51865.

Inuenire infinities tres numeros quorum ſolidum ſubtractum à ſingulis, & à qualibet illorum differentia & à producto medij in extremos, & à quadrato medij, relinquat quadratum.

43 Ponantur tres quæſiti 1 N. 1. 1. − 1 N horum ſolidum 1 N − Q. detractum primo & tertio, itemque differentiæ primi & ſecundi, ac differentiæ ſecundi & tertij relinquit quadratum, ſupereſt ergo vt ſatisfiat reliquis poſtulatis ſeu vt 1 Q + 1 − 1 N & 1

Q + 1 − 3 N. æquentur quadratis, ſunt autem iidem plane numeri cum iiſdem ſignis quæ in priori quæſtione, igitur valor eſt $\frac{3}{8}$ & fient tres quæſiti 3. 8. 5. modo illis ſupponatur denominator communis 8. Item tres ſequentes 10416. 51865. 41449 (modo ſupponatur illis denominator 51865) ſatisfaciunt quæſtioni ſimili ratione tres ſubſequentes 249875197. 784992912. 535117715. ſuppoſito denominatore communi 784992912. ſoluunt quæſtionem.

Poteſt idem problema aliter proponi hoc modo. Diuidere infinities binarium in tres partes, ita vt ſolidum ſub illis detractum ſingulis, & cuilibet eorum differentiæ, & cuilibet producto medij in extremos, & quadrato medij, ſemper relinquat quadratum, nam quilibet ternarius ex ſupradictis æquatur binario. Aduerte dumtaxat me per medium non intelligere minorem majore & majorem minore, ſed habere tantum rationem ſitus, in eo ordine quem ſupra vides.

Inuenire infinities duos numeros tales, vt differentia quadratorũ ab illis ortorum detracta maiori vel minori, vel ſummæ vel differentiæ eorum, relinquat quadratum.

Ponatur ſumma numerorum 1 − 2 N. & differentia 2 N. ergo ipſi numeri erunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ − 2 N. proindeque differentia quadratorum ab illis eſt 2 N − 4 Q quæ detracta ſummæ vel differentiæ relinquit quadratum. Reſtat ergo vt detracta alterutri numerorum, quadratũ relinquat, relinquit autem $\frac{1}{2}$ + 4 Q − 2 N. & $\frac{1}{2}$ + 4 Q − 4 N. igitur hæc æquanda quadratis, & fit 1 N æqualis [illegible] & duo quæſiti numeri ſunt [illegible] & [illegible] vt vero inuenias alios, pone pro nouâ radice 1 N + [illegible] & iuxta hãc reſolue terminos quadrato æquatos, & perge in operatione ſecundum præcepta ſuperius tradita, neque deſpondeas animum ſi occurrant numeri ficti, iam diximus quomodo reduci debeant ad veros. 44

Inuenire duos numeros quorum ſumma faciat quadratum, & quorum quadrata ſimul iuncta faciant quadrato-quadratum.

Iſtud problema idem plane eſt cum ſuperiori quo quærebatur triangulum rectangulum cuius hypotenuſa & ſumma laterum ſit quadratus aliaſque fuit propoſitum pleriſque doctiſſimis Mathematicis à Fermatio noſtro ſine ſolutione. Vtere igitur triangulo primitiuo ſupra inuento (num. 25) 169. 119. 120. quod formatur ab 5 & 12 & forma triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera erunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120. igitur hypotenuſa 1 Q + 169 + 10 N. & ſumma laterum circa rectum 1 + 1 Q + 34 N. æquantur quadrato, duc ſummam iſtam laterum in 169. ergo productus 169 Q + 5746 N. + 169. cum hypotenuſa 1 Q + 169 + 10 N æquantur quadratis. Ergo (per ea quæ dicta ſunt num. 22) valor radicis eſt [illegible] & iuxta poſitiones duo numeri à quibus naſcetur triangulum quæſitum 4687298610289. 4565486027761. 1061652293520. nam & hypotenuſa & quadratus & ſumma laterum & quadrata laterum æquantur quadrato hypotenuſæ. Proindeque duo latera circa rectum ſunt duo numeri quæſiti tum quia illorum ſumma quadratus eſt, tum quia horum quadrata ſimul iuncta faciunt quadratoquadratum. 45

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui additus dato multiplici alterius circa rectum faciat quadratum.

46 Detur triplus pro multiplici & formetur triangulum rectangulum ab 1 N + 1 & 1. latera erunt 2 + 1 Q. + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 + 2 N. triplum poſtremi iſtius lateris eſt 6 N + 6 cui ſi addas medium latus, fiet ſumma 1 Q + 8 N + 6 æquanda quadrato. Inſuper ipſum medium latus nempe 1 Q + 2 N. quadrato æquandum eſt. Hæc duplicata æqualitas modo communi reſoluta dat [illegible] pro valore radicis & iuxta poſitiones fiet triangulum quæſitum in integris 313. 25. 312.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius lateris circa rectum faciat quadratum.

47 Detur triplus pro multiplici & capiatur triangulum inuentum in præcedente 313. 25. 312. pro primitiuo, & quia iſtud triangulum formatur ab 13 & 12 forma triangulum quæſitum ab 1 N − 13 & 12. latera erunt 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. huius poſtremi triplum ſubtractum à medio, relinquit 19 + 961 − 98 N. quod eſt æquandum quadrato, at medium latus æquari etiam debet quadrato nempe 1 Q − 26 N + 25. En tibi æqualitatem duplicatam, ducto igitur horum poſtremo in $\frac{961}{25}$ iuxta ea quæ dicta ſunt in numero 4. fient duo termini noui æquandi quadrato [illegible] + 961 − [illegible] & 1 Q + 961 − 98 N. horum differentia eſt [illegible] − [illegible] eligantur duo hanc differentiam producentes [illegible] & [illegible] − [illegible] & fiant reliqua pro ſolito, inuenieturque valor radicis [illegible] ergo 1 N. − 13. & 12. in integris abiecto denominatore erunt 23542921 & 38204430 ex quibus formatur triangulum quæſitum 568864871005841. 539673367418641. 179888634210480. dabimus infra ſolutionem eiuſdem problematis per aliam methodum in 3. p. n. 36.

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit numerus quadratus, & in quo datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri, faciat quadratum.

48 Pone 1 N. + 1 & 1 pro numeris formantibus triangulum, latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo ſi duplum iſtius poſterioris 4 N + 4 tollas ab 1 Q + 2

N. relinquetur 1 Q − 2 N − 4 æquandus quadrato, ſed & hypotenuſa 2 + 1 Q + 2 N. æquanda eſt quadrato. En tibi duplicatam æqualitatem vbi valor radicis eſt $\frac{17}{12}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris relicto de nominatore erunt − 5 & 12. vnde formatur triangulum 169. 119 − 120, redintegra ergo operationem & pone pro numeris formantibus triangulum 1 N − 5 & 12 latera trianguli erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10. N − 119. 24 N − 120. ac proinde ſi duplum poſtremi lateris detrahatur medio, reſiduum 1 Q + 121 − 58 N ſicut & hypotenuſa 1 Q + 169 − 10 N. æquabuntur quadratis, ducatur ergo reſiduum 1 Q + 121 − 58 N in quadratum $\frac{169}{121}$ & fient duo termini æquandi quadrato reducti ad eundem quadratum $\frac{169 Q}{121}$ + 169 − $\frac{9802 N}{121}$ & 1 Q + 169 − 10 N. differentia illorum eſt $\frac{48 Q}{121}$ $\frac{8592 N}{121}$ quam producunt $\frac{4 N}{11}$ & $\frac{12 N}{11}$ − $\frac{2148}{11}$ horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur maiori duorum ſuperiorum terminorum & fiet valor radicis [illegible] & juxta poſitiones triangulum quæſitum erit 1934304613329. 1873241868792 1. 482187400400. & ſatisfacit quæſtioni.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa rectum ſit quadratus, & alterius lateris circa rectum ſit quadratus & alterius lateris circa rectum datus multiplex hypotenuſæ additus faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera ſunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ponatur medium latus 1 Q. + 2N. eſſe quadratum, poſtre- 49
mi autem lateris duplum 4 N + 4 additum hypotenuſæ facit 1 Q + 6 N. + 6 ergo duo ſequentes termini 1 Q + 6 N + 6 & 1 Q + 2 æquantur quadratis, & fit valor $\frac{1}{4}$ ac proinde 1 N + 1 & 1 in integris erunt 5 & 4 vnde formatur triangulum quæſitum 41. 9: 40. hinc ſolues ſequens problema. Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit quadratus numerus, alterius autem lateris ſimplum & duplum additum hypotenuſæ faciat quadratum, triangulum eſt idem quod ſupra 41. 9. 40. ſi peteres iſtius lateris additi ſimplum & quindecuplum triangulum foret 30, 16. 34. formatum à 5 & 3.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit quadratus, alterius autem lateris datus multiplex detractus hypotenuſæ faciat quadratum.

Detur multiplex duplus; & aſſumatur pro triangulo primitiuo illud quod inuentum eſt in quæſtione præcedenti 41. 9. 40. quodque formatur ab 5. & 4. inde ob ana- 50
lyſin præcedentem formabitur triangulum quæſitum ab 1 N − 5 & 4. latera erunt 1 Q + 41 − 10 N. 1 Q + 9 − 10 N. 8 N − 40 ſit medium latus 1 Q + 9 − 10 N. æquandum quadrato deinde duplum poſtremi lateris 8 N − 40. detrahatur hypotenuſæ & remanet 1 Q + 121 − 26 N æquandus quadrato, ecce ergo duplicatam æqualitatem

inter 1 Q + 121 − 26 N & 1 Q + 9 − 10 N quæ multipliciter videtur poſſe ſolui, ſed vix occurret ratio commoda ad ſolutionem niſi recurras ad nouam methodum explicatam num. 20. & ſequentibus, reuocentur ergo illi duo termini ad eandem vnitatem quadratum ducendo poſteriorem in $\frac{121}{9}$ ita fient rurſus duo termini $\frac{121 Q}{9}$ + 121 − $\frac{1210 N}{9}$ & 1 Q + 121 − 26 æquandi, quadrato, horum terminorum differentia eſt $\frac{112 Q}{9}$ − $\frac{976 N}{9}$ hanc producunt $\frac{8 N}{3}$ & $\frac{14 N}{3}$ − $\frac{122}{3}$ horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus priori termino dat valorem $\frac{658}{33}$ vnde ſi tollas 5. reſtabit $\frac{493}{33}$ ergo numeri à quibus formabitur triangulum quæſitum ſunt 493 & 132. & ipſum triangulum quæſitum eſt 260473. 225625. 130152.

Hinc ſolues ſequens problema : Inuenire triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus & alterius lateris ſimplum & duplum detractum ſigillatim hypotenuſæ relinquat quadratum, iidem enim numeri ſupra dati ſoluunt quæſtionem neque dicas hanc conditionem mox additam eſſe inutilem cum omni triangulo rectangulo conueniat; nam & ſi conueniat omni triangulo, multiplicibus tamen non conuenit vt patet in ſequente 624. 576. 240 nam vnum eius latus eſt numerus quadratus & duplum alterius lateris detractum hypotenuſæ facit quadratum, nec tamen ſimplum illius additum hypotenuſæ quadratum facit.

Inuenire triangulum rectangulum cuius area ſublata ex quadrato ſummæ laterum circa rectum relinquat quadratum.

51 Ponantur duo latera circa rectum 1 N & 1. ergo illorum quadrata 1 Q + 1 facient quadratum hypotenuſæ, area autem trianguli erit $\frac{1 N}{2}$ quæ ſublata de quadrato ſummæ laterum circa rectum relinquit 1 Q + 1 + $\frac{3 N}{2}$ æquandum quadrato in hac duplicata æqualitate fit valor − $\frac{55}{48}$ pono ergo nouam radicem 1 N − $\frac{55}{48}$ & iuxta eam reſoluo omnes particulas eorum terminorum qui mox æquati ſunt quadratis fiuntque noui termini quadrato æquandi 1 Q − $\frac{19 N}{24}$ + $\frac{1369}{2304}$ & 1 Q − $\frac{55 N}{24}$ + $\frac{5329}{2304}$, duc primum terminum in $\frac{5329}{1369}$ ſic enim reuocabuntur duo termini prædicti ad eundem vnitatum quadratum eruntque $\frac{5329 Q}{1369}$ − $\frac{101251 N}{32856}$ + $\frac{5329}{2304}$ & 1 Q − $\frac{55 N}{24}$ + $\frac{5329}{2304}$ æquandi quadrato differentia illorum eſt [illegible] quam producunt [illegible] & [illegible] & fit valor [illegible] hinc tolle $\frac{55}{48}$ ob nouam radicem & extabit valor pro primis poſitionibus $\frac{39655}{129648}$ igitur duo latera circa rectum quæ poſita ſunt 1 N & 1 erunt in integris 39655. 129648: & hypotenuſa 135577. En triangulum quæſitum.

Inuenire triangulum rectangulum cuius tam vnum latus circa rectum quam ſumma laterum circa rectum ſit quadratus, & in quo dupla area detracta alterutri laterum circa rectum faciat quadratum.

52 Ponantur latera 1 N & 1 − 1 N. duplum areæ eſt 1 N − 1 Q. quod detractum alterutri laterum facit quadratum : 1 Q & 1 + 1 Q − 2 N. præterea ſumma laterum eſt quadratum

tum, nempe vnitas, reſtat ergo vt ſecundum latus $1 - 1N$. & inſuper ſumma quadratorum a lateribus $1 + 2Q - 2N$. faciant quadratum & fit [illegible] pro valore radicis igitur triangulum quæſitum eſt [illegible] [illegible] [illegible].

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit cubus, à quo detractâ areâ relinquatur quadratus.

Ponantur latera circa rectum 1 N & 1, ſic enim vnum latus cubus erit: ex eo cubo 53
tolle aream $\frac{1N}{2}$. reſiduum $1 - \frac{1N}{2}$ æquandum eſt quadrato, ſed & $1Q + 1$ quadrato æquari debet, in iſta duplicata æqualitate valor radicis eſt − [illegible] pono igitur nouam radicem 1 N [illegible] & iuxta illam reſoluo ſingulas particulas terminorum quadratis æquatorum fiuntque noui termini quadrato æquandi [illegible] $- \frac{1N}{2}$ & $1Q +$ [illegible] − [illegible] vbi vnitatum numeri ſunt quadrati qui ad eundem quadratum vnitatum reducti faciunt $1Q +$ [illegible] [illegible] & [illegible] − [illegible] quadrato æquandos, horum differentia eſt $1Q -$ [illegible] quam producunt 1 N & 1 N − [illegible] ergo valor eſt [illegible] vnde ſi tollas [illegible] ob nouam radicem relinquetur valor pro primis poſitionibus [illegible] & fit triangulum quæſitum [illegible]. 1. [illegible].

PARS SECVNDA.

De Triplicatâ æqualitate, & eius ſolutionibus infinitis.

1 Vulgare eſt duos terminos quibuſdam conditionibus affectos æquari poſſe quadratis: ſed hactenus inauditum fuit hoc ipſum perfici de terminis tribus; aſſerit tamen intrepidè Fermatius non tantum hoc non eſſe impoſſibile, verum etiam facilè poſſe fieri, traditque regulas certas quibus id præſtetur, modo adſit vnum quadratum ex parte ſingulorum terminorum: hoc autem facit dupliciter, primo reſpectu radicum & vnitatum, ſecundo reſpectu quadratorum & radicum.

Præceptum generale ad ſoluendas triplicatas æqualitates.

2 Si fuerint tres termini æquandi quadrato, & ſit in illis idem quadratus, cape certum quemdam numerum quadratorum & radicum, pro vnâ radice, hunc multiplica per numerum radicum in vno ex terminis datis exiſtentem ita vt productus numero vnitatum iunctus, efficiat quadratum: & juxta illam nouam radicem reſolue duos alios terminos, iiſque reſolutis adhibe duplicatam æqualitatem vulgarem: ita efficies valorem pro tribus poſterioribus terminis, hunc valorem reſolue per illum certum numerum quadratorum & radicum quem accèpiſti, & fiet valor quem quæris pro tribus terminis prioribus qui dati ſunt.

3 Exemplum eſto in tribus terminis ſequentibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. & 1 + 5 N. æquandis quadrato, cape pro vna radice 1 Q + 2 N. hoc enim ductum in 1 numerum radicum facit 1 Q + 2 N & hic productus junctus vnitati facit quadratum 1 + 1 Q + 2 N. à latere 1 + 1 N tum juxta eandem radicem nouam reſolue duos alios terminos 1 + 2 N & 1 + 5 N. & habebis duos terminos nouos 1 + 2 Q + 4 N & 1 + 5 Q + 10 N. æquandos quadrato, id facies, per methodum vulgarem capiendo iſtorum terminorum differentiam 6 N + 3 Q. quam producunt 3 N & 2 + 1 N. horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus 1 + 4 Q + 4 N. æquatus maiori termino 1 + 5 Q + 10 N. dat pro valore − 6 (hic numerus fictus æquabit quadratis tres poſteriores terminos) hunc reſolue per 1 Q + 2 N quibus vſus es pro noua radice, hoc eſt cape quadratum − 6. nempe 36. quem connecte cum duplo − 6. nempe 12. ita enim fiet + 24. pro valore radicis in tribus prioribus terminis qui dati ſunt eruntque tres illi termini quadrati 25. 49. 121. ſi accipias 24. pro 1 N.

4 Rurſus data triplicata æqualitate 4 + 2 N. 4 + 3 N. 4 + 6 N. cape $\frac{1Q}{2}$ + 2 N. pro noua radice, vt eo coſſico ducto in 2 fiat 1 Q + 4 N. qui iunctus 4 facit quadratum 4 + 1 Q + 4 N. operare vt ſupra, & fiet ualor pro triplicata æqualitate data $\frac{1120}{529}$.

5 Simili prorſus ratione datis tribus terminis 9 + 1 N. 9 + 3 N. 9 + 5 N. æquandis quadrato, oportebit vti reſolutione, capiendo 1 Q + 18 N. pro 1 N. & fient noui tres termini, quorum primus erit quadratus indefinite, ac proinde per duplicatam æqualitatem vulgarem, inuenies valorem radicis $\frac{1512}{121}$.

Si numeri vnitatum ſunt quadrati diuerſi, haud difficilius ſoluetur triplicata æqualitas.

Vt ſi dentur tres termini 1 + 1 N. 4 + 3 N. 9 + 2 N æquandi quadratis reuocandi 6
erunt quadrati ad eundem, & perficietur operatio, vt dictum eſt; facile autem reuocabuntur ad eundem quadratum ſi tres illi multiplicentur inter ſe, ſic ergo ſtabit triplicata æqualitas præcedens 36 + 36 N. 36 + 27 N. 36 + 8 N. quia enim 1 ducta eſt in 36. oportebit ducere in 36. numerum radicum qui illi iungitur & quia quadratus ſequens 4 ducitur in 9 vt fiat 36. oportebit etiam numerum radicum 3. qui illi nectitur ducere in 4. vt fiat 36. neceſſe erit numerum radicum 2 illi annexum ducere in 4. vt fiant 8 N. at in iſtis poſterioribus terminis valor eſt [illegible] ergo & in prioribus, ille idem valor ſoluit quæſtionem.

Hæc eadem praxis extenditur ad numeros diminutos.

Exempli cauſa ſi dentur tres termini 1 + 1 N. 1 − 2 N. 1 + 5 N. capiendo pro vna 7
radice 1 Q. + 2 N. reuocabuntur ad iſtos tres 1 + 1 Q + 2 N. 1 − 2 Q − 4 N. 1 + 5 Q + 10 N. & quoniam illorum trium primus eſt quadratus indefinite, erunt duo reliqui æquandi quadrato & fiet valor radicis [illegible] pro poſterioribus terminis, ac pro prioribus [illegible]

Dantur infinitæ ſolutiones in triplicatis æqualitatibus.

Rem totam exemplo illuſtrabimus, quia enim ſupra dixi − 6 eſſe valorem 1 + 2 Q 8
+ 4 N. & 1 + 5 Q + 10 N. aſſumo 1 N − 6 pro noua radice, iuxta quam reſoluo duos terminos ſuperiores & fiunt noui termini 5 Q + 121 − 50 N & [illegible] + 121 − [illegible] æquandi quadrato per methodum vulgarem, & fit pro valore radicis quidam numerus, vnde ſi tollas 6. (ob nouam radicem 1 N − 6) reſtabit valor [illegible] & quia tres termini primitus dati erant 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. & ſumpta erat noua radix 1 Q + 2 N. duplum valoris mox inuenti iunctum eius quadrato, exhibebit pro triplicata æqualitate valorem [illegible] modo ſupponas denominatorem, & ſatisfacit plane, nam iſte numerus additus vnitati facit quadratum, cuius latus eſt 26220768035. ſuppoſito denominatore 14716382219. duplum eiuſdem numeri additum cum vnitate facit quadratum à latere 34036531067. ſupponendo eundem denominatorem; quintuplum autem illius numeri iunctum vnitati, quadratum eſt à latere 50708537341. ſuppoſito eodem denominatore.

Cum maior numerus radicum æquatur duobus alijs radicum numeris, impoſsibilis eſt ſolutio triplicatæ æqualitatis per hanc methodum.

Sint, verbi gratia, termini tres 1 + 2 N. 1 + 3 N. 1 + 5 N. æquandi quadratis; 9
& capiatur pro vna radice 2 Q + 2 N. vt primus terminus per eam reſolutus exhibeat

quadratum 1 + 4 Q + 4 N. duo autem alij termini reſoluti exhibebunt 1 + 6 Q + 6 N. 4 Q + 10 N. igitur ſi hæc duplicata æqualitas ſoluatur per methodum communem prodibit valor pro poſterioribus terminis − 1 qui reſolutus iuxta nouam radicem 29 + 2 N dat, 0, ſeu negarionem numeri pro numero poſitiuo.

10 Idem dic de quacumque aliâ duplicata æqualitate iſtiusmodi, vbi aduerte dixiſſe me ſolutionem in eo caſu impoſſibilem eſſe per hanc methodum, nam dari poſſunt plurimæ æqualirates triplicatæ huius generis quæ in ſe non ſunt impoſſibiles: vt patet in ſequente 1 + 5 N. 1 + 16 N. 1 + 21 N. vbi valor radicis eſt 3 iuxta quem reſoluti termini dant tres quadratos 16. 49. 64.

11 Hic etiam aduertendum eſt cum noſtro Fermatio triplicatam æqualitatem 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 3 N. eſſe impoſſibilem duobus modis, & eſſentialiter & methodicè: eſſentialiter quidem quia demonſtratur non poſſe dari quatuor quadraios in continua proportione arithmetica quod tamen inde ſequeretur, proponendo vnitatem: eſt quoque ſolutio hîc impoſſibilis methodicè, quia licet in ſe foret poſſibilis, non poſſet ſolui per methodum allatam eo quod numerus major radicum æquatur duobus aliis radicum numeris.

12 Hæc tamen cautio intelligenda eſt dum numerus quadratus vnitatum eſt vnus & idem quadratus, quia ſi eſſent diuerſi quadrati pro numero vnitatum, poſſet numerus maior radicum æquari duobus alijs vt patet in tribus terminis ſequentibus 1 + 1 N. 9 + 2 N. 4 + 3 N. vbi radicis valor reperitur per noſtram methodum [illegible].

Triplicata æqualitas poteſt ſolui etiam ſi conſtet ſolis quadratis & radicibus, modo numerus quadratorum ſit quadratus.

13 Sint exempli cauſa tres 1 Q + 1 N. 1 Q + 2 N. 1 Q + 5 N. æquandi quadrato, reduci poteſt illa æqualitas ad præcedentem conſtantem vnitatibus & radicibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. in qua ex præcedentibus valor eſt 24. per hunc valorem diuide vnitatem & fiet valor quæſitus $\frac{1}{24}$. Ratio huius rei eſt quia ſi illic loco 1 N. capias $\frac{1}{1N}$ primus terminus qui fiet 1 Q + 1 N. erit $\frac{1}{1Q} + \frac{1}{1N}$ & ſecundus $\frac{1}{1Q} + \frac{2}{1N}$ tertius autem $\frac{1}{Q} + \frac{5}{1N}$ hi tres æquari debent quadratis; duc illos in 1 Q & fient 1 + 1 N. 1 + 2 N & 1 + 5 N. æquales quadratis, etenim quadrati ducti in quadratum faciunt quadratos. Igitur reducta eſt triplicata æqualitas conſtans quadratis & radicibus, ad triplicatam æqualiratem conſtantem radicibus & vnitatibus debetque vnitas diuidi per valotem numeri quia $\frac{1}{1N}$ ſumpta eſt pro 1 N.

14 Sic data triplicata æqualitas 4 Q + 2 N. 4 Q + 6 N. 4 Q + 9 N. conuertetur in iſtam 4 + 2 N. 4 + 6 N. 4 + 9 N. & quia in poſteriori valor eſt [illegible] per hunc diuidendo vnitatem, erit in priori valor [illegible] ſimilirer data triplicata æqualitas 1 Q + 2 N. 4 Q + 3 N. 16 Q + 6 N. conuertetur in iſtam 1 + 2 N. 4 + 3 N. 16 + 6 N. in qua valor eſt [illegible] ergo ſi per hunc diuidas vnitatem fiet [illegible] pto valore prioris, denique ſi detur 1 Q + 1 N. 4 Q + 3 N. 9 Q + 2 N. conuertes illam in + 1 N. 4 + 3 N. 9 Q + 2 N. vbi valor eſt [illegible] igitur per hunc diuidendo vnitatem fiet [illegible] pro data æqualitate triplicatâ.

15 Aduerte compendioſe admodum procedi poſſe dum non datur idem, ſed alius numerus quadratorum quam vnitas, ſi intactis radicibus, reducatur quadratum ad vnitatem & poſtea valor inuentus diuidatur per quadratum datum: ut ſi detur 9 Q. + 9 N. 9 Q + 24 N. 9 Q + 72 N. intactis radicibus pto 9 Q ſubſtitue 1 Q vt vides 1 Q + 9 N. 1 Q + 24 N. 1 Q + 72 N. vbi valor eſt 3. quo diuiſo per quadratum 9 fit $\frac{1}{3}$

pro valore prioris æqualitatis, ſi eundem valorem 3. diuidas per 16 fiet valor [illegible] pro triplicata æqualitate ſequẽte 16 Q + 9 N. 16 Q + 24 N. 16 Q + 82 N. & ſic de aliis omnibus.

Per triplicatam æqualitatem ſoluuntur quadruplicatæ, quintuplicatæ & millecuplicatæ æqualitates.

Detur verbi gratia æqualitas quadruplicata ſequens 64 + 20 N. 16 + 12 N. 4 + 16
8 N. 1 + 2 N. reductis quadratis ad eundem quadratum vt dictum eſt, fit noua
æqualitas 64 + 20 N. 64 + 48 N. 64 + 128 N. pro 1 N cape − [illegible] + 1 N. vt iuxta il-
lam reſoluti duo numeri æquales faciant quadratum & fiet tandem per methodum
ſupra traditam, (præter 4 qui eſt obuius valor) 8320. qui ſoluet æqualitatem datam.
Non aliter diſponi poteſt quintuplicata æqualitas conſtans diuerſis quadratis & 17
radicibus, ita tamen, vt reducti quadrati ad eundem, faciant tres numeros æquales &
reliquos duos inæquales vti videre eſt in ſequente 1 + 2 N. 4 + 8 N 16 + 32 N. 64.
+ 20 N. 256 + 36 N. vbi valor eſt 4. & [illegible] hoc eodem modo diſponetur centu-
plicata æqualitas, & ita in infinitum.

Ex prædictis ſoluere infinities & quidem facile, quæ Diophantus & Bachetus per intricatiſſimas methodos ſoluunt.

Dentur æquandi quadrato 16 + 1 N & 16 + 2 N. pro 1 N. cape 1 Q + 8 N. vt hoc 18
modo primus numerus fiat quadratus indefinitè 16 + 1 Q + 8 N à latere 4 + 1 N.
ergo alter numerus erit 16 + 2 Q + 16 N. æquandus quadrato (fingi autem poteſt
latus infinities) finge 4 − 2 N. & fiet valor 16. cuius quadratum cum octuplo 16 (ob 1
Q + 8 N.) pro noua radice dat valorem quæſitum 384.
Dentur iterum 16 − 1 N & 16 − 5 N: æquandi quadrato, cape pro noua radice 8 19
N − 1 Q. & iuxta illam termini reſoluti ſic ſtabunt 16 + 1 Q − 8 N. & 16 + 5 Q − 40
N. quorum prior eſt quadratus, igitur ſolus poſterior æquandus quadrato, finge latus
4 − 7 N. & fit valor $\frac{4}{11}$ ergo eius octuplum mulctatum quadrato ipſius, (ob nouam ra-
dicem 8 N − 1 Q dat valorem quæſitum [illegible].
Rurſus, datis pro tertio caſu æquandis quadrato 16 + 1 N. & 16 − 1 N. cape 20
pro noua radice 1 Q + 8 N. vt primus terminus ſit 16 + 1 Q + 8 N. quadratus
igitur ſecundus terminus erit 16 − 1 Q − 8 N. æquandus quadrato, finge latus 4 − 2 N
& fit valor [illegible] cuius octuplum cum ipſius quadrato (ob nouam radicem 1 Q. + 8 N.)
dat valorem quæſitum [illegible].

Quæſtiones duodecim circa hactenus dicta in ſecunda parte.

Quot exempla dedimus, tot problemata præparauimus. Vnicum ex multis proferam, 21
quod eſt eiuſmodi. Inuenite alium numerum quam 24. cuius ſimplum duplum, &
quintuplum additum vnitati, faciat tres quadratos, ſolutionem huius quæſtionis ha-
bes ſupra ſub titulo ſolutionum infinitarum, eſtque numerus quæſitus fractio cuius

numerator 470956770729578397264. & denominator 216571905615699363961. imò ſi vis quæſtionem in integris proponi, ſic ſtabit: Inuenire alium quadratum integrum quam vnitatem cui additum ſimplum, duplum & quintuplum cuiuſpiam numeri integri faciat quadratos, ſed propter hoc, ſubnecto alia.

Inuenire tres cubos quorum ſumma juncta tribus numeris eandem cum cubis proportionem habentibus faciat quadratos.

22 Cape tres priores cubos 1. 8. 27. quorum ſumma 36. addatur ſigillatim cubis prædictis charactere radicum affectis, eruntque 36 + 1 N. 36 + 8 N & 36 + 27 N. æquandi quadrato, eligatur pro vna radice 1 Q + 12 N. vt prior numerus iuxta eam reſolutus, ſit quadratus à latere 6 + 1 N. abſolutâ operatione inuenietur valor radicis [illegible].

Inuenire alium numerum quam quaternarium cujus duplum, octuplum, duotrigecuplum, vigecuplum, & trigeſecuplum additum quinque quadratis continuè proportionalibus, faciat quadratos.

23 Eligantur quadrati ſequentes, & deuentum ſit ad æqualitatem quintuplicatam quæ ſic ſtat: 1 + 2 N. 4 + 8 N. 16 + 32 N. 64 + 20 N. 256 + 36 N. reducta illa ad eundem quadratum, erit æqualitas quæ ſequitur: 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 80 N. 256 + 36 N. vbi proinde eſt ac ſi daretur triplicata æqualitas, & ſit per methodum ſuperiorem, 1 N. æqualis [illegible] quæ ſoluet quintuplicatam æqualitatem primo inuentam.

Inuenire tres numeros quadratos quorum ſumma juncta ſigillatim tribus illorum lateribus faciat quadratos.

24 Eligantur tres quadrati, quorum ſumma ſit quadratus, & tales, vt maius latus ipſorum ſuperet reliqua duo latera: iſtiusmodi ſunt 4. 36. 81. hi enim ſimul additi faciunt 121. quare tres quæſiti numeri ſint 4 Q. 36 Q. 81 Q. quorum ſumma addita ſigillatim ipſorum lateribus facit 121 Q + 2 N. 121 Q + 6 N. 121 Q + 9 N. æquandos quadratis, & ſit valor radicis [illegible] iuxta quem reſoluti numeri ſuperiores exhibent quadratos & ſatisfaciunt quæſtioni.

Inuenire tres quadratos diuerſos, quorum ſingulis ſi addantur tres numeri harmonice proportionales, fiant quadrati.

Hoc curandum, vt maximus trium harmonice proportionalium ſuperet duos reli- 25
quos, quare tres termini 1 + 2 N. 4 + 3 N. & 16 + 6 N. æquantur quadrato, reductis illis per methodum ſuperiorem erunt 16 + 32 N. 16 + 12 N. 16 + 6 N. æquandi quadrato, cape pro vna radice $\frac{1Q}{6} + \frac{4N}{3}$ & abſolue operationem vt ſupra diximus & fiet valor pro priori æqualitate triplicata $\frac{505004}{4761}$.

Inuenire tres numeros vt interuallum duorum maiorum ad interuallum duorum minorum datam habeat ratioñe, ſed & bini ſumpti quadratum conſtituant. Detur ratio tripla.

Hæc eſt quæſtio quadrageſima quinta libri quarti Diophanti quâ nulla eſt pro- 26
lixior, & intricatior apud hunc authorem; cape aliquem quadratum pro ſumma medij & minoris, puta 4. ſitque medius 2 + 1 N & minor 2 − 1 N. horum differentia eſt 2 N. cuius triplum 6 N (quia datur ratio tripla) addatur medio & fiet major 2 + 7 N. quare ſupereſt vt ſumma maioris & medij 4 + 8 N. & ſumma maioris & minoris 4 + 6 N. æquetur quadrato pro vna radice, cape $\frac{1Q}{6} + \frac{2N}{3}$ vt hæc ducta in 6 (numerum radicum in poſteriori termino efficiat 1 Q + 4 N. qui cum 4 facit quadratum, à latere 2 + 1 N. hæc eadem radix noua ducta in 8. (numerum radicum in priori termino) facit productum qui additus 4. dat ſummam 4 + $\frac{4Q}{3} + \frac{16N}{3}$ æquandam quadrato: huius quadrati poteſt fingi latus infinitis modis. Finge à latere 2 + $\frac{5N}{4}$ & fit valor qui reſolutus per nouam radicem vt diximus dat valorem quæſitum $\frac{160}{121}$ & tres quæſiti numeri erunt $\frac{1362}{121}$ $\frac{402}{121}$ $\frac{82}{121}$.

Inuenire duos numeros quorum ſumma aucta vel multata differentia eorum aut differentia quadratorum ab illis, faciat quadratum.

Sint duo illi numeri $\frac{1}{2}$ + 1 N & $\frac{1}{2}$ − 1. ſic enim differentia numerorum, & differentia 27
quadratorum erit 2 N. igitur ſupereſt vt ſumma numerorum aucta & multata 2 N. æquetur quadraro, eritque ſequens duplicata æqualitas 1 + 2 N & 1 − 2 N. cape $\frac{1Q}{2}$ + 1 N pro noua radice vt hac ducta in 2. & producto addito vnitati, fiat quadratus 1 + 1 Q + 2 N. pro priore termino, igitur ſecundus terminus erit 1 − 1 Q − 2 N. æquandus quadrato, finge latus 1 − 3 N. & fiet valor primus $\frac{2}{5}$ pro poſterioribus terminis, hic additus dimidio ſui quadrati (ob nouam radicem ſumptam $\frac{1Q}{2}$ + 1 N.) dabit $\frac{12}{25}$ valorem quæſitum, ergo iuxta poſitiones duo numeri quæſiti erunt $\frac{49}{50}$ & $\frac{1}{50}$.

Inuenire quatuor numeros, quorum tria ſint quadrata, atque inſuper productus duorum quorumcumque auctus vnitate faciat quadratum.

28 Inueniendi primum ex Diophanto l. 5. Q. 27. tres quadrati quorum quilibet adſcita vnitate faciat quadratum: tales ſint $\frac{9}{16}$ $\frac{25}{4}$ $\frac{256}{81}$, ponatur quartus quæſitus 1 N. retentis illis tribus pro primo, ſecundo & tertio, certum eſt productum primi in ſecundum & ſecundi in tertium, & tertij in primum, fore quadratum, reſtat ergo, vt productus quarti in illos tres adſcita vnitate faciat quadratum igitur $\frac{9N}{16}+1$ & $\frac{25N}{4}+1$ & $\frac{256N}{81}+1$ æquantur quadratis, ponatur iuxta præceptum $\frac{16Q}{9}+\frac{32N}{9}$ pro valore 1 N. vt numerus radicum qui eſt in primo termino iſtum multiplicans faciat 1 Q + 2 N. qui cum vnitate conſtituat quadratum, à latere 1 + 1 N tum reliqui numeri radicum, qui ſunt in duobus aliis terminis ducantur in eundem, & producti nectantur cum vnitate, fientque $1+\frac{400Q}{36}+\frac{800N}{36}$ & $1+\frac{4096Q}{729}+\frac{8192N}{729}$ æquandi quadrato, ergo cum numeri vnitatum (imò & quadratorum ſint quadrati) poteſt ſolui duplicata illa æqualitas per methodum vulgarem, & inuenietur valor radicis pro quarto numero quæſito.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenuſa in ſummam laterum circa rectũ ſit quadratus, atque inſuper quadratum hypotenuſæ iunctum alterutri ex duobus lateribus circa rectum & duplo hypotenuſæ, faciat quadratum.

29 Cape triangulum rectangulum in quo tam hypotenuſa quam ſumma laterum circa rectum ſit quadratus: (vt dictum eſt in prima parte n. 45.) & necte ſingulis lateribus characterem radicum, ſic enim peruenies ad æquationem, & reperies quod quæritur. Enimuero productus ex hypotenuſa in ſummam laterum quadratus erit quare ſi quadratum hypotenuſæ nectas cum alterutro latere circa rectum, & cum duplo hypotenuſæ fiet triplicata æqualitas, quæ ſoluetur per ea quæ dicta ſunt num. 13.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri circa rectum, & dato multiplici hypotenuſæ faciat quadratum.

30 Eſto datus multiplex hypotenuſæ, duplus: & ponatur triangulum quæſitum 3 N. 4 N. 5 N. ergo 144 Q + 3 N. 144 Q + 4 N. & 144 Q + 10 N. æquantur quadrato. Hic valor radicis per ea quæ dicta ſunt ſupra num. 13. eſt [illegible] igitur triangulum rectangulum quæſitum erit [illegible] [illegible] [illegible]

Inuenire

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenuſa in differentiam laterum circa rectum ſit quadratus,& quadratus perimetri iuncti alterutri laterum circa rectum , vel dato multiplici hypotenuſæ faciat quadratum. Eſto datus multiplex duplus.

Cape pro triangulo primitiuo 119. 120. 169. in quo hypotenuſa & differentia late- 31
rum circa rectum eſt quadratus : hos numeros necte characteri radicum, & fiet ſumma 408. N. ergo eius quadratus iunctus cuilibet lateri circa rectum & duplo hypotenuſæ dat tres numeros 166464 Q. + 119 N. 166464 Q + 120 N. 166464 Q + 338 N. æquandos quadrato,reliqua ſunt facilia ex num. 13.

Inuenire triangulum cuius vnum latus circa rectum ſi ducatur in differentiam eiuſdem lateris & areæ faciat quadratum & quadratus perimetri iunctus alterutri circa rectum & dato multiplici hypotenuſæ faciat quadratum.

Capiatur ex prima parte num. 53. triangulum rectangulum in quo vnum latus circa 32
rectum eſt vnitas, & differentia illius vnitatis & area ſit quadratus,tum perimetri capiatur quadratus & nectatur ſingulis lateribus circa rectum affectis charactere radicum & cuilibet multiplici hypotenuſæ, efficieturque problema propoſitum ex dictis num. 13.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſi ducatur in ſummam laterum efficiatur quadratus & quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri ex tribus faciat quadratum.

Capiatur aliquod triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum & ſumma 33
laterum ſit quadratus numerus, tale eſt 40. 9. 41. tum ſingula latera affecta charactere radicum nectantur quadrato perimetri & tres numeri 8100 Q + 40 N. 8100 Q. + 9 N. 8100 Q + 41 N. æquentur quadratis, eritque abſolutum problema , neque dicas id repugnare iis quæ dicta ſunt num. 9. & ſequentibus vbi aſſeruimus quæſtiones eſſe impoſſibiles per artem Fermatianam dum maior numerus radicum æqualis eſt duobus alijs radicum numeris, vnde fortaſſe videbitur alicui multo magis repugnare dum numerus maior ſuperatur à duobus alijs ſimul ſumptis: illud enim in quocumque caſu inæqualitatis non eſt impoſſibile, vt laborioſo analyſtæ planum fiet.

PARS TERTIA.

Complectens artem eliciendi radices infinitas ex numeris plures ſpecies habentibus, quam tres.

1 AGam hic potiſſimum de numeris continentibus quinque ſpecies quæ vocantur quadrato-quadrata, cubi, quadrata, radices, & vnitates & occaſione illorum, dicam quoque de quatuor ſpeciebus, ſiue habeant vbique ſigna poſitiua, ſiue etiam habeant intermixta negatiua: finis autem huius tractationis eſt æquare eiuſmodi numeros vel quadratis vel cubis, idque infinities: illud vero in vniuerſum dici poteſt eſſe neceſſarium, vt ſaltem vel quadratoquadratorum, vel vnitatum numerus ſit quadratus pro radice quadratâ, ſicut etiam neceſſe eſt vt cuborum vel vnitatum numerus ſit cubus, pro radice cubicâ.

Quadrato æquare numerum compoſitum ex quinque ſpeciebus in quo ſolus quadratoquadratorum numerus eſt quadratus.

2 Curandum in primis vt tam in numero æquando quam in æquante ſit idem numerus quadratoquadratorum, cuborum, & quadratorum: quod vt fiat, capietur primo latus quadratum numeri quadrato-quadratorum, vt ſit vna particula lateris quæſiti: deinde per illius duplum diuidetur numerus cuborum qui eſt in numero æquando, & quoties affectus charactere radicum, erit ſecunda particula lateris quæſiti: tertio capta differentia quadrati quod naſcitur ex iſtâ ſecundâ particulâ, & quadratorum in numero æquando exiſtentium, diuidetur per idem duplum lateris ſupradicti, vt habeatur tertia particula ex vnitatibus conſtans. Huius lateris quadratum in numero dato æquatum dabit radicem quæſitam: Vt ſi detur numerus 1 QQ + 4 C + 6 Q + 2 N + 7 æquandus quadrato, capies 1 Q + 2 N + 1 (ſic enim obſeruantur omnia præcepta mox tradita) & huius lateris quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquarum numero dato exhibebit 3 pro valore radicis, juxta quam reſolutus numerus datus efficiet quadratum 256.

Quadrato æquare numerum quinque ſpeciebus conſtantem, in quo ſolus vnitatum numerus eſt quadratus.

3 Aduerte hic contra fieri ac in præcedente, nam id curandum præcipuè, vt æquales ſint inter ſe vtrinque vnitates, radices & quadrati, quare capies latus quadratum

numeri vnitatum, pro prima particula lateris, & per eius duplum diuides numerum radicum quotienſque erit ſecunda particula lateris; cum differentia quadratorum numeri æquandi, & eorum qui naſcuntur ex radice mox inuenta, diuidatur per idem duplum latus, vt fiat numerus quadratorum in æquante ponendus, ſic conficietur latus quadrati, quod ſi æquetur numero dato, exhibebit valorem radicis. Vt ſi detur numerus 10 QQ + 4 C + 19 Q + 6 N + 9 æquandus quadrato finges latus 3 + 1 N + 3 Q (ſic enim omnia præcepta mox tradita obſeruantur) & eius quadratum 9 + 6 N. + 19 Q + 6 C + 10 QQ æquabis numero dato fietque valor 2. iuxta quem reſolutus ille numerus exhibebit 289.

Multipliciter æquare quadrato numerum ex quinque ſpeciebus compoſitum in quo tam quadratoquadrata quam vnitates habent numerum quadratum.

Primo fingi poteſt latus tale vt vtrinque in numeris æquandis reperiantur vnitates radices & quadrato-quadrata æqualia: vt ſi detur æquandus quadrato 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N. + 1. finge latus 1 + 10 N + 1 Q huius quadratum eſt 1 + 20 N + 102 Q + 20 C + 1 QQ ergo cum tres ſpecies ſe elidant reſtabit æquatio inter − 924 & 16 C. diuides − 92 per 16. & fiet pro valore radicis $\frac{23}{4}$ iuxta quem reſolutus datus numerus dabit quadratum [illegible] 4

Secundo fingi poteſt latus tale, vt reperiantur vtrinque æquales vnitates radices & quadrati: vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 + 10 N − 45 Q. cuius quadratum æquatum numero dato relinquet cubos & quadrato-quadratos, ergo cum ſint ſpecies collaterales & proximæ fiet valor radicis [illegible] iuxta quem datus numerus quadratus erit à latere [illegible]. 5

Tertio fingi poteſt latus tale, vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates, æquales vtrinque reperiantur: Vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 1. & eius quadratum relinquet quadrata & radices ad æquationem, fietque − 4. pro valore radicis iuxta quem reſolutus qui datus eſt numerus exhibebit quadratum 81. 6

Quarto fingi poteſt latus tale, vt quadratoquadrati, cubi & quadrati vtrinque ſint æquales: vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 3. & ex punctis æqualibus reſtabunt radices & vnitates inter ſe æquandæ, & fiet tandem poſt diuiſionem 1. primo valore radicis reſolutuſque iuxta eum numerus datus exhibebit quadratum 36. 7

Quinto fingi poteſt aliud latus ab eo quod ſupra fictum eſt ita vt vnitates radices & quadrato-quadrati vtrinque reperiantur æquales: Vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges 1 + 10 N − 1 Q & fiet valor radicis [illegible] iuxta quem datus numerus erit quadratus à latere [illegible]. 8

Sexto fingi poteſt latus aliud ab eo quod ſupra fictum eſt ita vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates ſint æquales: vt dato eodem numero 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 finges 1 Q + 2 N − 1 & continget valor radicis − 3 iuxta quem reſolutus ſuperior numerus exhibebit quadratum 40. 9

Omitto reliqua latera quæ fingi poſſunt, vt 1 Q − 3 & 1 − 2 N 1 Q & 1 − 10 N − 1 Q & 45 Q − 10 N − 1 & − 1 − 2 N − 1 Q. quia licet dent aliquos valores, illi tamen non differunt ab iis, quos exhibuimus. 10

Quid ſint radices deriuatiuæ & quomodo eruantur.

11 Duplex eſt genus radicum: aliæ enim ſunt primitiuæ aliæ verò deriuatiuæ: primitiuæ ſunt illæ quæ immediatè eruuntur ex numero dato, vt ſunt illæ quas mox elicuimus: deriuatiuæ autem ſunt illæ quæ ex primitiuis oriuntur: & quidem ſi ex primitiuis immediatè oriuntur, ſunt deriuatiuæ primi gradus: ſi eliciũtur ex deriuatiuis primi gradus, erunt deriuatiuæ ſecundi gradus: ſi eliciuntur ex deriuatiuis ſecundi gradus, dicentur deriuatiuæ tertij gradus, & ſic in infinitum. Aduerte autem ex radicibus fictis poſſe elici veras, & ex veris fictas, vti ex ſequentibus manifeſtum erit.

Eruere radices deriuatiuas primi gradus ex quacumque primitiua.

12 Iunge 1 N. radici primitiuæ cum ſuo ſigno, ſiue habeat plus, ſiue habeat minus, illud conflatum ſumatur pro radice noua & iuxta illam reſoluantur ſingulæ particulæ componentes numerum datum: omnium illorum ſumma æquetur quadrato fingendo illius latus, vt dictum eſt valorque repertus nectatur radici primitiuæ, ita extabit radix quæſita, vt ſi eruenda ſit radix deriuatiua primi gradus ex numero ſupradicto 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. cape − 3 vnam ex primitiuis radicibus, & necte cum 1 N. vt fiat 1 N − 3. tùm iuxta 1 N − 3 reſolues 1 QQ & 4 C. & 10 Q. & 20 N. quibus nectes numerum vnitatum vt hic vides.

1 QQ	+ 1 QQ − 12 C + 54 Q − 108 N + 81
4 C	+ 4 C − 36 Q + 108 N − 108
10 Q	+ 10 Q − 60 N + 90
20 N	20 N − 60
1	+ 1
ſumma	+ 1 QQ − 8 C + 28 Q − 40 N + 4

13 Hæc ſumma æquari debet quadrato: finge latus 1 Q − 4 N − 2 & fiet pro valore radicis in iſta ſumma $\frac{7}{2}$ & quia poſita eſt noua radix 1 N. − 3 ex $\frac{7}{2}$ tolles 3. reſtabitque $\frac{1}{2}$ pro valore radicis in numero dato, quare iuxta iſtam reſolutus numerus datus erit $\frac{225}{16}$ quadratus à latere $\frac{15}{4}$.

14 Eandem ſummam quadrato æquabis fingendo latus 1 Q − 10 N + 2. eius enim quadratum æquatum prædictæ ſummæ, dabit $\frac{19}{3}$ pro valore radicis in ſumma, vnde ſi tollas 3. reſtabit $\frac{10}{3}$ pro valore radicis in numero dato, ergo numerus datus erit $\frac{36481}{81}$ quadratus à latere $\frac{191}{9}$.

15 Rurſus finge latus 2 − 10 N − 1 Q & fiet valor pro ſumma − $\frac{17}{7}$ & tollendo 3 extabit valor radicis pro numero dato − $\frac{38}{7}$ igitur iuxta hunc valorem reſolutus numerus datus exhibebit $\frac{998001}{2401}$. quadratus à latere $\frac{999}{49}$.

16 Quarto finge latus 2 − 10 N − 18 Q & fiet valor $\frac{368}{323}$ pro ſumma, vnde ſi tollas 3. fit valor pro numero dato $\frac{1337}{323}$.

Poſſet etiam fingi latus 1 Q + 2 − 4 N vel 4 N − 2 − 1 Q. ſed vtrinque ex illa æquatione proueniret 3 pro ſumma prædicta & pro numero dato proueniret, 0, quod eſt friuolum, & ad inſtitutum noſtrum inutile.

Dixi præterea vnam ex radicibus primitiuis eſſe − 4. ex hac ſic erues deriuatiuas reſolues primo numerum datum 1 QQ + 4 C + 10 9 + 20 N + 1 iuxta nouam radicem 1 N − 4. vt factum eſt primitus in reſolutione eiuſdem numeri iuxta radicem 1 N − 3 & fiet ſumma QQ − 12 C + 58 Q − 124 N + 81 æquanda quadrato finge latus 1 Q + 9 − 6 N & fiet valor pro numero dato [illegible]. Finge aliud latus 1 Q + 9 − [illegible] & fiet valor [illegible]. Finge tertium latus 9 − [illegible] + [illegible] & fiet valor [illegible]. iterum finge latus 9 − [illegible] − 1 Q & fiet valor − [illegible] potuit rurſus fingi latus 1 Q + 9 − 6 N. vel 6 N − 9 − 1 Q. ſed inde fieret valor pro ſumma facta 4. & pro numero dato, 0. quod eſt inutile ad rem noſtram. 17

Dictum eſt inſuper vnam ex radicibus primitiuis numeri dati eſſe − $\frac{23}{4}$ igitur noua radix erit 1 N − $\frac{23}{4}$ iuxta quam reſolutus numerus datus, vt fecimus ſupra dabit ſummam 1 QQ − 19 C + [illegible] [illegible] + [illegible]. æquandam quadrato. Finge latus 1 Q − [illegible] − $\frac{19N}{2}$ & fiet valor [illegible]. ex alio latere 1 Q + [illegible] [illegible] prodibit valor [illegible] ex ficto latere 1 Q + [illegible] − [illegible]. prodit valor [illegible]. Iterum prodibit alius valor ex ficto latere [illegible] − [illegible] + [illegible]. 18

Atque hoc quidem de radicibus primitiuis quæ habent ſignum minus; eodem autem modo agendum de iis quæ habent ſignum plus; vt quia diximus 1 eſſe vnam radicem primitiuam, fingenda erit noua radix 1 N + 1. & iuxta illam reſoluendus numerus datus, habebiturque ſumma æquanda quadrato 1 QQ + 8 C + 28 Q + 56 N. + 36. finge latus 1 Q + 6 + $\frac{14N}{3}$. & prodibit valor − [illegible]. finge aliud latus 1 Q − 6 − [illegible]. & fiet valor − [illegible]. tertio ſi fingas latus 6 + [illegible] + [illegible] extabit valor [illegible]. 19

Rurſus vna ex primitiuis radicibus eſt [illegible]. igitur ſi capias pro noua radice 1 N + [illegible]. & juxta eam reſoluas numerum datum vt dictum eſt n. 12. fiet ſumma 1 QQ + [illegible] + [illegible] + [illegible] + [illegible] æquanda quadrato Finge latus 1 Q + [illegible] + [illegible] & fiet valor [illegible] finge aliud latus [illegible] − [illegible] − 1 QQ & fiet valor [illegible] finge aliud latus 1 Q + [illegible] + [illegible] & fiet valor 1. finge aliud latus [illegible] + [illegible] − 1 Q. & fit valor [illegible] 20

Pari modo ex vltima radice primitiua habente ſignum plus, fiet noua radix 1 N + [illegible]. ſecundum quam reſolutæ particulæ numeri dati exhibebunt ſummam æquandam quadrato, & fingendo diuerſa latera vt hactenus factum eſt habebuntur noui valores. 21

Eruere radices deriuatiuas ſecundi gradus & tertij & quarti, & ſic in infinitum.

Sicut ex radicibus primitiuis elicuimus deriuatiuas primi gradus ita ex deriuatiuis primi gradus elici poſſunt deriuatiuæ ſecundi, vt quia vna ex deriuatiuis primi gradus eſt [illegible]. capienda erit noua radix 1 N + $\frac{1}{2}$ & juxta eam reſoluendus numerus datus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 ſumma ex hac reſolutione nata 1 QQ + 6 C + [illegible] + [illegible] + [illegible] æquanda eſt quadrato, finge latus 1 Q + 3 N + [illegible] eritque radix deriuatiua ſecundi gradus quia naſcitur ex radice deriuatiua primi gradus. 22

Non aliter ex iſta poteris eruere aliam ponendo pro noua radice 1 N − [illegible] ſiquidem iuxta eam reſolutæ ſingulæ particulæ numeri dati faciunt 1 QQ − 38 C + [illegible] − [illegible] + [illegible] hæc ſumma æquanda erit quadrato. Finge latus 1 Q − 19 N − [illegible] & fiet valor pro ſumma [illegible] vnde ſi tollas [illegible]. relinquetur valor pro numero dato [illegible] eſtque radix deriuatiua tertij gradus quia prodit ex radice deriuatiua gradus ſecundi. Ita poteris elicere radicem deriuatiuam gradus quarti, quinti, ſexti, & ſic in infinitum. 23

Quadrato æquare numerum compoſitum ex quatuor ſpeciebus, dum numerus vnitatum vel quadrato-quadratorum, quadratus eſt.

24 Sint 20 C + 5 Q + 40 N. + 16 æquandi quadrato. Finge latus 4 + 5 N. & numerus radicum & vnitatum idem fiat ex vtraque parte, & fiet 1 pro valore radicis: hoc poſito inuenies radicem deriuatiuam, ponendo vt ſupra, pro noua radice 1 N + 1 & iuxta illam reſoluendo numerum primarium 20 C + 40 N + 16. vt ſæpius factum eſt, ſumma enim ex hac reſolutione nata 20 C + 65 Q + 110. N + 81 æquari debet quadrato, fingendo latus 9 + $\frac{55 N}{9}$ & fiet valor pro ſumma − $\frac{112}{81}$ & pro numero primario − $\frac{31}{81}$. tertio ex hac deriuatiua primi gradus perges ad deriuatiuam ſecundi gradus fingendo pro noua radice 1 N. − $\frac{31}{81}$ & juxta illam reſoluendo ſingulas particulas numeri primarij, ita enim fiet noua ſumma æquanda quadrato, & finges latus quadrati [illegible] − [illegible] & proueniet radix deriuatiua ſecundi gradus + [illegible].

25 Eſto jam numerus quadrato-quadratorum quadratus, & ſic æquandum quadraro 1 QQ + 4 C − 3 Q + 2 N. finge latus 1 Q + 2 N. vt duo majores characteres elidantur & fiant 7 Q. æquales 2 N. ita fiet valor $\frac{2}{7}$ (propter vnitatem quæ eſt altera radix eiuſdem numeri) ergo poteſt poni noua radix 1 N + $\frac{2}{7}$ vel 1 N + 1 pro radicibus deriuatiuis.

25 Tertio licet omittatur aliqua ſpecies intermedia, poteſt numerus compoſitus ex quatuor ſpeciebus quadrato æquari: ita æquabis 16 + 24 N + 16 C + 5 QQ fingendo latus 4 + 3 Q. & fiet valor 4. Vnde pro deriuatiua poterit poni 1 N + 4 ſimili ratione ſi detur 1 QQ + 600. + 800 N + 50000. finges latus quadrati 1 Q + 300 extabitque valor 5. & poni poterit pro radice deriuatiua 1 N + 5.

Poteſt æquari cubo numerus compoſitus ex quatuor ſpeciebus modo numerus vnitatum vel cuborum ſit cubus.

26 Enimuero ſi vnitatum numerus cubus eſt ſumpto eius latere cubico pro numero abſoluto radicis fictæ, diuides radices quæ ſunt in termino æquando per triplum quadratum prædicti lateris cubici & ita componetur radix ficta ex latere & quotiente prædicto cum ſignis debitis: vt ſi detur æquandus quadrato 2 C. + 1 Q + 3 N + 1. finges pro latere 1 + 1 N (eſt enim 1 latus cubicum vnitatis, 1 N. autem eſt quotiens natus ex diuiſione 3 N. per 3. triplum quadratum vnitatis) ergo cubus illius 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatus numero dato, exhibet 2 pro valore radicis vnde per radicem deriuatiuam poteris aſſumere 1 N. + 2. pro noua radice.

27 Quod ſi numerus cuborum eſt ſumpto eius latere diuides numerum quadratorum per triplum quadratum illius lateris & fiet altera pars eligenda: vt ſi detur æquandus cubo 8 C + 24 Q + 2 N + 48. finges latus 2 N + 2 (eſt enim 2 N latus cubicum 8 C. 2 vero eſt quotiens ortus ex diuiſione 24 per 12 triplum quadratum numeri 2.) eius cubus 8 C + 24 Q + 24 N. + 8. æquatus dato numero exhibet $\frac{20}{11}$ pro valore radicis, vnde facile eſt colligere radices deriuatiuas.

Si vterque numerus tam vnitatum quam cuborum cubus eſt, poteſt triplici modo æquari cubo numerus datus.

Detur enim verbi gratia 1 C + 2 Q + 4 N. 1 æquandus cubo & capiatur 1 N + 1 pro latere; hoc eſt latus cubicum vtriuſque cubi; ergo eius cubus 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatur numero dato, & fit 1 pro valore, rurſus poteſt ſumi pro latere 1 N + $\frac{2}{3}$ vt elidantur duæ ſpecies maiores reſtentque tantum minores inter ſe æquandæ, & ſic habebitur valor $-\frac{19}{72}$. denique ſumi poteſt 1 + $\frac{4N}{3}$. vt reſtet tantum æqualitas facienda inter maiores ſpecies atque ita extabit valor $-\frac{90}{37}$ ex his porro tribus radicibus primitiuis eliciantur deriuatiuæ, vt ſæpius factitatum eſt. 29

Cautio circa prædicta.

Aliquando contingit vt numerus compoſitus ex quatuor ſpeciebus, quarum vna eſt cubus, vel duæ ſunt cubi, non poſſit cubo æquari, cum poſt reductionem relinquuntur tres ſpecies æquandæ inter ſe vel dum reſtat vnica ſpecies æquanda nihilo: vt ſi detur 1 + 3 N + 3 Q + 4 C non poteſt in eo caſu aliter procedi quam ſi fingatur latus 1 + 1 N. at in iſto caſu relinquuntur 3 C æquales nihilo: igitur tunc non poteſt numerus datus æquari cubo. Item ſi detur 1 + 2 Q + 3 N + 1 C. inueniri tantum poteſt vna radix immediatè & primitus, ponendo pro latere ficto 1 N + $\frac{2}{3}$ nam ſi poneretur 1 N. + 1 reſtaret 1 Q æquale nihilo. Propter aliquam ex his rationibus non poſſunt æquari cubo numeri ſequentes 1 − 3 Q − 3 N − 1 C 1 − 3 Q + 3 N + 1 C. vnica enim ſpecies reſtaret nihilo æqualis. 30

Quæſtiones duodecim circa ea quæ dicta ſunt in hac tertia parte.

Quæ hactenus dicta ſunt, vberem præbent materiam ex qua tanquam ex auri fodina eruere poſſis Theſaurum infinitum problematum: vt ſi quis poſtulet numerum, cuius vigecuplum additum decem ipſius quadratis & quatuor ipſius cubis, & vni ipſius quadrato-quadrato atque inſuper vnitati faciat quadratum, velit autem numerum poſtulatum majorem eſſe octonario & denario minorem, oportebit neceſſario elicere primum radicem primitiuam − 3. & ex illa deriuatiuam primi gradus + $\frac{1}{2}$ inde deriuatiuam ſecundi gradus − [illegible] atque ex hac deriuatiuam tertij gradus [illegible] quæ ſatisfacit omnibus poſtulatis in problemate, vt iam ſupra eſt oſtenſum num. 23. ſed lubet alias quæſtiones ſoluere. 31

Inuenire in numeris rationalibus integris triangulum rectangulum, cuius hypotenuſa & ſumma laterum circa rectum ſit numerus quadratus.

Iam ſolutum eſt illud problema im prima parte num. 45. per duplicatas æqualitates, 32

ſed quia ſolui poteſt per numerum ex quinque ſpeciebus compoſitum lubet etiam illud aggredi. Formo triangulum ex 1 N + 5 & 12. per ea quæ dicta ſunt loco citato : igitur latera ſunt 1 Q + 10 N + 169. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120, hypotenuſa ergo 1 Q + 10 N. + 169. & ſumma laterum 1 Q + 34 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 + [illegible] − 1 Q. & fiet valor [illegible]. & iuxta poſitiones trianguli quæſiti latera 1061652293520. 4565486027761. 4687298610289. eadem cum ſuperioribus.

Inuenire triangulum rectangulum ita vt ſumma hypotenuſæ & alterius lateris circa rectum relinquens aream faciat datum numerum.

33 Eſto datus 4 ac primum inueniatur triangulum rectangulum ita vt quadratus ſemiſſis ſummæ ex hypotenuſa & vno latere relinquens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum iſtud rectangulum ab 1 N + 1 & 1 N. ergo latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q + 2 N. ſumma hypotenuſæ & lateris ſequentis eſt 2 Q + 2 + 4 N. huius ſemiſſis 1 Q + 1 + 2 N. cuius quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1. relinquens quadruplam aream 8 C + 12 Q + 4 N. facit 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 1 − 2 N & fit quadratus 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1 qui æquatus 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 dat valorem $\frac{1}{3}$. ergo iuxta poſitiones, numeri duo à quibus formabitur triangulum, erunt $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{3}$ & ſumendo ſolos numeratores 4 & 1. inde formabis triangulum 17. 15. 8. his necte characterem radicum vt fiant latera trianguli quæſiti 17 N. 15 N. 8 N. ergo 32 N − 60 Q æquatur 4 & fiet 1 N $\frac{1}{5}$. & trianguli quæſiti latera tria $\frac{17}{5}$ $\frac{15}{5}$ $\frac{8}{5}$ & ſatisfaciunt quæſtioni. Hanc quæſtionem omiſit Diophantus poſt 10 & 11. libri 6.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui iunctus dato multiplici alterius lateris circa rectum facit quadratum.

34 Iubeatur numerum quadratum triplo alterius lateris iunctum facere quadratum & formetur triangulum ab 1 + 1 N & 1 latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. triplum poſtremi iſtius lateris eſt 6 + 6 N. cui ſi addas medium latus fiet ſumma 1 Q + 8 N + 6. æquanda quadrato, ſicut etiam medium latus quadrato æquandum eſt, duc ſummam illam 1 Q + 8 N. + 6 in medium latus 1 Q + 2 N & fiet productus 1 QQ + 10 C + 22 Q + 12 N. æquandus quadrato, finge latus 1 Q + 5 N − $\frac{1}{2}$ ergo eius quadratum 1 QQ + 10 C + 22 Q − 15 N + $\frac{1}{4}$ illi æquatum dabit [illegible] pro valore radicis, & iuxta poſitiones fiet triangulum quæſitum in integris 313. 25. 312. potuit inueniri ſolutio per duplam æqualitatem inter 1 Q + 8 N + 6 & 1 Q + 2 N.

Inuenire

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui múltatus dato multiplici alterius circa rectum relinquat quadratum.

Iam dedimus ſolutionem iſtius problematis 1 p. n. 47. ſed per aliam methodum. Ergo jubeatur numerum quadratum multatum triplo alterius relinquere quadratum & capiatur pro triangulo primitiuo, illud quod mox inuentum eſt in quæſtione præcedenti nempe 313. 25. 312. quod formatur ab 13. & 12. formeturque triangulum quæſitum ab 1 N − 13 & 12 erunt latera 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. ergo huius poſtremi triplum ſubtractum ex medio relinquit 1 Q + 961 − 98 N æquandum quadrato, ſed medium latus 1 Q − 26 N. + 25 eſt æquandum quadrato. Igitur horum duorum productus 1 QQ − 124 C + 3534 Q − 27436 N + 24025. æquandus erit quadrato, finge latus 1 Q − [illegible] + 155 huius quadratum priori numero eſt æquandum & fit valor [illegible] ergo 1 N 13 & 12 relicto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex his formatum triangulum erit illud quod poſtulatur 568864871005841. 539673367418641. 179888634210480. & ſatisfacit quæſtioni. 35

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri lateri faciat etiam quadratum. Multiplex ſit duplus.

Pone 1 + 1 N & 1 pro numeris vnde formatur triangulum: Ita enim latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. ergo 1 Q 2 + 2 N. erit quadratum & reſiduum dupli lateris poſtremi ex medio ſubtracti nempe 1 Q − 4 − 2 N. erit iterum quadratum & fit ex iſta duplicatá æqualitate valor − [illegible] ergo 1 N + & 1 erunt − [illegible] [illegible] & acceptis numeratoribus ſolis habebis − 5 & 12. vnde formatur triangulum primitiuum 169 119. 120. quare iteranda erit operatio & ponendi numeri ex quibus formatur triangulum 1 N − 5 & 12. ergo latera erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10 N − 119. 24 N − 120 ac proinde ſi duplum poſtremi lateris 48 N − 240 tollatur a medio, erit reſiduum 1 Q + 121 − 58 N æquandum quadrato, ſicut & hypotenuſa 1 Q + 169 − 10 N. horum duorum productus 1 QQ − 68 C + 870 Q − 11012 N + 20449 eſt æquandus quadrato, finge latus 143 − [illegible] + 1 Q & fit valor [illegible]. Verum lubet etiam alia via rem aggredi, reducantur illi duo termini ad eundem vnitatum quadratum & fient [illegible] + 169 − [illegible] & 1 Q + 16 Q − 10 æquandi quadratis. Differentia illorum eſt [illegible] − [illegible]. duo producentes eligantur [illegible] & [illegible] − [illegible] (per ea quæ dicta ſunt in prima parte num. 21. & ſequentibus) & fiet valor [illegible]. & iuxta poſitiones, triangulum quæſitum erit in integris 193430461133329. 187324186879921. 48218174004 00. 36

Inuenire duos numeros quorum ſumma ducta in ſummam quadratorum ab ipſis ortorum, faciat cubum.

37 Sint duo numeri quæſiti 1 N & 2 − 1 N. ergo ſumma 2 ducta in ſummam quadratorum 2 Q + 4 − 4 N facit 4 Q + 8 − N. æquandum cubo. Finge latus cubi $2 - \frac{2N}{3}$ eius cubus æquatus 4 Q + 8 − 8 N dabit $-\frac{9}{2}$. quare pono rurſus pro nouá radice 1 N − $\frac{9}{2}$ iuxta quam reſoluo ſingulas particulas numeri ſuperioris 4 Q + 8 − 8 N & fit nouus terminus 4 Q + 125 − 44 N æquandus cubo. Finge latus cubi $5 - \frac{44N}{75}$. ergo eius cubus 125 − 44 N + $\frac{29040}{5625}$Q − $\frac{85184}{421875}$C. æquandus eſt 4 Q + 125 − 44 N. & valor extat $\frac{490500}{85184}$ vnde ſi tollas $\frac{9}{2}$ ob nouam radicem 1 N − $\frac{9}{2}$ habebis valorem pro primis poſitionibus $\frac{26793}{21296}$ hunc tolle à 2 iuxta poſitiones & fiet ſecundus numerus quæſitus $\frac{15799}{21296}$. Aduerte primo ſolos numeratores ſoluere quæſtionem nempe *26793*. & *15799*. Aduerte ſecundo hinc ſolui problema ſequens. Diuidere numerum 2. in duos taliter vt ſumma quadratorum duplicata ſit cubus. Aduerte tertio indidem ſolui aliam quæſtionem, nempe inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum per quemcumque numerum multiplicata fiat cubus, vt ſi cuperes ſummam quadratorum quintuplicatam facere cubum poneres 1 N. & 5 − 1 N & procederes vt ſupra: Aduerte denique hinc ſolui pulcherrimum problema nempe. Inuenire duos numeros quorum differentiæ ſit æqualis differentia quadratoquadratorum: nam ſi capias duos numeros ſupra inuentos *26793* & *15799*. & iis ſupponas pro denominatore communi, latus cubi facti ex ſumma eorum in ſummam quadratorum quod quidem latus eſt *34540* fient duo numeri quæſiti, $\frac{26793}{34540}$ $\frac{15799}{34540}$.

Inuenire duo triangula rectangula quæ habeant eandem differentiam minorum laterum & talia vt in vno eorum maius latus circa rectum æquetur hypotenuſæ alterius.

38 Formetur primum triangulum ab 1 N & 1 latera ſunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. ergo ſecundi trianguli maius latus circa rectum erit 1 Q + 1 inde ſi tollas differentiam duorum minorum laterum primi, quæ eſt 1 Q − 1 − 2 N. fiet minus latus circa rectum ſecundi 2 N + 2, reſtat igitur vt duo quadrata quæ naſcuntur ab 1 Q + 1 & 2 N + 2 ſimul iuncta faciant quadratum. Horum ergo ſumma 1 QQ + 6 Q + 8 N + 5. æquanda eſt quadrato. Finge latus 1 Q + 3. igitur quadratum illius lateris 1 QQ + 6 Q + 6 æquatur 1 QQ + 6 Q + 8 N + 5 & fit 1 N. æqualis $\frac{1}{8}$ & iuxta poſitiones numeri à quibus formatur triangulum, in integris, abjecto videlicet denominatore, ſunt 1 & 2. at primus numerus minor eſt ſecundo. Proinde in formatione trianguli occurrerent numeri ficti, quod eſt abſurdum, quare vt huic incommodo remedium adferamus redintegranda eſt operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2, igitur latera erunt 1 Q + 5 + 2 N. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. pro primo triangulo: & pro ſecundo latere minore erunt 1 Q + 2 N + 5 & 4 N + 12. horum duorum quadrata ſimul juncta faciunt ſummam 1 QQ + 4 C + 30 Q + 116 N + 169. æquandam quadrato, huius quadrati latus fingi poteſt multipliciter, finge illud 10 + $\frac{18N}{11}$ − 1 Q eius quadratum priori ſummæ æquatum dat pro valore radicis − $\frac{1531}{418}$ ergo numeri a quibus formatum eſt triangulum, juxta poſitiones, in integris abjecto denominatore erunt − *979* &

1092. vtere iis numeris per inde ac ſi nullus eſſet fictus & forma triangulum ab 1092 & 979, fientque duo triangula quæſita 2150905. 2138136. 234023. & 2165017. 2150905. 246792. & ſatisfaciunt quæſtioni.

Inuenire duo triangula rectangula in quorum vtroque ſumma laterum circa rectum ſit æqualis & talia vt hypotenuſa vnius ſit æqualis maiori lateri circa rectum alterius.

Formetur primum triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo hypotenuſa 1 Q + 2 + 2 N. erit maius latus ſecundi trianguli quo ſublato ex ſumma laterum circa rectum primi reſtabit 2 N pro altero latere circa rectum ſecundi. Igitur horum duorum laterum quadrata ſimul ſumpta 1 QQ + 4 C + 124 + 8 N + 4 æquantur quadrato. Finge latus 14 + 2 N + 4 & eius quadratum 1 QQ + 4 C + 12 Q + 16 N + 16 æquetur priori fietque valor radicis $-\frac{3}{2}$. & cape ergo pro noua radice 1 N $-\frac{3}{2}$ & iuxta illam reſolue ſingulas particulas numeri prædicti 1 QQ + 4 C + 12 Q + 8 N + 4. fietque nouus terminus 1 QQ − 2 C + $\frac{15Q}{2}$ − $\frac{29N}{2}$ + $\frac{169}{16}$ æquandus quadrato, finge latus $\frac{13}{4}$ − $\frac{29N}{13}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{21}{13}$ pro iſto nouo termino, vnde ſi tollas $\frac{3}{2}$ fiet valor pro primis poſitionibus $\frac{3}{26}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris, abiecto denominatore erunt 29 & 26. à quibus formabis triangulum primum quæſitum 1517. 165. 1508. & inde naſcetur ſecundum 1525. 1517. 156. Aliter ex $-\frac{3}{2}$ ſupra inuentis potuit inueniri ſolutio applicando illam radicem 1 N + 1 & 1. ita enim in integris fient 1 & 2 quare ponendi ſunt numeri formantes triangulum 1 N − 1 & 2 & redintegranda operatio, ita enim latera primi trianguli erunt 1 Q + 5 − 2 N. 1 Q − 3 − 2 N. 4 N − 4. & latera circa rectum ſecundi 1 Q + 5 − 2 N & 4 N. − 12. horum quadrata ſimul addita 1 QQ − 4 C + 30 Q 116 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 − $\frac{58N}{13}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{42}{13}$. ergo 1 N − 1 & 2 in integris erunt 29 & 26 vt ſupra, vnde formabuntur eadem triangula. 39

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum additus alteri lateri faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum quæſitum ab 1 N & 1 latera ſunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. duplum poſterioris lateris 4 N addatur priori lateri circa rectum & & fiet 1 Q − 1 + 4 N æquandus quadrato ſicut & hypotenuſa 1 Q + 1 horum differentia eſt 2 − 4 N & fit valor radicis $\frac{1}{2}$, debet autem 1 N eſſe maior vnitate; ergo iteranda eſt operatio & formandum triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera ſunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120. duplum iſtius poſtremi lateris 48 N + 240 additum medio facit 1 Q + 121 + 58 N. æquandum quadrato & eſt etiam hypotenuſa 1 Q + 16 Q + 10 N. æquanda quadrato horum duorum productus 1 QQ + 68 C + 870 Q + 1102 N + 20449 æquandus quadrato. Finge latus 143 + $\frac{5506N}{143}$ − $\frac{6262703}{2924207}$ & fit valor radicis [illegible] ergo numeri formantes triangulũ in integris erunt 2145082341079296 & 368045547448320. vnde triangulum ipſum non latebit. 40

Inuenire quadrato-quadratum cuius triplum additum alteri quadrato-quadrato quam vnitati, faciat quadratum.

41 Iubetur addi alteri quadrato-quadrato quam vnitati quia alioqui res eſſet perfacilis, nam triplum vnitatis additum vnitati facit 4. Item triplum quadratoquadratum 16 additum vnitati facit 49. pone ergo latus quadrato-quadrati quæſiti 1 N − 1 cuius quadrato-quadratum 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1. triplicatum & additum 1 QQ facit 4 QQ − 12 C + 18 Q − 12 N + 3 æquandum quadrato, finge latus quadrati 2 Q − 3 N + $\frac{9}{4}$ & fiet valor $\frac{11}{8}$. ergo iuxta poſitiones latus quadratoquadrati erit in integris 3 cuius quadrato-quadratum 81 triplicatum & additum quadrato-quadrato numeratoris 11. nempe 14641 facit 14884. quadratum à latere 122. ſimiliter capiendo duplum 3. nempe 6. eius quadrato quadratum triplicatum additum quadrato-quadrato 22 (hoc eſt dupli 11) facit 238144 quadratum à latere 488 rurſus capiendo triplum 3 nempe 9 eius quadrato-quadratum triplicatum & additum quadrato-quadrato 33 (hoc eſt tripli 11) facit 1205604 quadratum à latere 1098. & ſic in infinitum.

Inuenire triangulum rectangulum in quo quadratum hypotenuſæ additum dato multiplici areæ faciat quadratum.

42 Detur duplum areæ & formetur triangulum ab 1 N & 1 latera ſunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. quadratum hypotenuſæ eſt 1 QQ + 2 Q + 1 cui additum duplum areæ 2 C − 2 N. facit 1 QQ + 2 C + 2 Q − 2 N + 1 æquandum quadrato finge latus 1 Q + 1 + $\frac{1}{2}$ & fiet $\frac{1}{4}$ pro valore radicis at $\frac{1}{4}$ non eſt maior 1 ergo non poteſt inde formari triangulum quin habeantur numeri ficti, quare iteranda eſt operatio & ponendo pro noua radice 1 N + $\frac{1}{4}$ iuxta quam ſi reſoluantur ſingulæ particulæ numeri mox quadrato æquati fiet nouus terminus 1 QQ + 3 C + [illegible] + [illegible] quadrato æquandus finge latus [illegible] − [illegible] + [illegible] & fiet valor radicis [illegible] huic adde $\frac{1}{4}$ ob nouam radicem, & fiet valor pro primis poſitionibus [illegible] quare duo numeri à quibus formabitur rectangulum triangulum erunt in integris 6437453 & 5237280. in vnico caſu problema eſt impoſſibile.

Inuenire triangulum rectangulum in quo area detracta ex quadrato vnius lateris circa rectum faciat quadratum.

43 Formetur illud triangulum ab 1 N − 1 & 4. latera ſunt 1 Q + 17 − 2 N. 1 Q − 15 − 2 N. 8 N − 8. eius area 4 C − 12 Q − 52 N + 60 ſublata ex quadrato ſecundi lateris, quod eſt 1 QQ − 4 C − 26 Q + 60 N + 225. relinquit 1 QQ − 8 C − 14 Q + 112 N + 165 æquandũ quadrato, finge latus 1 Q − 4 N − 15. & fit valor radicis − $\frac{15}{2}$ quare pono nouam radicem 1 N − [illegible]. & iuxta illam reſoluo ſingulas particulas termini quadrato æquati, fitque nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ − 38 C + [illegible] − 54 [illegible] + [illegible]. Finge latus 1 Q − 19 N [illegible] & fit valor [illegible], vnde ſi tollas [illegible] ob nouam radicem, & ex reſiduo vnitatem, ob poſitionem reſtabunt duo numeri formantes triangulum in integris 6001 & 2280. igitur triangulum quæſitum eſt 41210401. 30813601. 27364560.

CLAVDII

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI,

IN DIOPHANTVM PORISMATVM,

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI duobus æqualibus numeri inæquales duo adiiciantur, erit compoſitorum minor ratio quàm adiectorum.

Sint æquales numeri A B. C D. quibus addantur inæquales B E maior, & D F minor. Dico minorem eſſe rationem A E ad C F quàm B E ad D F. Quoniam enim A B & C D ſunt æquales [a] minor erit ratio ipſius A B ad maiorem B E, quàm ipſius C D ad minorem D F. igitur & componendo [b], minor eſt ratio A E ad B E quàm C F ad D F. Quare & viciſſim [c] minor eſt ratio A F ad C F quàm B F ad D F. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . . B . . . E
C . . . . . D . . F

[a] octaua, quinti. [b] vigeſima octaua, quinti. [c] vigeſima ſeptima, quinti.

PROPOSITIO II.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, planus ſub extremis æquatur plano ſub duobus quibuſlibet ab extremis æqualiter diſtantibus, atque etiam quadrato medij, ſi multitudo numerorum fuerit impar.

A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64.

Sint quotlibet numeri A B C D E F continuè proportionales & numero pari, dico primo planum ſub A F. æqualem eſſe tum plano ſub B E, tum plano ſub C D. Quia enim eſt A ad B vt E ad F ex hypotheſi [a] fiet idem numerus ex primo A in quartum F qui fit ex ſecundo B in tertium E. Similiter quia eſt B ad C vt D ad E [b] fiet idem numerus ex primo B in quartum E qui fit ex ſecundo C in tertium D ſeu idem qui fit ex A in F. Igitur plani ſub A F ſub B E ſub C D ſunt æquales. Quod erat propoſitum.

Deinde conſiderentur tantum numeri A B C D E multitudine impari. Dico planum ſub A E æquari tum plano ſub B D. tum quadrato ipſius C. Nam vt prius quia eſt A ad B vt D ad E. [c] planus ſub A E æquatur plano ſub B D. ſed quia eſt vt B ad C. ita C ad D [d] planus ſub B D. æquatur quadrato ipſius C. Igitur planus ſub A E planus ſub B D. & quadratus ipſius C æquales ſunt inter ſe. Quod demonſtrandum erat.

[a] decima nona, 7. [b] decima nona, 7. [c] decima nona, 7. [d] vigeſima, 7.

PROPOSITIO III.

Si tres, pluresve numeri inter ſe multiplicentur, idem ſemper procreabitur numerus, quomodocunque & quouis ordine ſeruato fiat multiplicatio.

Quod oſtendit Euclides de duobus numeris inter ſe multiplicatis decimaſexta 7. id in vniuerſum de tribus pluribuſve hîc oſtendetur. Tres autem, pluresve numeri inter ſe multiplicari dicuntur, cùm vnus ex illis ducitur in alium, tum productus in alium, & rurſus productus in alium, & ita deinceps, donec omnes multiplicati ſint.

A 2. B 3. C 4.
D 6. H 8. F 12.
E 24. K 24. G 24.

Sint ergo tres numeri A B C. ductoque A in B fiat D. quo ducto in C fiat E. Rurſus ordine mutato, ducatur B in C & fiat F, quo ducto in A fiat G. Denique mutato rurſus ordine ducatur A in C & fiat H, quo ducto in B. fiat K. (tot enim modis ordo variari poteſt.) Dico tria producta E K G inter ſe eſſe æqualia. Quia enim B ductus in vtroſque A C. producit ipſos D F [a] erit A ad C vt D ad F. [b] Igitur productus ex A in F nempe G. æquatur producto ex C in D nempe ipſi E. Similiter quia idem C ductus in vtrumque A & B producit ipſos H F. erit A ad B vt H ad F. Igitur qui fit ex A in F nempe

[a] decima ſeptima 7. [b] decima nona, 7.

G. æquatur ei qui fit ex B in H nempe ipſi K. Quamobrem conſtat tres E K G. æquales eſſe inter ſe. Quod erat propoſitum.

E 24. F 60.
A 2. B 3. C 4. D 5.
G 12.
K 120. H 120.

Deinde ſint quatuor numeri A B C D. & tribus A B C inter ſe ductis fiat E quo ducto in reliquum D fiat K. Tum mutato ordine, & tribus B C D inter ſe ductis fiat F. quo ducto in reliquum A fiat H. Dico ipſos K & H æquales eſſe inter ſe, & ſemper eundem produci numerum quomodocumque aliter ordine mutato iidem A B C D inter ſe multiplicentur. Quia enim ſumendo ternos A B C. tum ternos B C D. duo B C vtrique ſumptioni communes ſunt, productus ex B in C eſto G. patet ergo ex demonſtratis in tribus numeris ex G in A produci E, & ex G in D, produci F. Quare [a] vt E ad F ſic eſt A ad D. [b] Igitur qui fit ex E in D, nempe H, æquatur ei qui fit ex F in A nempe ipſi K. ſimiliter quomodocumque ſumantur tres ex iiſdem quatuor numeris, duo ex illis reperientur in qualibet alia trium ſumptione. Quare licebit eodem argumento propoſitum concludere.

[a] decima ſeptima 7.
[b] decima nona, 7.

Eodem modo ſi ſint quinque numeri, ſumendo quaternos & quaternos, productumque ex mutua quatuor numerorum multiplicatione, ducendo in reliquum, reperientur tres iidem numeri in duabus quibuslibet ſumptionibus, vnde ſumendo productum ex trium communium mutuo ductu, licebit ſimili prorſus argumento propoſitum concludere. Et ſic in ſex numeris per ea quæ in quinque demonſtrata ſunt probabitur intentum, & in ſeptem per ea quæ in ſex erunt oſtenſa. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IV.

Si fuerint quatuor numeri in proportionalitate arithmetica, erit ſumma extremorum, ſummæ mediorum æqualis. Et ſi ſumma extremorum ſit æqualis ſummæ mediorum, erunt in proportionalitate arithmetica ipſi quatuor numeri.

Arithmetica proportionalitas dicitur cùm primi & ſecundi idem eſt interuallum, quod tertij & quarti, ita tamen vt primus ſecundo, & tertius quarto comparati, ſinguli ſingulis vel æquales ſint, vel maiores; vel minores, non perturbato ordine.

A . . . . B
C . . . .
D . . . . G
H . . . .

Sint ergo arithmeticè proportionales A B ad C ſicut D G ad H. dico extremorum A B & H ſummam æquari ſummæ mediorum C & D G. etenim vel A B æqualis eſt ipſi C. vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis ergo vt ſeruetur arithmetica medietas, erit & D G. æqualis, ipſi H. Quamobrem ſi æqualibus A B & C addantur æquales H & D G. erunt duo A B & H ſimul æquales duobus C & D G ſimul. Quod eſt propoſitum.

A . . . . E . . B
C . . . .
D . . . . . F . . G
H . . . . .

Deinde excedat A B numerum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales, igitur & D G excedit H numero F G. æquali ipſi E B. per definitionem, & erit D F ipſi H æqualis. Itaque ſi æqualibus A E & C addantur æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales ipſis C & D F ſimul, igitur ſi his ſummis æqualibus addantur rurſus æquales E B & F G. Erunt A B & H ſimul æquales ipſis C & D G ſimul. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus. D G ſecundus. C tertius. A B quartus, ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & C ſit minor quàm A B numero E B, ſintque differentiæ F G. E B æquales; dico rurſus extremorum H & A B ſummam æquari ſummæ mediorum D G & C. Nam conſideratis iiſdem numeris ordine inuerſo concludetur per proximè demonſtrata ſummam duorum A B & H. æquari ſummæ duorum C & D G. Quod eſt propoſitum.

Iam è conuerſo ſit ſumma extremorum A B & H æqualis ſummæ mediorum C & D G. Dico ipſos quatuor numeros eſſe in arithmetica medietate. Nam vel A B æqualis eſt ipſi C vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis. Quia igitur A B & H ſimul æquantur ipſis C & D G ſimul, ſi vtrimque auferantur æquales A B. & C. remanebunt D G. & H æquales. Quare ſicut ipſorum A B & C nullum eſt interuallum, ſic & ipſorum D G. & H. Vnde conſtat propoſitum.

Deinde excedat A B ipſum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales. Igitur ab æqualibus ſummis duorum A B & H ſimul, & duorum C & D G ſimul, auferendo æquales numeros A E & C. remanent E B & H ſimul, æquales ipſi D G. Quare ſi abſcindatur ex D G. numerus D F æqualis H, erit reliquus F G. æqualis E B. Cùm itaque A B. excedat C. eodem numero quo D G excedit H. erunt arithmeticè proportionales ipſi quatuor numeri. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus D G. ſecundus. C tertius. A B quartus. Ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & reliquus D F ſit æqualis ipſi H. Quia ergo ab æqualibus ſummis duorum H & A B. & duorum D G, & C. auferendo æquales H & D F remanent F G & C ſimul æquales ipſi A B, ſi ab A B abſcindatur A E æqualis ipſi C relinquetur E B æqualis ipſi F G. Quare cum H deficiat à

D G. eodem numero quo C deficit ab A B. ſunt arithmeticè proportionales H ad D G. ſicut C ad A B. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc apparet ſi quatuor numeri fuerint in hac proportionalitate, & conuertendo fore eos in eadem proportionalitate.

Nam ſi primus excedat ſecundum, eodem interuallo quo tertius excedit quartum, & conuertendo, quartus deficiet à tertio, eodem numero quo ſecundus deficit à primo. Rurſus ſi primus deficiat à ſecundo, eodem numero quo tertius à quarto, & conuertendo quartus excedet tertium, eodem interuallo quo ſecundus primum.

PROPOSITIO V.

Si tres numeri arithmeticè proportionales fuerint, ſumma extremorum æqualis eſt duplo medij. Et ſi ſumma extremorum ſit æqualis duplo medii, ipſi tres numeri arithmeticè proportionales erunt.

A 9.
B 6. D 6.
C 3

Sint, tres numeri A B C in arithmetica proportionalitate, vt A ad B ita B ad C. Dico extremorum A C ſummam æquari duplo medij B. Etenim ſumpto D æquali ipſi B. erit ex hypotheſi in arithmetica proportionalitate vt A ad B ita D ad C. (quia D idem eſt atque B) Igitur per primam partem præced. erit extremorum A C ſumma æqualis ſummæ mediorum B D, ſeu duplo ipſius B. Quod erat primò propoſitum.

Sit deinde ſumma ipſorum A C æqualis duplo ipſius B. Dico eſſe in arithmetica proportionalitate vt A & B ita B ad C. Nam rurſus ſumpto D æquali B erit ex hypotheſi, ſumma duorum A C ſummæ duorum B D æqualis. Quare per ſecundam partem præcedentis erit in arithmetica medietate A ad B vt D ad C. hoc eſt A ad B vt B ad C. Quod erat ſecundò demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Si ſint quotlibet numeri in arithmetica medietate continui, ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, atque etiam duplo medij, ſi multitudo numerorum fuerit impar.

A 3. B 5. C 7. D 9. E 11. F 13.

Sint quotlibet numeri A B C D E F in arithmetica medietate continui, dico ſummam extremorum A F æqualem eſſe ſummæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, hoc eſt ſummæ duorum B E, & ſummæ duorum C D. Nam ob continuitatem arithmeticæ proportionalitatis, eſt A ad B ſicut E ad F. Igitur [a] extremorum A F ſumma, ſummæ mediorum B E æqualis eſt. Similiter quia eſt in arithmetica medietate B ad C, vt D ad E. [b] erit ſumma extremorum B E æqualis ſummæ mediorum C D. Quare cùm eadem ſumma duorum B E ſit iam oſtenſa æqualis ſummæ duorum A F. erit vtique ſumma duorum A F æqualis tam ſummæ duorum B E. quàm ſummæ duorum C D & ſic de aliis ſi plures eſſent numeri propoſiti.

a quarta huius. *b quarta, huius.*

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. F 12. G 14.

Quod ſi numeri A B C D E F G ſint multitudine impari, oſtendemus vt prius ſummam extremorum A G æqualem eſſe ſummæ duorum C E. Quia vero ex hypotheſi eſt C ad D vt D ad E. in medietate arithmetica, [c] ſumma duorum C E æqualis eſt duplo medij D. Quamobrem ex omni parte conſtāt propoſitum.

c quinta, huius.

PROPOSITIO VII.

Si fuerint quatuor numeri arithmeticè proportionales, & permutando, arithmeticè proportionales erunt.

A 12. B 9.
C 4. D 1.

Sit in medietate arithmetica primus A ad ſecundum B. ſicut tertius C ad quartum D. Dico & permutando eſſe in eadem medietate A ad C vt B ad D. Quia enim eſt in hac medietate A ad B vt C ad D. erit ſumma extremorum A D æqualis ſummæ mediorum C B per primam partem quartæ huius. Igitur per ſecundam partem eiuſdem erit in eadem medietate primus A ad C ſecundum, ſicut tertius B ad D quartum. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIII.

Omnis numerus pariter par, dimidium par habet. Et ſi quis numerus dimidium par habet, is eſt pariter par.

A 24. B 12.

Eſto A numerus pariter par, cuius dimidium B. Dico B eſſe parem. Si enim B eſſet impar, [a] ipſe A eſſet pariter impar tantum, contra hypotheſim. Non eſt ergo B impar, ſed par. Quod eſt propoſitum.

[a] trigeſimatertia, 9.

Deinde ſit B par, dico A eſſe pariter parem, & patet ex definitione. Etenim A producitur ex binario numero pari, in parem B. Quamobrem ex omni parte patet intentum.

COROLLARIVM.

Binarius metitur omnem numerum parem, per ipſius dimidium.

PROPOSITIO IX.

Omnis numerus pariter impar tantum, dimidium impar habet.

A 10. B 5.

Hæc conuertit trigeſimam tertiam, 9. Euclidis. Eſto A numerus pariter impar tantum, cuius dimidium B. Dico B eſſe imparem. Nam ſi B eſſet par, [a] ipſe A eſſet pariter par. Atqui A ſupponitur pariter impar tantum. Igitur B non eſt par ſed impar. Quod demonſtrandum erat.

[a] octaua, huius.

PROPOSITIO X.

Omnem numerum pariter parem quaternarius metitur. Et omnem numerum quem quaternarius metitur, is pariter par eſt.

A......C......B

G 4. D 2.

Eſto A B numerus pariter par cuius dimidium ſit C B numerus par per octauam huius. Et ſit G. quaternarius. Dico primo G metiri ipſum A B. Nam ſumpto D binario, erit D ad G ſicut ſicut C B ad A B. & permutando erit D ad C B, ſicut G ad A B. ſed [a] D binarius metitur numerum parem C B. Igitur & G metitur ipſum A B. Quod demonſtrandum erat.

Deinde quaternarius G metiatur numerum A B. Dico A B eſſe pariter parem. Nam primo parem eſſe conſtat, [b] quia eum metitur G numerus par. Itaque ipſius A B dimidium eſto C B. Tunc vt prius ſumpto binario D. oſtendemus eſſe D ad C B ſicut G ad A B. Sed G metitur A B ex hypoteſi. [c] Igitur & D metitur C B. Quamobrem A B habens dimidium par, eſt pariter par. Quod ſecundo erat oſtendendum.

[a] coroll. octaua. huius.
[b] vigeſima prima, 9.
[c] octaua, huius.

PROPOSITIO XI.

Omnis numerus excedens binario aliquem pariter parem, eſt pariter impar tantum.

A..C........B

Sit numerus A B excedens pariter parem C B. binario A C. Dico A B eſſe pariter imparem tantum. Nam primò eſſe parem conſtat, [a] quia componitur ex duobus paribus A C. C B. Deinde eſſe pariter imparem ſic probatur. Nam ſi ponatur pariter par, [b] metietur eum quaternarius. Sed & idem quaternarius metitur pariter parem C B. Ergo quaternarius metiens totum A B. & ablatum C B, metietur & reliquum binarium A C, maior minorem. Quod eſt impoſſibile. Quamobrem A B non eſt pariter par. Eſt igitur pariter impar tantum. Quod demonſtrandum fuit.

[a] vigeſima prima, 9.
[b] octaua, huius.

PROPOSITIO XII.

Omnis numerus pariter impar tantum, excedet aliquem pariter parem binario.

A..G.....C.D......B

Eſto A B pariter impar tantum, dico eum excedere binario aliquem pariter parem. Quia enim A B eſt par, ſecetur bifariam in A C. C B. [a] eruntque A C C B impares. Quare ſi ab ipſo C B auferatur vnitas C D, reliquus D B erit par. Sit illius duplus G B. [b] Igitur G B erit pariter par. Quum itaque vt totus A B ad totum C B, ſic ſit ablatus G B ad ablatum D B. (nam vtrobique eſt proportio dupla) erit & reliquus A G ad reliquum C D in eadem proportione dupla. Quare cùm C D ſit vnitas, erit A G binarius. Atque ideo cùm G B ſit oſtenſus pariter par, numerus A B ſuperat pariter parem G B binario A G. Quod demonſtrandum erat.

[a] nona, huius.
[b] octaua, huius.

PROPOSITIO XIII.

Si numerus pariter par, numero pariter impari tantum addatur, erit compoſitus pariter impar tantum.

A....C......B

Numerus pariter par A C. addatur pariter impari tantum C B. Dico compoſitum ex his A B eſſe pariter imparem tantum. Nam ſi A B ponatur pariter par, [a] metietur eum quaternarius. Sed idem quaternarius metitur pariter parem A C. Igitur metiens totum A B, & ablatum A C, metietur & reliquum C B. quamobrem C B erit pariter par contra hypotheſim.

[a] octaua huius.
[b] octaua, huius.

Nam poſitus eſt pariter impar tantum. Igitur A B non poteſt eſſe pariter par. Vnde relinquetur eſſe pariter imparem tantum. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIV.

Si numerus pariter par per aliquem numerum multiplicetur, productus erit pariter par.

A 8. B 3. Sit numerus pariter par A quo ducto in quemlibet numerum B fiat C. Dico C eſſe pa-
C 24. riter parem. Quia enim A eſt pariter par, [a] metitur eum quaternarius. Quare cùm A metiatur C. metietur & quaternarius, eundem C. [b] Igitur C eſt pariter par. Quod demouſtrandum erat.

[a] octaua, huius.
[b] octaua, huius.

PROPOSITIO XV.

Si numerus pariter impar tantum, per numerum imparem multiplicetur, productus erit pariter impar tantum.

A 6. B 5. Sit A numerus pariter impar tantum, quo ducto in B. imparem numerum, produca-
D 3. E 15. tur C. Dico C eſſe pariter imparem tantum. Sumatur enim D dimidium ipſius A, quo
C 30. ducto in B fiat E. Euidens eſt, quia B ductus in vtrumque D A producit E C [a] eſſe E ad C ſicut D ad A. Quamobrem E eſt dimidium ipſius C. [b] Atqui D eſt impar, cùm ſit ſemiſſis ipſius A numeri pariter imparis tantum & B etiam impar eſt ex hypotheſi. [c] Igitur E productus ex duorum imparium mutuo ductu, & ipſe impar eſt. [d] Quare C habens dimidium impar E, eſt pariter impar tantum. Quod erat demonſtrandum.

[a] decima ſeptima 7.
[b] nona, huius.
[c] vigeſima oona, 9.
[d] trigeſimatertia, 9.

PROPOSITIO XVI.

Si pariterpares quotcumque componantur, totus pariter par erit.

A 8. Sint pariter pares quotcunque A B C. quorum ſumma D. dico D eſſe pariter parem.
B 12. D 36. Quia enim A B C. ſunt pariter pares, [a] ſingulos illorum quaternarius metitur. Igitur
C 16. & compoſitum ex ipſis D, idem quaternarius metietur. [b] Quamobrem [illegible] D. pariter par. Quod demonſtrandum erat.

[a] octaua huius
[b] octaua, huius.

PROPOSITIO XVII.

Si quotlibet numeri pariter impares tantum componantur, ſit autem par illorum multitudo, totus erit pariter par. Si vero ſit impar illorum multitudo, totus erit pariter impar tantum.

A 6. E 4. Sint quotcunque pariter impares tantum A B C D. & ſit primum par eorum multitu-
B 10. F 8. do, & compoſitus ex ipſis K. dico K eſſe pariter parem. ſumantur enim E F G H ſinguli
C 14. G 12. binario minores ſingulis A B C D. [a] Eruntque ipſi E F G H pariter pares. Numerus au-
D 18. H 16. tem K æquabitur compoſito ex ipſis E F G H & totidem binariis. At [b] compoſitus ex
K 48. ipſis E F G H eſt pariter par. Necnon & totidem binarij faciunt pariter parem [c] cùm compoſitus ex illis habeat dimidium par, ſcilicet numerum multitudinis ipſorum E F G H. [d] Igitur K compoſitus ex duobus pariter paribus, eſt pariter par Quod demonſtrandum fuit.

A 6. E 4. Sint vero A B C pariter impares tantum, multitudine impari, quorum ſumma D.
B 10. F 8. dico D eſſe pariter imparem tantum. Nam ſumptis vt prius E F G binario minoribus
C 14 G 12. quàm ipſi A B C. erit D æqualis compoſito ex ipſis E F G & totidem binariis. [e] Quia
D 30. uero ſinguli E F G ſunt pariter pares, erit [f] & compoſitus ex ipſis pariter par. Summa vero totidem binariorum eſt pariter impar tantum, [g] quia dimidium impar habet, numerum multitudinis ipſorum E F G Igitur [h] numerus D compoſitus ex duobus quorum alter eſt pariter par, alter pariter impar tantum, eſt & ipſe pariter impar tantum. Quod demonſtrandum erat.

[a] duodecima huius.
[b] decima ſexta huius.
[c] octaua, huius.
[d] decima ſexta, huius.
[e] duodecima, huius.
[f] decima ſexta, huius.
[g] trigeſimatertia, 9.
[h] decima tertia, huius.

PROPOSITIO XVIII.

Si cuiuis quadrato addatur duplum lateris illius, & præterea vnitas, fit quadratus à latere vnitate maiore.

A 16. Sit quadratus A cuius latus B C cui addita vnitate C D fiat B D & ipſius B D qua-
B....C.D dratus eſto G. dico ſi addatur ad A duplum ſui lateris B C & præterea vnitas, fieri
G 25. quadratum G etenim [a] quadratus G. æqualis eſt quadratis ipſorum B C. C D. & producto bis ex B C in C D. Atqui quadratus ipſius B C eſt A, & quadratus C D

[a] quarta, 2.

eſt ipſa vnitas: Productus autem ex vnitate CD in BC bis, eſt duplum ipſius BC. Patet ergo quadratum G æquari quadrato A & vnitati, & duplo ipſius BC. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Eadem prorſus ratione ſi cuilibet quadrato addatur quadruplum ſui lateris & præterea 4. oſtendetur fieri quadratum lateris binario maioris. Et ſi quadrato addatur ſextuplum ſui lateris, & præterea 9. fiet quadratus lateris ternario maioris, & ſic in infinitum multiplicando latus per omnes numeros pares ordinatè diſpoſitos, & aſſumendo quadratos illis collaterales ſeu quadratos ſemiſſum eorundem numerorum parium. Nec ad hæc demonſtrandum requiritur aliud quàm quarta, 2.

PROPOSITIO XIX.

Si à quolibet quadrato auferatur numerus vnitate minor duplo lateris illius, relinquetur quadratus à latere vnitate minore.

A 25. B 5. C 10. D 9. E 4. F 8.

Sit A quadratus, cuius latus B cuius duplum C, vnde ablata vnitate relinquatur D & ſit E vnitate minor ipſo B. Dico ſi D auferatur à quadrato A, relinqui quadratum ipſius E. ſumpto enim F duplo ipſius E, cùm BE differant vnitate, patet eorum dupla CF differre binario. Quare idem fiet numerus ſiue auferatur vnitas ex C. ſiue addatur vnitas ad F, nempe idem D. Atqui ſi ad quadratum ipſius E addatur duplum eiuſdem E vnitate auctum nempe D. ª fiet quadratus ipſius B nempe A. Igitur ſi ex A detrahatur D. reſiduum erit quadratus ipſius E. Quod demonſtrandum erat.

a decima octaua, huius.

PROPOSITIO XX.

Omnis numerus quadratus aut impar eſt, aut pariter par.

A 25. A 16. B 5. B 4.

Sit numerus quadratus A, cuius latus B. dico A vel imparem eſſe, vel pariter parem. Etenim vel B impar eſt, vel par. Sit primum impar. Quia ergo ex impare B in imparem B. fit A. ª erit A impar.

Deinde ſit B par. Quia igitur ex pari B in parem B fit A, erit A pariter par ex definitione. Quamobrem A vel impar eſt, vel pariter par. Quod demonſtrandum erat.

a vigeſima nona, 9.

COROLLARIVM.

G. I. Nullus numerus pariter impar tantum, eſt quadratus.

Patet, cùm numerus pariter impar tantum, nec impar ſit, nec pariter par.

PROPOSITIO XXI.

Quilibet quadratus impar, excedit numerum pariter parem vnitate.

A 25. C 24. B 5. D 4.

Sit A quadratus impar, cuius latus B. & ab ipſo A detracta vnitate ſuperſit C. dico C eſſe pariter parem, Sumatur D numerus vnitate minor ipſo B. Quia ergo B eſt impar ª (nam ſi B eſſet par, ex ductu illius in ſeipſum fieret A par contrà hypotheſim) erit D par. ᵇ Atqui duplum ipſius D vnà cum quadrato eiuſdem D, æquatur numero C. Quadratus autem numeri paris D, ᶜ eſt pariter par. Duplum quoque numeri paris D eſt pariter par (cum fiat ex binario pari numero, in D parem:) igitur & C compoſitus ex duobus pariter paribus, ᵈ eſt pariter par. Quod demonſtrandum erat.

a Schol. vigeſima octaua, 9.
b decima octaua, huius.
c vigeſima, huius.
d decima ſexta, huius.

PROPOSITIO XXII.

Duorum quorumlibet quadratorum interuallum, aut impar eſt, aut pariter par.

A 25. B 9. C 16. D . . . E . . F

Sint duo quadrati A maior & B minor, quorum interuallum C. Dico C eſſe pariter parem, vel imparem. Sumatur ipſius A latus DF, & latus ipſius B ſit DE, ita vt EF ſit differentia dictorum laterum. Itaque EF vel par eſt, vel impar. Sit primum par. Cùm igitur interuallum quo quadratus A ſuperat quadratum B ª æquetur quadrato ipſius EF & producto ex DE in EF bis, erit C æqualis quadrato ipſius EF & producto ex DE in EF bis, ᵇ At quadratus paris numeri EF eſt pariter par. Necnon & duplum producti ex DE in EF eſt pariter par, ᶜ cùm dimidium eius, nempe productus ex DE in EF parem, ſit par. ᵈ Igitur C compoſitus ex duobus pariter paribus, eſt pariter par. Quod erat propoſitum.

a quarta, 2.
b vigeſima, huius.
c octaua, huius.
d decima ſexta, huius.

A 25. B 4. C 21. D..E...F

Deinde ſit E F impar. Tunc quia quod fit bis ex D E in E F eſt numerus par (habet enim dimidium quod fit ſemel ex D E in E F.) ſi ei adiiciatur quadratus imparis E F,[a] qui impar eſt,[b] erit C. compoſitus ex pari & impari, impar. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

a vigeſima, huius.
b Schol. vigeſima tertia, 9.

COROLLARIVM.

Numerus pariter impar tantum, non poteſt eſſe interuallum duorum quadratorum.
Intellige vnitate indiuiſibili manente, aliter enim quilibet numerus ſtatui poteſt interuallum duorum quadratorum, vt oſtendit Diophantus lib. 2. ſed & vigeſima propoſitio, & hæ etiam intelligendæ ſunt de numeris integris, nam fracti numeri nec pares ſunt nec impares.

PROPOSITIO XXIII.

Si duorum inæqualium numerorum ſummæ addatur & adimatur eorundem interuallum, aggregatum quidem, maioris numeri, reſiduum vero, minoris duplum eſt.

E...A....B....C...D

Sint inæquales numeri A B minor & B D maior & à maiori abſcindatur B C minori A B æqualis ita vt reliquus C D ſit interuallum ipſorum. Dico primo, ſi toti A D addatur E A æqualis interuallo C D aggregatum E D eſſe duplum maioris numeri B D. etenim cùm æqualibus A B. B C. addantur æquales E A. C D erunt toti E B. B D æquales, atque ideo totus E D ipſius B D duplus erit. Quod erat propoſitum.
Dico ſecundo, ſi à toto A D auferatur interuallum C D, reſiduum A C minoris A B duplum eſſe, & patet cùm B C ipſi A B ſit æqualis. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

COROLLARIVM.

Si ſemisſi ſumma duorum numerorum addatur & adimatur ſemisſis interualli eorundem aggregatum quidem maiori numero, reſiduum vero minori æquale eſt.

PROPOSITIO XXIV.

Si quotlibet numeri continuè proportionales, in totidem alios continuè proportionales ducantur, primus in primum, ſecundus in ſecundum, tertius in tertium & ita deinceps, & producti continuè proportionales erunt.

P 16.	A 2.	B 4. C 8. D 16.
Q 324.	E 27.	F 18. G 12. H 8.
R 5184.	K 54.	L 72. M 96. N 128.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B C D & totidem alij E F G H ductiſque A in E. B in F. C in G. D in H. fiant K L M N. Dico & ipſos K L M N eſſe continuè proportionales. Etenim ex A in C & ex E in G fiant P Q.[a] quadrati ipſorum B F ſumaturque etiam R productus ex K in M. Itaque quoniam ex A in E & ex C in G fiunt K M & ex K in M fit R. patet R produci ex mutua multiplicatione quatuor numerorum A C E G.[b] Quamobrem idem R producetur quomodocunque iidem quatuor numeri inter ſe ducantur, nimirum ſi A ducatur in C. & E in G. & producti P Q inter ſe ducantur. Igitur ex P in Q fiet R. At productus ex mutuo ductu quadratorum P Q[c] æquatur quadrato plani ſub lateribus B F & ex B in F fit L ex hypotheſi. Ergo R eſt quadratus ipſius L,[d] ac proinde tres K L M ſunt continuè proportionales. Eadem ratione oſtendemus tres L M N eſſe continuè proportionales. Quamobrem patet & omnes K L M N eſſe continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

a vigeſima, 7.
b tertia, huius.
c vndecima, 8.
d vigeſima, 7.

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI
IN DIOPHANTVM PORISMATVM.
Liber Secundus.

PROPOSITIO I.

SI numerus ſecetur in quotlibet partes. Quadratus totius æquatur quadratis partium, & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis.

A....D...C.....B

Numerus AB ſectus ſit primum in tres partes AD. DC. CB. Dico quadratum totius AB æquari quadratis partium AD. DC. CB. & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, nimirum productis bis ex AD in CB ex DC in CB & ex AD in DC. Etenim concipiendo numerum diuiſum in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius AB æqualis quadratis partium AC. CB. & producto bis ex AC in CB. [b] Sed productus bis ex AC in CB æquatur productis bis ex ſingulis AD. DC in CB. Quadratus autem ex AC. [c] æquatur quadratis partium AD. DC. & producto bis ex AD in DC. Igitur conſtat quadratum totius AB æquari quadratis ipſorum AD. DC. CB & numeris qui fiunt bis ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quod eſt propoſitum.

a quarta, 2. b prima, 2. c quarta, 2.

A..E...D....C.....B

Deinde ſecetur AB in quatuor partes AE. ED. DC. CB. Dico nihilominus ſequi propoſitum. Nam ſi totus AB concipiatur diuiſus in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius æqualis quadratis partium AC. CB & producto ex AC in CB bis. At productus ex AC in CB bis, [b] æquatur productis bis ex ſingulis AE. ED. DC. in CB. Et quadratus ex AC. æquatur per iam demonſtrata quadratis ſingulorum AE. ED. DC. & productis ex quolibet illorum in quemlibet ex aliis. Igitur quadratus totius AB æquatur quadratis ſingulorum AE. ED. DB. CB. & productis bis ex quolibet in quemlibet ex alijs. Quod demonſtrandum erat. Similiter ſi [illegible]us ſecetur in quinque partes, idem oſtendetur aſſumendo quod demonſtratum de ſectione in quatuor partes, & ſic in infinitum. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

a quarta, 2. b prima 2.

PROPOSITIO II.

Datis duobus numeris inæqualibus, productus ex mutua eorum multiplicatione vna cum quadrato ſemiſſis interualli ipſorum, æquatur quadrato ſemiſſis ſummæ eorundem.

Hæc propoſitio eadem eſt cum quinta, 2. Euclidis mutatis tantum verbis. Etenim ſint numeri

A... F.. E.. B... C

inæquales AB maior & BC minor, & totius AC ſemiſſis eſto AE vel EC, & in ſemiſſi AE ſumatur FE æqualis ipſi EB. Tunc ab æqualibus AE. EC. auferendo æquales FE. EB. erunt reliqui AF. BC æquales. Quamobrem FB eſt interuallum inæqualium numerorum AB. BC. & EB eſt ſemiſſis eiuſdem interualli. Itaque per quintam, 2. conſtat quadratum ipſius BC ſemiſſis ſummæ æquari producto ex AB in BC. & quadrato EB ſemiſſis interualli. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO III.

Duorum inæqualium quadratorum interuallum, æquale eſt numero qui fit ex ſumma laterum in interuallum eorundem.

Hæc etiam non differt à ſexta, 2. etenim ſint inæquales numeri AC minor, & CD maior abſcindatur ex CD numerus CB æqualis ipſi AC erit ergo BD interuallum duorum AC. CD. Dico itaque quadratum ex CD ſuperare quadratum ex AC. numero qui fit ex AD ſumma laterum, in BD interuallum eorundem. Cùm enim AB ſectus ſit bifariam in C. & ei adiectus ſit BD, erit per ſextam, 2. quadratus ex CD æqualis producto ex AD in BD & quadrato ex AC. Quare quadratus ex CD ſuperat quadratum ex AC producto ex AD in BD. Quod demonſtandum fuit.

A... C... B..... D

PROPOSITIO IV.

Duorum quadratorum ſumma, æquatur duplo plani ſub lateribus, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc

Hæc quoque aliis verbis idem pronunciat, quod ſeptima 2. Etenim ſint inæquales numeri A C maior & C B minor, & abſcindatur D C æqualis ipſi C B. ita vt A D ſit interuallum ipſorum A C. C B. Dico ſummam quadratorum ab ipſis A C. C B. æquari duplo plani ſub A C. C B. vnà cum quadrato ipſius A D. Quia enim numerus A C ſectus eſt vtcumque in D, per ſeptimã 2. quadratus ex A C cum quadrato ex D C. ideſt ſumma quadratorum ab ipſis A C. C B. æquatur duplo plani ſub A C. D C. ſeu ſub A C. C B. vnà cum quadrato ipſius A D. Quod demonſtrandum erat.

A..D....C....B

PROPOSITIO V.

Quadratus ſummæ duorum numerorum, æqualis eſt quadruplo plani ſub ipſis numeris contenti, vna cum quadrato interualli eorundem.

Hæc rurſus eadem eſt cum octaua 2. ſint enim inæquales numeri A B maior, & B D minor, & abſcindatur C B æqualis ipſi B D, ita vt A C ſit interuallum ipſorum A B. B D. Dico quadratum totius A D æquari quadruplo plani ſub A B. B D. vnà cum quadrato interualli A C. Cùm enim numerus A B ſectus ſit vtcumque in C. per octauam 2. quadratus compoſiti ex A B. C B. nimirum totius A D, æquatur quadruplo plani ſub A B. C B. ſeu ſub A B. B D, cum quadrato ipſius A C. Quod demonſtrandum proponebatur.

A.....C..B..D

PROPOSITIO VI.

Duorum inæqualium quadratorum ſumma, dupla eſt quadrati ſemiſſis ſummæ laterum, & quadrati ſemiſſis interualli eorundem.

Hæc non differt à nona 2. ſint enim inæquales numeri A D. D B. & totius A B. ſemiſſis eſto A C. vel C B ergo per oſtenſa ſecunda huius C D erit ſemiſſis interualli ipſorum A D. D B. Itaque dico ſummam quadratorum ab ipſis A D D B. duplam eſſe quadratorum ab ipſis C B. C D. Quod ipſum enunciat nona 2. Quamobrem conſtat propoſitum.

A.....C..D...B

PROPOSITIO VII.

Quadratus ſummæ duorum numerorum, & quadratus interualli eorum ſimul, dupli ſunt quadratorum ab ipſis numeris.

Hæc quoque coincidit cum decima 2. ſint enim inæquales numeri A C. minor, & C D maior & à maiori abſcindatur C B minori A C æqualis, ita vt B D ſit interuallum ipſorum A C. C D. Dico Quadratum totius A D cum quadrato interualli B D eſſe duplum quadratorum ab ipſis A C. C D. Cum enim A B ſectus ſit bifariam in C. & adiectus ſit ei B D. per decimam 2. Quadrati ipſorum A D. B D ſimul dupli ſunt quadratorum ab ipſis A C. C D. Quod erat oſtendendum.

A.....C.....D

COROLLARIVM.

Cuiuslibet numeri ex duobus quadratis compoſiti tam dimidium quam duplum componitur & ipſum ex duobus quadratis.

SCHOLIVM.

Colligitur maniſeſtò hoc corollarium ex his duobus poſtremis propoſitionibus, & verum eſt in omni numero ſiue pari, ſiue impari, ſiue integro, ſiue fracto, cùm hæ duæ demonſtrationes omnibus numeris conueniant, vt apparet, vnde conſtat lapſum eſſe Cardanum cap. 42. ſua Arithmetica regula 120. vbi hanc proprietatem numeris fractis conuenire negat. Notandus etiam error Nicolai Tartalea lib. 6. ſecunda partis quaeſt. 48. vbi ait ſi numerus ex duobus quadratis compoſitus ſit duplus alterius ex duobus item quadratis compoſiti, ſemper euenire vt minus latus ſub duplorum ſit interuallum inter maius latus eorundem & minus duplorum, vt quia quadrati 64. & 4. ſimul ſunt dupli quadratorum 25. & 9. accidit 3. latus ipſius 9. eſſe differentiam laterum 5. & 2. Etenim cùm vterque numerus ex duobus quadratis compoſitus, infinitis modis componatur ex duobus quadratis, vt oſtendit Diophantus quaeſt. decima lib. 2. ſanè vterque infinitis modis diuidi poterit in duos quadratos in quibus non eueniet quod ſemper euenire aſſerit Tartalea, quod vnico exemplo probare ſufficiet. Quadrati 121. & 9 ſimul dupli ſunt quadratorum 64. & 1. cùm illorum ſumma ſit 130. horum 65. Attamen cùm latera illorum ſint 11. & 3. horum 8. & 1. manifeſtum eſt, minus horum nempe 1. non eſſe interuallum ipſorum 8. & 3. Rurſus 130. componitur ex duobus quadratis 81. & 49. At 65. componitur è duobus 49 & 16. & illorum latera ſunt 9. & 7. iſtorum 7. & 4. vbi tamen 4. non eſt interuallum ipſorum 7. & 7. Verum quidem eſt ſi aliter comparentur hi quadrati, euenire quod ait Tartalea nimirum ſi quadrati 121. & 9. comparentur ipſis 49. & 16. vel ſi quadrati 81. & 49. comparentur ipſis 64. & 1. Hoc igitur diſtinguere debuit Tartalea; ſed doctrinam de numeris e duobus quadratis compoſitis perfectè non calluit.

Hinc etiam colligere licet. Nullum numerum pariter parem tantum componi poſſe ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Nam ſi hoc ponatur, facilè concludetur ex quibuſdam propoſitionibus lib. 1. poriſm. & ex ſexta huius, illius quoque dimidium componi è duobus quadratis integris & inæqualibus. Quia igitur numeri pariter paris tantum, continuè dimidium ſumi poteſt, & dimidium dimidij donec ad binarium & ad vnitatem deueniatur per trigeſimam quartam 9. Euclidis, patet ſequi & ipſum binarium & ipſam vnitatem componi quoque ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Quod eſt impoſſibile.

PROPOSITIO VIII.

Differentia medij proportionalis à quolibet quadratorum inter quos medius eſt; æquatur productis ex interuallo laterum in quodlibet latus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 28. C 49.

Sint quadrati A C. quorum latera D F, quorum interuallum E & medius proportionalis inter ipſos A C. eſto B. Dico differentiam qua B ſuperat A æquari producto ex E in D. & differentiam qua C ſuperat B æquari producto ex E in F. [a] Etenim patet ipſum B fieri ducto D in F. Quia ergo F æquatur ipſis D E ſimul, [b] fiet idem B ducto D in ſingulos D E. Atqui ex D. in D fit quadratus A. Igitur ſi à productis ex D in D & in E hoc eſt à numero, B auferatur productus ex D in D, nempe quadratus A, reſtabit productus ex D in E pro differentia inter ipſos A B. Similiter quia ex F in F fit C. & F æquatur ambobus D E, fiet idem C ex F in ſingulos D E. At ex F in D fit B vt dictum eſt. Igitur ſi à quadrato C. auferatur B. reſtat productus ex F in E pro differentia inter B C. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

a vndecima, 8. b prima, 2.

PROPOSITIO IX.

Si à duobus quadratis, & à medio eorum proportionali auferatur ſigillatim quilibet datus numerus, & tria reſidua per differentiam laterum ſigillatim diuidantur, medius quotientum ſuperat minimum latere minoris quadrati, & ſuperatur à maximo latere maioris quadrati, & ſumma maximi & minimi ſuperat duplum medij, eorundem laterum interuallo.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 10.
H 6. K 18. L 39.
M 2. N 6. P 13.

Sint A B duo quadrati, quorum latera D F. quorum interuallum E. & media proportionalis ſit C. & ab ipſis A. C. B. auferendo ſigillatim datum quemuis numerum G. ſuperſint H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M. N. P. Dico primo N. ſuperare ipſum M. numero D, & eundem N. ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm à ſingulis A C B. ablatus ſit idem G. patet reſiduorum H K L eadem eſſe interualla quæ ipſorum A C B. [a] Atqui C ſuperat A. producto ex D in E. & B ſuperat C producto ex E in F. Igitur & interuallum duorum H K. eſt productus ex D in E, & interuallum duorum K. L eſt productus ex E in F. Quoniam verò diuiſis H K L. per E, prodeunt M N P. conſtat duorum M N interuallum fieri, diuiſo per E interuallo ipſorum H K. ſeu producto ex D in E. ſimiliter duorum NP. interuallum fiet, diuiſo per E interuallo ipſorum K. L. ſeu producto ex E in F. Atqui diuidendo per E productos ex E in D, & ex E in F, fiunt quotientes ipſi D F. Igitur duorum M N interuallum eſt D. & duorum N P interuallum eſt F. Quod erat propoſitum.

a octaua, huius.

Deinde, dico ſummam ipſorum M P. ſuperare duplum ipſius N numero E. Nam per oſtenſa P. æquatur ipſis N F. Igitur ſumma ipſorum M P. æquatur tribus numeris M N F. At F æquatur vtrique D E. Igitur ſumma amborum M. P. æquatur quatuor numeris D E M N. Verùm per oſtenſa ambo D M æquantur ipſi N. Igitur ambo M P. æquantur duplo ipſius N, & numero E. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO X.

Si duobus quadratis & medio eorum proportionali addatur ſigillatim idem numerus, & tres ſummæ per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, idem quod prius quotientibus accidet.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 2.
H 18. K 30. L 51.
M 6. N 10. P 17.

Sint iidem qui ſuprà D E F. A C B. & ipſis A C B addatur ſigillatim numerus G, vnde fiant H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M N P. Dico primo N ſuperare ipſum M numero D, & eundem N ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm ſingulis A C B additus ſit idem G. patet ſummarum H M L eadem eſſe interualla, quæ ipſorum A C B. Atqui C ſuperat A & aſſumantur reliqua omnia verba præcedentis demonſtrationis, & nulla quidem mutata litera propoſitum concludetur.

PROPOSITIO XI.

Si à duobus quadratis auferatur idem numerus ſigillatim, & reſidua per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adſcito numero qui à quadratis detractus eſt, quadratus euadit.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 10.
M 2. N 6. P 13.

Sint quadrati A B. quorum latera D F. & horum interuallum E & ab ipſis A B auferendo G. ſigillatim ſuperſint duo numeri, quibus diuiſis ſigillatim per E. fiant quotientes M P. Dico ex mutuo ductu ipſorum M P. fieri numerum qui adſcito G. quadratus euadit. Sumatur N quotiens qui fit ſi medius proportionalis inter A B detracto G, diuidatur per E. [a] Quare N æquabitur vtrique D M. & P vtrique N F. Igitur qui fiet ex N in D. [b] æquabitur iis qui fient ex D in D & ex D in M, hoc eſt quadrato A & numero qui fit ex D in M. Sed quadratus A æquatur producto ex M in E adſciſcenti G ex conſtructione. Igitur qui fit ex N in D æquatur productis ex M. in D & in E addito G. & [c] quia producti ex M in ipſos D E æquantur producto ex M in F compoſitum ex ipſis, patet productum ex N in D æquari producto ex M in F adſciſcenti G. Rurſus, quia productus ex M in P æquatur productis ex M. in N. & in F, ex quibus P oſtenſus eſt componi, addendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P addito G. æqualis productis ex M in N & in F addito G. Quare loco producti ex M in F adſcito G. ſumendo eum qui oſtenſus eſt æqualis, productum ſcilicet ex N in D. erit productus ex M in P adſcito G. æqualis productis ex N in D & in M. Quare cùm D & M ſimul oſtenſi ſint æquales ipſi N. [d] & ideo producti ex N in D & in M æquentur quadrato ipſius N, erit vtrique productus ex M. in P adſcito G. æqualis quadrato ipſius N. Quod erat demonſtrandum.

a nona, huius. b prima, 2. c prima, 2. d ſecunda, 2.

PROPOSITIO XII.

Si duobus quadratis idem numerus ſigillatim addatur, & ſummæ per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu multatus numero qui quadratis additus eſt, euadit quadratus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 2.
M 6. N 10. P 17.

Sint quadrati A B quorum latera D F, & horum interuallum E. & numerus G addatur ſigillatim ipſis A B. & ſummæ ſigillatim diuidantur per E & fiant quotientes M P. Dico productum ex M in P. detracto numero G euadere quadratum. Sumatur enim N qui fit ſi medius proportionalis inter A & B adſcito G diuidatur per E. Igitur [e] ambo D M æquantur ipſi N. & ambo N F æquantur ipſi P. [f] Quare qui fit ex N in D. æquatur productis ex D in D (ſeu quadrato A) & ex D in M. At quadratus A per conſtructionem eſt æqualis producto ex E in M. detracto G. Igitur productus ex N in D æquatur productis ex M in D & in E detracto G. Quia vero D E componunt F. [g] producti ex M in D & in E æquantur producto ex M in F. Quare productus ex N in D. æquatur producto ex M in F detracto G. Rurſus quia productus ex M. in P æquatur productis ex M in N & in F ex quibus P. componitur, detrahendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P detracto G. æqualis productis ex M in N & in F detracto G. Quare loco producti ex M in F detracto G, ſumendo illi æqualem (vt oſtenſum eſt) productum ex N in D, erit productus ex M in P detracto G, æqualis productis ex N in D & in M. Quia vero D M æquantur ipſi N (vt oſtenſum eſt) [h] producti ex N in D & in M æquantur quadrato ipſius N. Igitur productus ex M in P. detracto G. æquatur quadrato ipſius N. Quod demonſtrandum erat.

e decima huius. f prima, 2. g prima, 2. h ſecunda, 2.

PROPOSITIO XIII.

Si à duobus quadratis auferatur datus aliquis numerus ſigillatim, & reſidua diuidantur ſigillatim per interuallum laterum, duo quotientes, vna cum duplo ſummæ ipſorum multato ſuprадicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet ſi inuicem ducantur, & producto addatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 6. G 10.
K 2. L 3. M 27.
N 36. P 64. Q 361.

Sint quadrati A B. quorum latera C E & horum interuallum D. & ſit datus numerus G. quo detracto ſigillatim ex ipſis A B, & diuidendo reſidua per D fiant quotientes K L, & horum ſummæ duplum multatum ipſo D fit M. Dico tres K L M. præſtare quod proponitur. Etenim à medio proportionali cadente inter A & B detrahendo G, & reſiduum per D diuidendo, fiat quotiens H. Et primò ducto K in L & producto addendo G. fiat N. Dico N eſſe quadratum. Etenim N eſt quadratus ipſius H [i] vt ſuprà demonſtratum eſt. Secundò ducto K in M & producto addendo G. fiat P. dico P eſſe quadratum. [k] Quia enim ſumma duorum K L æquatur duplo ipſius H, & numero D. duplum ipſorum K L. æquabitur quadruplo H & duplo D. Quare auferendo D vtrimque, duplum ipſorum K L detracto D. nempe numerus M æquatur quadruplo H, & ipſi D ſemel ſumpto. Vnde qui fit ex K in M æquatur producto ex K in H quater & in D ſemel. Igitur addito vtrimque numero G. productus ex K in M addito G, (nempe P.) æquatur productis ex K in H quater, & in D ſemel adſcito G. At numerus qui fit ex K in D adſcito G æquatur ipſi A per conſtructionem. Igitur P æquatur ipſi A & producto quater ex K in H. Quamobrem [l] cùm A ſit

i vndecima, huius. k nona, huius. l nona, huius.

[a quinta, huius.] quadratus interualli duorum K H. patet numerum qui fit quater ex K in H. adſcito A [a] eſſe quadratum ſummæ duorum K H. Igitur P eſt talis quadratus.

Denique ducto L in M & producto addendo G, ſi fiat Q. ſimili prorſus argumento oſtendemus Q eſſe quadratum ſummæ duorum H L. Igitur ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO XIV.

Si duobus quadratis addatur ſigillatim quilibet datus numerus, & ſummæ ſigillatim diuidantur per interuallum laterum, duo quotientes, vna cùm duplo ſummæ illorum multato dicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet ſi inuicem ducantur, & à producto detrahatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 10. G 2.
K 6. L 17. M 43.
N 100. P 256. Q 729.

Sint quadrati A B. quorum latera C E, & horum interuallum D. & ipſis A B addendo ſigillatim G, fiant numeri qui diuiſi ſigillatim per D, dent quotientes K L. quorum duplum multatum numero D. fit M. Dico tres K L M. efficere quod proponitur.

Nam primo ducto K in L. & à producto auferendo G ſuperſit N. & ſumatur H quotiens qui fit ſi medius proportionalis cadens inter A & B auctus numero G diuidatur per D. [b] Conſtat igitur N. eſſe quadratum ipſius H.

[b duodecima, huius.] [c decima huius.]

Secundo ducto K in M & à producto detrahendo G ſuperſit P. [c] Quoniam ergo K L ſimul æquantur duplo ipſius H & numero D. patet duplum ipſorum K L detracto G. nempe numerum M. æquari quadruplo ipſius H, & numero D. Quare qui fit ex K in M. æquatur ei qui fit ex K in H quater, & in D ſemel. Ergo detracto vtrimque G. numerus qui fit ex K in M detracto G nimirum P. æquatur eis qui fiunt ex K in H quater, & in D ſemel detracto G. At numerus qui fit ex K in D detracto G æquatur ipſi A per conſtructionem. Igitur P. æquatur ipſi A & producto ex K in H quater. Quoniam igitur A [d] eſt quadratus interualli ipſorum K H. numerus qui fit ex K in H quater adſcito A [e] eſt quadratus ſummæ duorum K H. Igitur P. eſt talis quadratus.

[d decima huius.] [e quinta, huius.]

Denique ducto L in M & à producto detrahendo G ſuperſit Q. ſimili prorſus argumento probabitur Q eſſe quadratum ſummæ amborum H L. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Differentia quælibet duorum quadratorum à medio eorum proportionali, eſt media proportionalis inter eundem quadratum, & quadratum interualli laterum.

H 3 K 2. L 5.
M 4.
G 6. D 10.
A 9. B 15. C 25.

Sint quadrati A C. & medius eorum proportionalis B. ſintque H L. quadratorum latera, quorum interuallum K. cuius quadratus M. Et differentiæ ipſius B à quadratis A C. ſint G D. Dico G eſſe medium proportionalem inter A & M. Itemque D inter C & M. Etenim differentia G [f] fit ex K in H. Quamobrem G [g] eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum H K. nempe inter A & M. Similiter differentia D. fit ex K in L. Igitur D eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum K L. nempe inter M & C. Quamobrem conſtat propoſitum.

[f octaua, huius.] [g vndecima, 8.]

PROPOSITIO XVI.

Datis duobus quadratis ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is ſi adſumat productum ex quadrato interualli laterum, ſiue in amborum ſummam, ſiue in reliquum, quadratum facit.

Sint dati quadrati A B. & ſit E quadratus interualli laterum ſumaturque C duplus ſummæ ipſorum A B E. Dico tres A B C. præſtare quod proponitur.

D 15. E 4. F 8.
A 9. B 25. C 76.

H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 1936.	

[h vndecima, 8.] [i vigeſima, 7.] [k quarta, huius.] [l quarta, 2.]

Quod erat propoſitum.

Primò, enim ducatur A in B & fiat H. ducaturque E in ſummam ipſorum A B & fiat K, ſitque L ſumma ipſorum H K. Dico L eſſe quadratum. Sumatur D medius proportionalis inter ipſos A B. [h] qui vtique fit ex mutua laterum multiplicatione. [i] Igitur H qui fit ex A in B eſt quadratus ipſius D. [k] Sed & ſumma quadratorum A B. æquatur duplo ipſius D & ipſi E. Igitur productus ex E in ſummam ipſorum A B. puta K. æquatur duplo producti ex D in E. & quadrato ipſius E. Quare addito H quadrato ipſius D, ſumma L æquabitur quadratis ipſorum D E. & duplo producti ex D in E. [l] Ergo L quadratus eſt cuius latus eſt ſumma ipſorum D E.

Secundò, ducatur E in reliquum C vnde fiat M. & amborum H M ſumma eſto N. Dico N. eſſe quadratum. Sumatur F duplum ipſius E. Quia ergo C æquatur duplo ipſorum A B E. erit productus ex E in C. puta M. æqualis duplo producti ex F in A B. & duplo quadrati ipſius E. Et quia A B ſimul, vt oſtenſum eſt, æquantur ipſi D bis, & E ſemel productus ex E in A B bis. æquatur producto ex E in D quater, & duplo quadrati ipſius E. Quare totus productus ex E in C. puta M æquatur producto ex E in D quater, & quadruplo quadrati ipſius E ſeu quod idem eſt duplo producti ex D in F. & quadrato ipſius F. Quare addito H quadrato ipſius D. fiet N æqualis quadratis ipſorum D F & duplo producti ex D in F. [a] Ac proinde N eſt quadratus latus habens ſummam ipſorum D F. Quod erat intentum.

[a] quarta, 2.

Tertiò, ducatur A in C. & fiat G. ducaturque E in ſummam ipſorum A C. & fiat P. ſitque amborum G P. ſumma Q. Dico Q eſſe quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipſorum A B E. erit productus ex A in C puta G. æqualis duplo quadrati ipſius A, duplo producti ex A in B ſeu duplo quadrati ipſius D, & duplo producti ex A in E. At duplum quadratorum ab ipſis A D [b] æquatur quadrato ſummæ ipſorum A D, & quadrato interualli ipſorum. Quia vero interuallum hoc [c] eſt medium proportionale inter A & E, [d] quadratus illius æquatur producto ex A in E. Igitur G. æquatur quadrato ſummæ ipſorum A D, & triplo producti ex A in E. Rurſus productus ex E in A C puta P. oſtendetur æqualis triplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B, & duplo quadrati ipſius E. Quare Q compoſitus ex ipſis G P. æquatur quadrato ſummæ amborum A D. ſextuplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B. & duplo quadrati ipſius E. & loco eius qui fit bis ex E in A B. ſumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipſiua E vt oſtenſum eſt in ſecunda parte, erit Q æqualis quadrato ſummæ ipſorum A D. quadruplo producti ex E in A D, & quadruplo quadrati ipſius E. & loco quadrupli ex E in A D ſumendo duplum ex F in A D, & loco quadrupli quadrati ipſius E ſumendo quadratum ipſius F. fit Q æqualis quadrato ſummæ A D, & quadrato F. & duplo producti ex F in A D. [e] Quare Q eſt quadratus ſummæ ipſorum ADF. Quod erat propoſitum.

[b] ſeptima, huius.
[c] decima quinta, huius.
[d] vigeſima, 7.
[e] quarta, 2.

Quartò, ducatur E in B. & fiat R. quo addito ad G. fiat S. Dico S. eſſe quadratum. Quia enim vt oſtenſum eſt, G continet quadratum ſummæ ipſorum A D, & triplum producti ex A in E. huic addendo R productum ex E in B. fiet S. continens quadratum ſummæ ipſorum A D. triplum producti ex E in A. & productum ex E in B. Quare loco producti ex E in A B. ſumendo duplum producti ex E in D cum quadrato ipſius E. patet S æquari quadrato ſummæ amborum A D, & quadrato ipſius E, & duplo producti ex E in A D. A C [f] proinde S. quadratus eſt ſummæ ipſorum A D E. Quod erat intentum.

[f] quarta, 2.

Quintò, ducatur B in C & fiat T. ducaturque E in ſummam ipſorum B C & fiat V. & ſumma ipſorũ T V eſto X. Dico X eſſe quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipſorum A B E, erit productus ex B in C. puta T. æqualis duplo quadrati ipſius B. duplo producti ex B in A, & ex B in E. Et loco producti bis ex B in A. ſumendo illi æqualem duplum quadrati ipſius D. Tum pro duplo quadratorum ab ipſia B D. [g] ſumendo quadratum ſummæ amborum B D cum quadrato interualli eorundem, & pro hoc quadrato interualli ipſorum B D, [h] ſumendo productum ex B in E, fiet totus T æqualis quadrato ſummæ amborum B D, & triplo producti ex B in E. Rurſus autem productus ex E in B C puta V, æqualis eſt triplo producti ex E in B duplo producti ex E in A, & duplo quadrati ipſius E. Quare X compoſitua ex vtroque T V æquatur quadrato ſummæ amborum B D, ſextuplo producti ex E in B. duplo producti ex E in A & duplo quadrati ipſius E. Itaque loco eius qui fit bis ex E in A B ſumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipſius E, erit X æqualis quadrato ſummæ ipſorum B D quadruplo producti ex E in B D. & quadruplo quadrati ipſius E. Quare rurſus loco quadrupli ex E in B D, ſumendo duplum ex F in B D, & loco quadrupli quadrati ipſius E, ſumendo quadratum ipſius F. fiet X æqualis quadrato ſummæ ipſorum B D, & quadrato ipſius F, & duplo producti ex F in B D. [i] Proinde X quadratus eſt ſummæ ipſorum B D F. Quod erat propoſitum.

	D 15.	E 4.	E 8.
	A 9.	B 25.	C 76.
H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304	Z 2936.	

[g] ſeptima, huius.
[h] decima quinta, huius.
[i] quarta, 2.

Denique ducatur E in A & fiat Y. quo addito ad T fiat Z. Dico Z eſſe quadratum. Quia enim, vt oſtenſum eſt, T continet quadratum ſummæ ipſorum B D & triplum producti ex B in E. huic addendo Y productum ex E in A fiet Z. continens quadratum ſummæ ipſorum B D, triplum producti ex E in B & productum ex E in A. Quare loco producti ex E, in A B ſumendo duplum producti ex E in D vnà cum quadrato ipſius E, patet Z æquari quadrato ſummæ amborum B D. & quadrato ipſius E. & duplo producti ex E in B D. A C [k] proinde Z quadratus eſt, cuius latus componitur ex ſumma ipſorum B D E. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

[k] quarta, 2.

PROPOSITIO XVII.

Datis duobus quadratis, ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habebuntur tres numeri, quibus ſi addatur ſigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producunt mutuo ductu, detracto eo qui fit ex quadrato interualli laterum, ſiue in ſummam amborum, ſiue in reliquum remanet quadratus.

	D 15.	E 4.	
A 9.	B 25.	C 76.	
F 8.	F 8.	F 8.	
G 561.	G 561.	N 1428.	N 1428.
H 336.	L 200.	P 404.	R 132.
K 225.	M 361.	Q 1024.	S 1296.
	T 2772.	T 2772.	
	V 468.	Y 68.	
	Z 2304.	Z 2704.	

Sint duo quadrati A B. & quadratus interualli laterum E. & duplum ipſorum A B E. eſto C. addaturque ſingulis A B C. duplum ipſius E puta F. Dico tres A F. B F. C F. præſtare quod dictum eſt.

a prima, 2. Primo enim ducatur A F in B F & fiat G. Ductoque E in reliquum C F. fiat H, quo detracto ex G, maneat K. Dico K eſſe quadratum. [a] Quia enim ducere A F in B F idem eſt, atque ducere A in B & F in F & vtrumque A B in F. patet G continere productum ex A in B. & productum ex F in A B, (ſeu ex E bis in A B.) & quadratum ipſius F, ſeu quadratum ipſius E quater. Rurſus, quia C continet duplum ipſorum A B E. productus ex E in C F, puta H. continet productum ex E in A B bis, & ex E in ſeipſum
b vigeſima, 9. quater. Quare detracto H ex G. reliquus K æquatur producto ex A in B, [b] ſeu quadrato medij proportionalis D. Quod erat propoſitum.

Secundo, ducatur E in ſummam ipſorum A F. B F, & fiat L. quo detracto rurſus ex G. ſuperſit M. Dico M eſſe quadratum. Nam vt oſtenſum eſt, G continet productum ex A in B, & productum ex E bis in A B. & quadruplum quadrati ipſius E. At productus ex E in A. F. B F, puta L. continet productum ex E in A B. & ex E in ſui quadruplum, ſeu quadruplum quadrati ipſius E. Igitur detrahendo L ex G reliquus M manet æqualis producto ex A in B. & producto ex E in A B. Quamobrem M. quadratus eſt per primam partem præcedentis, cuius latus eſt ſumma amborum D E. Quod erat propoſitum.

Tertiò ducatur A F in C F. & fiat N. tum ducatur E in ſummam ipſorum A F C F & fiat P. quo detracto ex N. ſuperſit Q. Dico Q. eſſe quadratum. Quia enim ducere A F in C F idem eſt atque ducere A in C. & F in F. ac demum F in ipſos A C. patet N. continere productum ex A in C. & productum ex F in F ſeu ex E in ſeipſum quater, & productum ex F in A C. ſeu ex E bis in A C. Rurſus productus ex E in A F. C F puta P. continet productum ex E in A C. ſemel, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto P ex N. reliquus Q manet æqualis producto ex A in C & producto ex E in ipſos A C. Quare Q. quadratus eſt per tertiam partem præcedentis cuius latus componitur ex ipſis D A F. Quod erat intentum.

Quartò, Ducatur E in reliquum B F & fiat R quo detracto ex eodem N. maneat S. Dico S. quadratum eſſe. Quia enim ducto E in A F. C F fit P. & ducto eodem E in B F fit R. patet P ſuperare R. producto qui fit ex E in interuallum quo A F. C F ſuperant B F. Atqui loco ipſius C. ſumendo duplum ipſorum A B E. Interuallum quo A F. C F ſuperant B F reperitur continere A ter. F bis. B ſemel. Igitur P ſuperat R producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Porrò quia P Q ſimul
c quarta, conficiunt eundem N. quem & R S. ſimul conficiunt, [c] ſunt in arithmetica medietate P ad R. vt S.
2. poriſm. ad Q. Igitur S. ſuperat Q producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Et loco producti ex E in A B
d quarta, ſemel, [d] ſumendo productum ex E in D bis, & in ſeipſum ſemel, fiet interuallum quo S ſuperat
huius, Q æquale producto ex E bis in ipſos D A F. & quadrato ipſius E. Quare cùm Q oſtenſus ſit quadratus, cuius latus componitur ex ipſis D A F. & quadrato Q addendo quadratum ipſius E & duplum
e quarta, producti ex ipſo E in latus ipſius Q. fiat S. [e] Vtique S. quadratus eſt latus habens compoſitum ex ip-
3. ſis D A F E ſeu ex D A & triplo ipſius E. Quod erat propoſitum.

Quintò, Ducatur B F in C F, & fiat T. tum ducatur E in ſummam ipſorum B F. C F. & fiat V. quo detracto ex T ſuperſit X. Dico X eſſe quadratum. Quia enim T producitur ex B F. in C F. patet T continere productum ex B in C, & productum ex F in F, ſeu ex E in F bis, & productum ex F in B C, ſeu ex E bis in B C. At productus ex E in B F. C F. ſeu V. continet productum ex E in B C. ſemel, & ex E in F bis. Igitur detracto V. ex T. reliquus X. continet productum ex B in C. & productum ex E in B C. Quare X quadratus eſt per quintam partem præcedentis, cuius latus componitur ex ipſis B D F. Quod erat propoſitum.

Denique ducatur E in reliquum A F & fiat Y. quo detracto ab eodem T. ſuperſit Z. Dico & ipſum Z quadratum eſſe. Quia enim ex E in B F. C F fit V. & ex eodem E in A F fit Y, patet V ſuperare

Y producto qui fit ex E in interuallum quo B F. C F ſuperant A F. Sed eodem quo ſuprà, ductu vtentes inueniemus hoc interuallum continere ipſum B ter. F bis. A ſemel. Quare V. ſuperat Y. producto ex E in B ter, in F. bis, in A ſemel. Et loco producti ex E in A B ſemel, ſumendo illi æqualem productum [a] ex E in D bis, & in ſeipſum ſemel fiet interuallum quo V ſuperat Y æquale producto ex E in ipſos D B F bis, & quadrato ipſius E. Quoniam vero V X. ſimul, æquantur ipſis Y Z ſimul, [b] ſunt in æquali differentia V Y. & Z X. Ergo interuallum quo Z. ſuperat X. æquatur duplo producti ex E in ipſos D B F. & quadrato ipſius E. Quamobrem cùm X oſtenſus ſit quadratus, cuius latus componitur ex ipſis B D F. patet ad ipſum X. addendo quadratum ipſius E. & duplum producti ex ipſo E in latus ipſius X, [c] compoſitum Z eſſe quadratum cuius latus conſtat ex ipſis D B F E ſeu ex D B & triplo ipſius E. Quare ex omni parte conſtat propoſitum.

[a] quarta, huius. [b] quarta, 1. poriſm. [c] quarta, 2.

PROPOSITIO XVIII.

Si planus ſub duobus numeris contentus, ducatur in compoſitum ex ipſis, idem fiet numerus, atque ſi quadratus primi ducatur in ſecundum & quadratus ſecundi ducatur in primum.

D 12. E 18.
A 2. B 3.
C 6.

Sint duo numeri A B. & planus ſub ipſis contentus C. quo ducto ſigillatim in ipſos A. B. fiant D E. patet ergo [d] ſummam ipſorum D E. æqualem eſſe producto ex C in compoſitum ex ipſis A B. Hanc igitur ſummam dico æqualem eſſe productis ex quadrato ipſius A in B, & ex quadrato ipſius B in A. Nam ſumptis tribus numeris A. B & A rurſus, [e] idem gignetur numerus quomodocunque & quouis ordine inter ſe ducantur. Quare ducto A in A & producto, nempe quadrato ipſius A ducto in B. fiet idem D, qui fit ducto A in B & producto C in A. Eodem argumento probabitur numerum E fieri ducto quadrato ipſius B in A. Quamobrem conſtat propoſitum.

[d] prima, 2. [e] tertia, 1. Poriſm.

PROPOSITIO XIX.

Si numerus ſecetur in duas partes, cubus totius æqualis eſt cubis partium, & numero qui fit ter ex toto numero in planum ſub partibus comprehenſum.

A...C..B
D.........G....K............M

Sit numerus A B ſectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis partium A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum ſub ipſis A C. C B comprehenſum. Sumatur D M quadratus ipſius A B. [f] qui cùm ſit æqualis quadratis ipſorum A C. C B & plano bis ſub ipſis comprehenſo, eſto D G quadratus ipſius A C. & G K quadratus ipſius C B. & K M planus bis ſub A C. C B contentus. Itaque patet ex definitione cubi ex toto A B in totum D M produci cubum ipſius A B. [g] Ergo idem cubus producetur ductis ſingulis partibus ipſius A B in ſingulas ipſius D M. Ducto autem A C in ſuum quadratum D G. fit cubus ipſius A C. & ducto C B in ſuum quadratum G K. fit cubus ipſius C B. Ergo iam habemus cubos partium. Reſtat vt ducamus A C in G K, & C B in D G, tum vtrumque A C. C B in K M. [h] Atqui ducere ipſos A C. C B in K M. idem eſt atque ducere totum A B in K M. Quare cùm K M. ſit planus bis ſub partibus A C. C B contentus, patet ducere A C. C B in K M. idem eſſe atque ducere totum A B in planum bis ſub partibus comprehenſum. Rurſus autem ducere A C in G K, & C B in D G, [i] idem eſt atque ducere totum A B in planum ſub partibus comprehenſum. Quamobrem harum omnium multiplicationum producta ſimul, (ſeu cubus totius A B) æquantur cubis ipſorum A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum ſub ipſis A C. C B. comprehenſum. Quod erat oſtendendum.

[f] quarta, 2. [g] ſchol. prima, 2. [h] prima, 2. [i] decima octaua, huius.

PROPOSITIO XX.

Si numerus ſecetur in duas partes, cubus totius æqualis eſt cubis partium, & numeris qui fiunt ex qualibet parte in quadratum alterius ter.

A...C..B

Sit numerus A B ſectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis ipſorum A C. C B, & numeris qui fiunt ter ex quadrato ipſius A C in C B, & ex quadrato ipſius C B in A C. Etenim [k] cubus totius A B æquatur cubis ipſorum A C. C B, & numero qui fit ter ex A B in planum ſub A C. C B. Sed numerus qui fit ex A B in planum ſub A C. C B. [l] æquatur productis ex qualibet parte in quadratum alterius. Quare numerus qui fit ter ex A B in planum ſub partibus, æquatur eis qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Igitur cubus totius A B æquatur cubis partium & numeris qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Quod demonſtrandum erat.

[k] decima nona, huius. [l] decima octaua, huius.

PROPOSITIO XXI.

Duorum cuborum interuallum, æquatur cubo interualli laterum, & numero qui fit ter ex eodem interuallo laterum in planum ſub lateribus comprehenſum.

A . . : . D . . B C
E 216. F 64.

Sint inæquales numeri A B. B C. quorum interuallum D B, ita vt A D. B C. ſint æquales. Et cubus ipſius A B eſto E, cubus autem ipſius B C ſit F. Dico interuallum ipſorum E F. æquari cubo ipſius D B. & numero qui fit ter ex D B in planum ſub A B. B C. Etenim [a] cubus totius A B, nimirum E æquatur cubis partium A D D B & numero qui fit ter ex A B in planum ſub A D. D B. quare cùm A D ſit æqualis B C. & ideo cubus ipſius A D ſit F. patet E æquari ipſi F & cubo ipſius D B & numero qui fit ter ex A B in planum ſub A D. D B. Sumptis autem tribus numeris A B. A D. D B. [b] idem producetur numerus quouis ordine ij inter ſe ducantur. Quare idem numerus qui fit ex A B in planum ſub A D. D B. fiet etiam ex D B in planum ſub A B. A D. ſeu ſub A B. B C. Quamobrem cubus E æquatur cubo F, cubo ipſius D B, & numero qui fit ter ex D B in planum ſub A B. B C. Itaque à cubo E auferendo cubum F, remanet interuallum cuborum æquale cubo interualli laterum D B, & numero qui fit ter ex eodem D B in planum ſub lateribus A B. B C comprehenſum. Quod demonſtrandum erat.

[a] decima nona, huius.

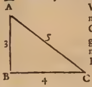
[b] tertia, 1. Poriſm.

CLAVDII

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI
IN DIOPHANTVM PORISMATVM
Liber Tertius.

DEFINITIO I.

TRiangulum rectangulum in numeris conſtitui dicitur, cùm tres exhibentur numeri, ita vt maioris quadratus, quadratis reliquorum ſimul ſumptis æqualis ſit.



Vt tres numeri 3. 4. 5. dicuntur conſtituere triangulum rectangulum quia maioris 5. quadratus 25. æqualis eſt quadratis 9. & 16. reliquorum 3. & 4. Cuius rei ratio pendet à quadrageſima ſeptima, 1. Euclidis. Nam verbi gratia, ſi ſit triangulum rectangulum A B C. cuius angulus rectus B. demonſtrauit Euclides quadratum lateris A C. æquari quadratis ipſorum A B. B C.

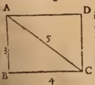
DEFINITIO II.

Maius latus trianguli rectanguli, dicitur hypotenuſa. Reliqua duo, latera circa rectum, & horum alterum, baſis: alterum vocatur Cathetus ſeu perpendiculum.

Sic in ſuperiore diagrammate A C vocatur hypotenuſa ſeu ſubtendens, quia ſubtendit angulum rectum. Reliqua vero latera A B. B C dicuntur latera circà rectum, quia rectum angulum comprehendunt. Et horum alterum, puta B C dicitur baſis, alterum A B dicitur perpendiculum, ſi triangulum concipiatur inniti lateri B C. vel è conuerſo B C dicetur perpendiculum, & A B baſis, ſi triangulum ipſi A B niti concipiatur.

DEFINITIO III.

Area trianguli rectanguli eſt ſemiſſis plani contenti ſub lateribus circa rectum.



Sic poſitis lateribus circa rectum A B. B C. 3. & 4. cùm planum ſub ipſis ſit 12. erit area trianguli rectanguli A B C. numerus 6. Et ratio eſt euidens. Nam ſi perficiatur parallelogrammum rectangulum A B C D. patet eius aream fieri ducto latere A B in B C. Quamobrem cùm triangulum A D C. triangulo A B C ſit æquale, manifeſtum eſt ipſum A B C. eſſe dimidium totius parallelogrammi, atque adeo eius aream eſſe dimidium producti ex A B in B C.

DEFINITIO IV.

Similia triangula rectangula dicuntur, quæ latera habent proportionalia.

Cùm ſcilicet eſt hypotenuſa vnius ad hypotenuſam alterius, ſicut baſis ad baſim, & perpendiculum ad perpendiculum, qualia ſunt triangula 3. 4. 5. & 12. 16. 20.

DEFINITIO V.

A duobus planis ſimilibus formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex eorum ſumma, & eorundē interuallo, & duplo medij proportionalis, conſtant latera trianguli.

Sic à planis ſimilibus 3. & 12. dicetur formari triangulum. 15. 9. 12. quia 15. eſt ſumma planorum ſimilium, 9. interuallum eorundem, 12. duplum medij proportionalis.

DEFINITIO VI.

A duobus quibuſcunque numeris formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex aggregato & ex interuallo quadratorum ab ipſis, & ex duplo plani ſub ipſis numeris contenti, conſtant latera trianguli.

Sic à duobus numeris 2. & 3. formari dicitur triangulum 13. 5. 12. Quia 13. eſt aggregatum quadratorum ab ipſis 2. & 3. & 5. eſt eorundem quadratorum interuallum, & 12. eſt duplum plani ſub 2. & 3. contenti. Hos autem duos modos formandi triangulum rectangulum legitimos eſſe demonſtrabimus hoc libro, propoſitione tertia & quinta.

OBSERVATIO D. P. F.

A Tribus numeris in proportione Arithmeticâ poſſumus formare triangulum, ſi ſecundum hanc definitionem ſextam formemus illud à medio & differentiâ, Nam ſolidum ſub tribus ductum in differentiam faciet aream dicti trianguli, atque ideo ſi differentia ſit vnitas, ſolidum ſub tribus erit area trianguli.

DEFINITIO VII.

A duobus datis triangulis rectangulis, tertium efformari dicitur, cùm productus ex hypotenuſa 1′. in hypotenuſam 2′. fit hypotenuſa 3′. At aggregatum productorum ex baſi 1′. in baſim 2′. & ex perpendiculo 1′. in perpendiculum 2′. fit alterum latus circa rectum 3′. Denique productorum ex baſi 1′. in perpendiculum 2′. & ex baſi 2′. in perpendiculum 1′. minus de maiori ſubtrahendo, fit alterum latus 3′.

Sic datis duobus triangulis 5. 4. 3. & 13. 12. 5. fiet tertij hypotenuſa productum ex 5. & 13. nempe 65. alterum latus circa rectum erit aggregatum numerorum 48. & 15. qui fiunt ex baſi in baſim & ex perpendiculo in perpendiculum. Tertium vero latus erit quod relinquitur auferendo productum ex 4. in 5. nempe 20. à producto ex 3. in 12. nempe à 36. Erunt igitur latera omnia tertij trianguli. 65. 63. 16. Hic modus etiam demonſtrabitur infrà, propoſitione decima.

PROPOSITIO I.

Si latera trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicentur aut diuidantur, fit aliud triangulum rectangulum ſimile priori.

Hanc & ſequentem propoſitionem omnibus triangulis ſimilibus in vniuerſum applicatam demonſtrauit Euclides libro ſexto ſed ex propriis numerorum principiis eruto demonſtrationis medio, libet hic vtramque triangulis rectangulis ſingulariter applicare. Sint trianguli rectanguli latera circa rectum A B, & hypotenuſa G. & horum quadrati D E F [a] ita vt F ſit æqualis ambobus D E. ductoque eodem numero G in ipſos A B C. fiant H. K. L. quorum quadrati M. N P. Dico H K L conſtituere triangulum rectangulum ſimile priori, nimirum quadratum P. ambobus M N. eſſe æqualem, & latera H K L. eſſe proportionalia lateribus A B C. & quidem hoc vltimum patet [b] cùm fiant H K L. ex eodem G in ipſos A B C. Primum autem probatur. [c] Quia enim rationes ipſorum D E F ad ipſos M N P ſunt duplicatæ rationum ipſorum A B C ad ipſos H K L, cùm vt oſtenſum eſt, ſit A ad H, vt B ad K & vt C ad L, erit etiam D ad M vt E ad N. & vt F ad P. & permutando erit D ad F vt M ad P. & E ad F vt N ad P. Cùm ergo ſit D primus ad F ſecundum, ſicut M tertius ad P. quartum, & rurſus ſit E quintus ad F ſecundum, ſicut N ſextus ad P quartum; [d] Erunt & D E ſimul, primus ſcilicet & quintus ad F ſecundum, ſicut M N ſimul, nimirum tertius & ſextus ſimul ad P quartum. Sed D E ſimul æquantur ipſi F ex hypotheſi. Ergo & M N ſimul æquantur ipſi P. [e] Quare H K L conſtituunt triangulum rectangulum ſimile priori. Quod demonſtrandum erat. Eadem porro diuiſionis ratio eſt quæ multiplicationis vt manifeſtum eſt. Igitur conſtat propoſitum.

A 3. B 4. C 5. D 9. E 16. F 25.
G 2.
H 6. K 8. L 10. M 36. N 64. P 100.

[a] definitio prima.
[b] decima ſeptima 7.
[c] vndecima, 8.
[d] vigeſima quarta, 5.
[e] definitio prima.

PROPOSITIO II.

Areæ ſimilium triangulorum rectangulorum ſunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Sint latera triangulorum rectangulorum ſimilium. A B C. D E F. & ſint A & D hypotenuſæ B C.

K 48. G 24.
A 10. B 8. C 6.
D 5. E 4. F 3.
L 12. H 6.

E F latera circa rectum, ductoque B in C fiat K. cuius ſemiſſis numerus G. [a] area ſcilicet trianguli A B C. ſimiliter ducto E in F fiat L, cuius ſemiſſis H. area trianguli D E F. Cùm ergo ſimilia ſint triangula, [b] erit A ad D vt B ad E & vt C ad F. Dico itaque eſſe aream G ad aream H in duplicata ratione lateris B ad latus E, vel lateris C ad latus F. Cùm enim plani K L habeant latera proportionalia, [c] erunt plani ſimiles, & erit K ad L in duplicata ratione lateris B ad latus E vel C ad F. Sed quia G eſt dimidium ipſius K, & H eſt dimidium ipſius L, eſt G ad H vt K ad L. Igitur & G ad H eſt in duplicata ratione laterum B C. ad latera E F. Quod demonſtrandum erat.

a defin. 3.
b defin. 4.
c decimo octaua, 8.

SCHOLIVM.

Quia igitur ſumpto denominatore rationis cuiuslibet, eius quadratus eſt denominator rationis duplicata illius, ſequitur ſumpto denominatore rationis laterum, eius quadratum eſſe denominatorem rationis arearum, vt in propoſito paradigmate, quia rationis inter latera denominator eſt 2. rationis inter areas denominator eſt 4. quadratus ipſius 2. & ſic de alijs.

PROPOSITIO III. *Problema 1.*

A duobus ſimilibus planis numeris, triangulum rectangulum efformare.

A 3. B 6. C 12.
D 9. E 12. F 15.

Sint duo plani ſimiles A C à quibus oporteat formare triangulum rectangulum. [d] Sumatur B medius proportionalis ipſorum A C. Et ſit amborum A C. ſumma F, interuallum D & duplum ipſius B eſto E. Patet tres D E F efformatos eſſe ab ipſis A B C vt traditum eſt definitione quinta. Dico itaque tres D E F conſtituere triangulum rectangulum. Quia enim F eſt ſumma amborum A C [e] erit quadratus ipſius F æqualis quadruplo plani ſub A & C. & quadrato interualli ipſorum A C, qui eſt quadratus ipſius D, [f] At quadruplum plani ſub A & C. æquatur quadruplo quadrati ipſius B. cùm A B C ponantur proportionales, [g] & quadruplum quadrati ex B, eſt quadratus dupli ipſius B, nimirum ipſius E. Igitur quadratus ipſius F eſt æqualis quadratis ipſorum D E. [h] atque adeo D E F conſtituunt triangulum rectangulum. Quod erat propoſitum.

d decimo octaua, 8.
e quinta 2. poriſm.
f vigeſimo, 7.
g Schol. quarta, 2.
h defin. 2.

COROLLARIVM.

Summa duorum planorum ſimilium conſtituit hypotenuſam trianguli rectanguli.

Hinc patet quemlibet numerum ſtatui poſſe hypotenuſam trianguli rectanguli, cùm quilibet numerus diuidi poſſit in duos datam rationem ſeruantes, atque adeo infinitis modis componi poſſit ex duobus planis ſimilibus, vnde & erui poteſt canon ad diuidendum quemlibet quadratum in duos quadratos infinitis modis, vt docebimus ad octauam 2. Diophanti.

PROPOSITIO IV.

Cuiuslibet trianguli rectanguli hypotenuſa componitur ex duobus planis ſimilibus.

D 100. E 64. F 36.
A 10. B 8. C 6.
G...... H .. K.. L....... M

Sit hypotenuſa trianguli rectanguli A & latera circa rectum B C. & ipſorum A B C quadrati D E F. ita vt D ipſis E F ſit æqualis. Dico A componi ex duobus planis ſimilibus. Vel enim A eſt par, vel impar. Sit primum par. Ergo & D par eſt, [i] & pariter par. Igitur non erit ipſorum E F alter par, alter impar, alioquin [k] compoſitus ex ipſis D eſſet impar, contra id quod oſtenſum eſt. Non erit etiam vterque ipſorum E F impar, [l] nam ſic vterque ipſorum exceederet pariter parem vnitate, atque adeo compoſitus ex ipſis D. exceederet pariter parem binario, [m] & eſſet pariter impar tantum, at oſtenſus eſt pariter par. Reliquitur ergo vtrumque E F eſſe parem. Quare [n] & vterque B C. par eſt. Itaque ſumatur ipſi A æqualis G L atque adeo par, & addatur ei L M æqualis alteri laterum circa rectum puta C erit igitur & L M par. [m] Quare totus G M par etiam erit. Secetur ergo bifariam in K & ipſi K L ſumatur æqualis H K. ita vt reliquus G H. reliquo L M ſeu C. ſit æqualis, Cùm ergo G L componatur ex duobus G K. K L. [o] erit quadratus totius G L, ſeu D. æqualis quadruplo plani ſub G K. K L. & quadrato interualli G H qui eſt F. At idem D. eſt æqualis [n] quadratis E F ex hypotheſi, ergo quadrati E F æquantur quadruplo plani ſub G K. K L. & quadrato F. Quare ablato vtrimque F. remanet E æqualis quadruplo plani ſub G K. K L. Quamobrem planus [q] ſub G K K L æquatur quadranti ipſius E, ſeu quadrato ſemiſſis ipſius B [p] & ipſe ſemiſſis ipſius B eſt medius proportionalis inter G K. & K L. vnde ſequitur ipſos [q] G K. K L. eſſe planos ſimiles. Quamobrem A æqualis G L. componitur ex duobus planis ſimilibus. Quod erat propoſitum.

i vigeſima r poriſm.
k Schol. vigeſima tertia. 9.
l vigeſima prima 1. poriſm.
m vndecima. 1. poriſm.
n vigeſima prima, 9.
o quinta. 2. poriſm.
p vigeſima
q vigeſimo 8.

D 169. E 144. F 25.
A 13. B 12. C 5.
G.....H....K....L.....M

Iam vero ſit A impar, atque ideo & D impar. Igitur ex ipſis E F alterum parem, alterum imparem eſſe neceſſe eſt. Nam ſiue vterque ponatur par, ſiue vterque impar, a erit compoſitus ex ipſis D par, contra hypotheſim. Sit ergo E par. F impar. Igitur & B par erit, & C impar. Itaque ſumpto G L æquali ipſi A, & ideo impare, addatur ei L M impari C. æqualis. b erit ergo totus G M par. Quare ſecetur bifariam in K & ipſi K L. ſumatur æqualia H K, ita vt G H remaneat æqualis ipſi L M. Tunc, vt prius oſtendemus, quadratum ex G L. ſeu D æquari quadruplo plani ſub G K. K L. & quadrato interualli G H qui eſt F. & tandem quadratum E æquari quadruplo plani ſub G K. K L. atque ideo planum ipſum ſub G K. K L æquari quadrato ſemiſſis ipſius B. Vnde ſequitur ipſos G K. K L eſſe planos ſimiles. Quamobrem A componitur ex duobus plania ſimilibus. Quod erat oſtendendum.

a vigeſima prima & vigeſima ſecũda 9.
b ſchol vigeſimæ tertiæ 9.

SCHOLIVM.

Hinc patet qui ſint illi plani ſimiles ex quibus componitur hypotenuſa trianguli. Nam ſi hypotenuſa addatur & adimatur vtrumlibet laterum circa rectum, ſemiſſes ſummæ, & interualli exhibebunt planos illos ſimiles.

Vnde rurſus collige ſi hypotenuſa ſit numerus par, eam ſemper bis componi ex duobus planis ſimilibus integris. Nam tunc vt oſtenſum eſt, vtrumque latus circa rectum eſt par, quare vtrumlibet addatur & adimatur hypotenuſæ, erunt ſummæ & interualla numeri pares, & eorum ſemiſſes in integris habebuntur. Sic poſita hypotenuſa 10. ſi ei addas & adimas 6. fiet ſumma & interuallum 16. & 4. quorum ſemiſſes 8. & 2. ſunt plani ſimiles ex quibus 10. conſtat. Rurſus ſi eidem 10. addas & adimas alterum latus 8. fit ſumma & interuallum 18. & 2. quorum ſemiſſes 9. & 1. ſunt alij duo plani ſimiles ex quibus 10. componitur.

Si vero hypotenuſa ſit impar, cùm vt oſtenſum eſt, alterum laterum circa rectum ſit par, alterum impar. Componetur hypotenuſa ſemel tantum ex integris duobus planis ſimilibus, qui habentur ſi ei addatur & adimatur latus illud quod eſt impar, & ſummæ & interualli ſemiſſes ſumantur; ſed ſi hypotenuſæ addatur & adimatur latus par, tam ſumma quàm interuallum impar erit, atque adeo ſemiſſes eorum non habebuntur in integris.

PROPOSITIO V. *Probl. 2.*

A duobus quibuſcumque inæqualibus numeris triangulum rectangulum formare.

A 2. B 5.
C 4. D 10. E 25.
F 29. G 21. H 20.

Sint duo numeri inæquales A B à quibus oportet formare triangulum rectangulum. Sint ipſorum A B quadrati C E. & productus ex A in B. eſto D. Tunc duorum C E ſumma eſto F, & eorundem interuallum G. & ſit H duplum ipſius D. Dico F. G. H eſſe triangulum rectangulum quæſitum. Nam ipſos F G H formari ab ipſis A B vt traditum eſt definitione ſexta manifeſtum eſt. Reſtat probandum eoſdem F G H conſtituere triangulum. Quoniam ergo C E ſunt plani ſimiles, & D medius eorum proportionalis, patet ab ipſis C E formatos eſſe F G H, atque adeo F G H conſtituere triangulum rectangulum per tertiam huius. Quare conſtat propoſitum

SCHOLIVM.

Inæquales numeros eſſe oportet. Alioquin ſi æquales eſſent, quadrati quoque eorum eſſent æquales, & haberi non poſſet latus circa rectum quod eſt interuallum quadratorum. Cæterum patet modum hunc formandi triangulum à duobus quibuſcumque numeris non differre ab eo qui traditus eſt propoſitione tertia, ſi loco laterum ſumantur ipſa quadrata & ab ipſis concipiatur formari triangulum.

PROPOSITIO VI.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur quadratis ſummæ extremorum, & interualli mediorum. Itemque quadratis ſummæ mediorum, & interualli extremorum.

H 8. K 1.
A 2. B 4. C 3. D 6.
G 7. L 4.

Sint A B C D quatuor numeri proportionales, ſit videlicet A ad B vt C ad D. & ſit extremorum ſumma H, mediorum interuallum K. Rurſus ſit mediorum ſumma G. interuallum extremorum L. Dico quadratorum à ſingulis A B C D aggregatum æquari tum quadratis ipſorum H. K. tum quadratis G L. Quia enim c quadratus H æqualis eſt quadratis partium A & D & duplo plani ſub A & D ſeu plani ſub B & C. duplum autem plani ſub B & C cum quadrato inter-

c quarta 2.

ualli eorum K [a] æquatur quadratis ipſorum B C. Manifeſtum eſt quadratos ſingulorum A B C D æquari quadratis ipſorum H K. Eadem protſus ratione, quia quadratus abs G. æquatur quadratis partium B. C. & plano bis ſub B & C. ſeu ſub A & D. & planus bis ſub A & D vna cum quadrato [b] interualli eorum L. æquatur quadratis ipſorum A D, ſequitur quadratos abs G & L æquari rurſus quadratis à ſingulis A B C D. Quamobrem conſtat propoſitum.

a decima nono, 7.
b quarta, 2. poriſm.

PROPOSITIO VII.

Si numerus ex duobus inæqualibus quadratis compoſitus; ducatur in alium compoſitum quoque ex duobus inæqualibus quadratis, qui non ſint proportionales iis ex quibus prior componitur, producetur numerus qui componetur bis ex duobus quadratis.

C 65.
A 5. B 13.
D 1. E 4. F 4. G 9.
H 1. K 2. L 2. M 3.
N 2. P 4. Q 3. R 6.

Sit A compoſitus ex duobus quadratis inæqualibus D E. itemque B compoſitus ex alijs quadratis inæqualibus F G. qui non ſint proportionales ipſis D E ductoque A in B. fiat C. Dico C componi bis ex duobus quadratis. Etenim quadratorum D. E. F. G latera ſunto H K L M. ductoque L. in ipſos H K fiant N P. & ducto M in eoſdem H K fiant Q R. [c] Erit igitur tam N ad P quàm Q ad R ſicut H ad K. Quare ipſi N·P.Q.R. ſunt proportionales. Quia verò ducere A in B [d] idem eſt ae ducere ſingulos DE in ſingulos FG. At ex ſingulis quadratis D E in ſingulos quadratos F G. fiunt quadrati quatuor quorum latera ſunt ipſi N. P. Q. R. qui fiunt ea ſingulis lateribus HK in ſingula latera LM. patet C æqualem eſſe quadratis ipſorum N. P. Q. R. [e] ſed quadrati ipſorum N. P. Q. R. æquantur tum quadrato ſummæ extremorum N R. & quadrato interualli mediorum P Q. tum quadrato ſummæ mediorum P Q. & quadrato interualli extremorum N R. Igitur & C æquatur tum quadrato ſummæ extremorum, & quadrato interualli mediorum; tum quadrato ſummæ mediorum, & quadrato interualli extremorum, ac proinde componitur bis ex duobus quadratis. Quod erat demonſtrandum.

c decimo ſeptima 7.
d ſchol. primæ, 2.
e ſexto, huius.

SCHOLIVM.

Hic dua veluti conditiones apponuntur. Prima vt vterque A B componatur ex quadratis inæqualibus. Secunda vt quadrati componentes A non ſint proportionales componentibus B. Quarum conditionum vt neceſſitas appareat, ponatur alter ipſorum puta B componi ex quadratis æqualibus F G. Igitur & latera L. M. erunt æqualia. Quare ipſi N & Q. qui fiunt ex eodem H in L & in M. æquales erunt, ſimiliter æquales erunt ipſi P R cùm fiant ex eodem K in æquales numeros L. M. Patet igitur extremorum N R ſummam æquari ſummæ mediorum P Q & vtrorumque etiam idem eſſe interuallum. Quare C. non exinde componetur bis ex duobus quadratis, ſed tantum ſemel, nimirum ex quadrato ſummæ extremorum, vel mediorum, & ex quadrato interualli eorundem.

C 136.
A 17. B 8.
D 16. E 1. F 4. G 4.
H 4. K 1. L 2. M 2.
N 8. P 2. Q 8. R 2.

Iam verò quadrati D E ſint proportionales quadratis F G. Ergo & latera erunt proportionalia, eritque H ad K. ſicut L ad M. [f] Quare planus ſub extremis H M, puta Q. æqualis erit plano ſub mediis nempe ipſi P. Quamobrem cùm mediorum P. Q. nullum ſit interuallum, non poterit concludi numerum C. componi ex duobus quadratis, eò quod æqualis ſit quadrato ſummæ extremorum N R, & quadrato interualli mediorum P Q. Sed tantum oſtendi poterit C componi ſemel ex duobus quadratis, quia æquatur quadrato ſummæ mediorum P Q & quadrato interualli extremorum N. R. Sed & hinc conſtat ipſum C eſſe quadratum, æqualem ſcilicet quadrato ſummæ extremorum N R. Quod & ipſum aliunde arguitur. Quia enim eſt D ad F vt E ad G, [g] erit & vterque D E ſimul ſeu A ad vtrumque F G ſimul ſeu ad B. ſicut D ad F. Quare cùm D F ſint quadrati, eſt A ad B in ratione quadrati ad quadratum [h] ac proinde A B ſunt plani ſimiles, [i] & ex eorum mutuo ductu productus C eſt quadratus.

C 100.
A 5 B 20.
D 1. E 4. F 4. G 16.
H 1. K 2. L 2. M 4.
N 2. P 4. Q 4. R 8.

f decimo nono, 7.
g duodecima, 7.
h vigeſima ſexta, 8.
i prima, 9

Attamen in propoſitionis conditione dixi potius quadratos ex quibus A componitur non debere eſſe proportionales quadratis componentibus B. quàm A B non debere eſſe planos ſimiles. Quià plani ſimiles non omnino excludendi erant, ſed tantum quatenus ex quadratis proportionalibus componuntur; nam ſi dentur plani ſimiles qui componantur ex quadratis minime proportionalibus, ij optimè ſatisfacient propoſito quales ſunt 5. & 125. quorum ille componitur ex quadratis 1. & 4. iſte vero ex quadratis 4. & 121. qui non ſunt illis proportionales. Vnde nihil obſtat quo minus per hanc propoſitionem concludamus productum ex 5. in 125. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ex 225. & 400. Itemque ex 576. & 49.

PROPOSITIO VIII.

Si duorum triangulorum rectangulorum latera circa rectum proportionalia fuerint, ſimilia erunt triangula. Sed & ſi fuerit hypotenuſa primi ad alterum latus eiuſdem, ſicut hypotenuſa 2. ad alterum illius latus, ſimilia erunt ipſa triangula.

G 25. H 16. K 9.
A 5. B 4. C 3.
D 10. E 8. F 6.
L 100. M 64. N 36.

Demonſtratur hoc ab Euclide in omnibus triangulis lib. 6. prop. ſexta & ſeptima. Sit triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenuſa A. Itemque triangulum rectangulum D E F cuius hypotenuſa D. & primo ſit B ad E ſicut C ad F. Dico triangula eſſe ſimilia. Sumantur G H K quadrati ipſorum A B C. Itemque L M N. quadrati ipſorum D E F. Cùm ergo ſit B ad E vt C ad F, erit & H ad M vt K ad N [a] cùm vtraque ratio ſit eiuſdem rationis duplicata. [b] Igitur & antecedentes ſimul H K ſeu G. ad conſequentes ſimul M N. ſeu ad L. erunt vt H ad M vel K ad N. Quare cùm ſit G ad L vt H ad M vel vt K ad N. [c] erit & A ad D vt B ad E & vt C ad F. Atque ideo tota triangula ſimilia erunt ex definitione. Quod erat propoſitum.

a vndecima, 8.
b duodecima, 7.
c vndecima, 8.

Deinde ſit A ad D vt B ad E. Dico rurſus ſimilia eſſe triangula. Etenim quia eſt A ad D vt B ad E, erit & G ad L vt H ad M. Quare permutando erit G ad H vt L ad M. & diuidendo erit K ad H vt N ad M. & rurſus permutando erit K ad N vt H ad M. Igitur eſt & C ad F vt B ad E vel vt A ad D. Ac proinde ſimilia ſunt triangula. Quod erat demonſtrandum

PROPOSITIO IX.

A proportionalibus numeris formata triangula, ſimilia ſunt.

E 4. F 1. G 36. H 9.
A 2. B 1. C 6. D 3.
K 5. L 3. M 4. N 45. P 27. Q 36.

Sint proportionales numeri A B. C D. quorum quadrati E F. G H [d] à quibus formentur triangula rectangula, ſit videlicet K. ſumma ipſorum E F, at L eorundem interuallum, M duplum medij proportionalis. Similiter ſit N. ſumma ipſorum G H. At P eorundem interuallum. Q duplum medij proportionalis. Dico triangula K L M. N P Q. eſſe ſimilia. Quia enim eſt A ad B vt C ad D. erit & E ad F vt G ad H & componendo erit vterque E F ſimul, nempe K ad F. ſicut ambo G H, nempe N. ad H. Rurſus quia eſt E ad F vt G ad H, diuidendo & conuertendo, erit F ad L, ſicut H ad P. Cùm ergo ſit K ad F vt N ad H, & rurſus F ad L, vt H ad P. erit ex æquo K ad L. vt N ad P. [e] Quamobrem ſimilia erunt triangula K L M. N P Q. Quod erat propoſitum. Eademque erit demonſtratio ſi formentur triangula à planis ſimilibus proportionalibus vt traditum eſt prop. tertia. Nam ſi ponantur huiuſmodi plani E F. G H. ab eis formata erunt triangula K L M. N P Q. quæ oſtendentur ſimilia vt prius.

d quinta, huius.
e octaua, huius.

PROPOSITIO X. *Problema 3.*

A datis duobus triangulis non ſimilibus, efformare alia duo.

A 5. B 12. C 13.
D 3. E 4. F 5.

K 36 H 15. | T 39.
L 20. G 48. | V 52.

M 56. N 33. | R 65.
P 16. Q 63.

Sit triangulum rectangulum A B C. & aliud non ſimile D E F, à quibus oporteat efformare alia duo; ducatur baſis A in baſim D, & perpendiculum B in perpendiculum E & fiant H G. Tum ducatur baſis D in perpendiculum B & baſis A in perpendiculum E & fiant K L. Deinde additis K & L ſimul fiat M. & ex duobus H G minor de maiore auferatur & ſuperſit N. Similiter addantur H G. & fiat Q & ex ipſis K L minor de maiore detrahatur, & ſuperſit P. Denique ducatur hypotenuſa C. in hypotenuſam F & fiat R. Dico M N R. & P Q R eſſe quæſita triangula. Primum enim ea formata eſſe conſtat à datis triangulis, vt traditum eſt definitione ſeptima, ſi videlicet latera A D. vel B E nunc vt baſes nunc vt perpendicula conſiderentur. Igitur reſtat ſolum probandum M N R conſtituere triangulum rectangulum, itemque P Q R. Ducatur C in ipſos D E & fiant T V. Cùm ergo idem C ductus in ſingulos D E F fecerit ipſos T V R [f] patet T V R conſtituere triangulum rectangulum, & quadratum ab R æquari quadratis abs T, & V. Similiter quia idem D ductus in ſingulos B A C, producit ipſos K H T, conſtituunt & hi triang. rect. & quadratus abs T æquatur quadratis abs K & H. Rurſus quia idem E ductus in ſingulos A B C, producit ipſos L G V, conſtituunt & hi triang. rect. & quadratus ab V æquatur quadratis abs L. & G. Quare cùm quadratus ab R ſit oſtenſus æqualis quadratis abs T & V, erit quadratus ab R æqualis quadratis à ſingulis K H L G [g] Quoniam verò ex eodem D in ipſos B A producuntur K H. erit K ad H vt B ad A. Similiter quia ex E in eoſdem B A fiunt G L. erit G ad L vt B ad A, ac proinde erit K ad H vt G ad L. Quamobrem [h] aggregatum quadratorum à ſingulis K H L G. ſeu quadratus ad R. æquatur quadrato ſummæ extremorum ſeu quadrato ab M. & quadrato interualli mediorum ſeu quadrato ab N. Quare M N R conſtituunt triang. rectang. Rurſus idem aggregatum

f prima, huius.
g decima ſeptima 7.
h ſexta, huius.

quadratorum à ſingulis K H. L G. ſeu quadratus ab R æquatur quadrato ſummæ mediorum ſeu quadrato abs Q. & quadrato interualli extremorum ſeu quadrato abs P. Quamobrem & ipſi P Q R. conſtituunt triang. rectang. Itaque ex omni parte conſtat propoſitum.

SCHOLIVM.

A 6.	B 8.	C 10.
D 3.	E 4.	F 5.
K 24.	H 18.	
L 24.	G 32.	
M 48.	N 14.	R 50.
P —	Q 50.	

Data duo triangula non debent eſſe ſimilia, alioqnin ab illis vnicum tantum efformabitur triangulum. Nam ſi ſit A ad B vt D ad E, [a] *erit planus ſub extremis L. æqualis plano ſub medijs K. Quamobrem ipſorum K L. interuallum P. nullum erit, nec formari poterit triangulum P. Q. R. Sed tantum ex ſumma ipſorum K L fiet latus M. & ex interuallo ipſorum H G. fiet latus N. vnde conſtituetur vnicum triangulum M N R. Cæterum Q. æqualis erit ipſi R.* a decima nona, 7.

PROPOSITIO XI. *Probl.* 4.

Inuenire tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub perpendiculis ad ſolidum ſub baſibus ſit in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum.

	H 100.	
R 10.	V 12.	T 48.
A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	K 30.	L 16.
P 1200.	M 48.	
Q 4800.	N 432.	

Exponatur triang. rect. A B C. cuius hypotenuſa A perpendiculum B. baſis C [b] Deinde ab ipſis A & B formetur aliud triang. rect. ita vt hypotenuſa D ſit ſumma quadratorum, perpendiculum E ſit duplum producti multiplicationis & baſis F ſit interuallum quadratorum, nimirum quadratus ipſius C. Denique ab ipſis A C. formetur etiam tertium triangulum, cuius hypotenuſa G. ſit ſumma quadratorum, perpendiculum K duplum producti, & baſis L differentia quadratorum, nempe quadratus ipſius B. Dico tria hæc triangula præſtare quod requiritur. Ducto enim E in K fiat P. quo ducto in B fiat Q. ſimiliter ducto C in L fiat M, quo ducto in F fiat N. Dico Q ſolidum ſub perpendiculis, ad N ſolidum ſub baſibus habere rationem quadrati ad quadratum. Sumatur R duplum ipſius A. & ex B in C fiat V. quo ducto rurſus in B fiat T. Quia ergo ſumptis tribus numeris B C. & B rurſus, [c] idem fit numerus quouis ordine inter ſe ducãtur, ducto autem B in C & producto V in B fit T. At ducto B in B & producto L in C. fit M. ſunt vtique T & M æquales. Quia vero ex B in A bis, ſeu ex B in R fit E, & ex C in R fit K. conſideratis quatuor numeris B. R. C. R. idem fiet numerus quouis ordine inter ſe ducantur. Sed ducto B in R. vnde fit E, & ducto C in R vnde fit K, & demum ducto E in K producitur P. Igitur ſi ducatur R in R vnde fit H, & B in C. vnde fit V. ac demum V ducatur in H. fiet idem P. Cùm igitur idem V ductus in H & in B producat ipſos P T ſeu P M. [d] erit H ad B ſicut P ad M. [e] Quare qui fit ex mutuo ductu mediorum B P. nempe ſolidus Q. fit etiam ex ductu extremorum H M. Cùm igitur ex eodem M in ipſos H & F fiant ſolidi Q N. erit Q ad N. ſicut H ad F. Quare cùm H & F ſint quadrati, erit Q ad N in ratione quadrati ad quadratum. Quod demonſtrandum erat.

b quinta, huius.
c tertia, 1, Poriſm.
d decima ſeptima, 7.
e decima nona, 7.

SCHOLIVM.

Notatu digniſſimum eſt iiſdem prorſus manentibus triangulis, ſolidos Q N quadrupliciter variari poſſe prout latera circa rectum nunc fiunt baſes, nunc perpendicula, & omnibus tamen modis ratio ſolidi ad ſolidum erit quæ quadrati ad quadratum, quod miraculo ſimile videtur.

	H .100.			H 100.	
A 5.	B 4.	C 3.	A 5.	C 3.	B 4.
D 41.	E 40.	F 9.	D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	K 30.	L 16.	G 34.	K 30.	L 16.
Q 4800.	N 432.		Q 3600.	N 576.	

Primus caſus eſt, qui in demonſtratione exhibetur, quo probatum eſt eſſe Q ad N. ſicut H ad F.

Secundus eſt cùm reliquis omnibus inuariatis manentibus B ſit baſis, & C perpendiculum. Et tunc ſolidus ſub ipſis C E K nempe Q. ad ſolidum ſub B F L. ſeu ad N eſt in ratione quadrati H ad quadratum L. quod iiſdem prorſus argumentis probatur. Itaque in his duobus caſibus ſolidus ad ſolidum eſt vt quadratus H ad quadratum F, vel ad quadratum L, prout ſolidus N. fit à producto ex quadratis F L in latus ipſius F vel in latus ipſius L.

A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	F 9.	E 40.
G 34.	K 30.	L 16.
Q 1080.	N 1920.	

Tertius caſus eſt cùm primi & tertij trianguli lateribus in eadem diſpoſitione manentibus, ſecundi latera tranſponuntur, & ſit E baſis F perpendiculum. Et tunc ſolidus Q ad ſolidum N. ſe habet vt quadratus F ad quadratum L. Quod ita probatur. Quia E K producuntur ex eodem duplo ipſius A in ipſos B C. patet eſſe B ad C vt E ad K. [f] *Igitur ex B in K idem fit numerus qui fit ex C in E. Quare cùm producto ex B in K ducto in F fiat Q. Et producto ex C in E* f decima nona, 9.

ducto in L. fiat N. patet eodem numero ducto in ipſos F & L. fieri ipſos Q. & N. [a] *Quare eſt Q ad N vt F ad L. Quod erat propoſitum.*

a decima ſeptima 7.

	R 10.	
A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	L 16.	K 30.
Q 2560.	N 810.	

b tertia, 1. poriſm.

Quartus denique caſus eſt cùm lateribus 1. & 2. trianguli eodem loco manentibus, mutantur latera tertij, & ſit L perpendiculum K baſis. Tuncque ſolidus Q ad ſolidum N. ſe habet vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F. Quod ſic probatur. Quia ex B in R fit E. ſi conſiderentur quatuor numeri B. R. B. L. [b] *idem fiet numerus quouis ordine inter ſe ducantur. Igitur cùm ducto B in R, & producto E in B, & producto rurſus in L. fiat Q ſolidus, idem ſolidus fiet ducto B in B. & producto, quadrato ſcilicet ipſius B ducto in L ſibi aqualem, & rurſus producto, quadrato ſcilicet ipſius L ducto in R. Quare Q. fit ex R in quadratum ipſius L. Eodem prorſus argumento probatur ſolidum N. fieri ex R in quadratum ipſius F. Proinde patet eſſe Q ad N. vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F.*

Vnde colligas in hoc caſu Q ad N eſſe non ſolum in ratione quadrati ad quadratum, ſed & in ratione quadratoquadrati ad quadratoquadratum, cùm L. F ſint quadrati ac per conſequens quadrati eorum ſint quadratoquadrati quorum latera ipſi B. C.

Supereſt vt moneam licere loco cuiuſlibet ſic inuentorum triangulorum; aliud ſimile ponere, & eadem manebit ſemper qua prius, ratio ſolidi ad ſolidum, quod vnica demonſtratione omnibus caſibus conueniente demonſtrari poteſt, hac arte. Loco trianguli G L K ſumatur triangulum illi ſimile T. V. X. & latera homologa intelligantur eadem ratione diſpoſita, & ſolidus ſub ipſis B E V eſto Y. ſolidus ſub ipſis C F X eſto Z. Dico eſſe Y ad Z ſicut Q ad N. Quia enim idem productum ex B in E ductum tum in L tum in V. producit ſolidos Q Y. erit Q ad Y ſicut L ad V. Similiter quia idem productum ex C in F ductum in ipſos K X producit N. & Z. erit N ad Z ſicut K ad X. ſed eſt L ad V vt K ad X ex hypotheſi ob ſimilitudinem triangulorum. Igitur eſt etiam Q ad Y vt N ad Z. & permutando eſt Q ad N. vt Y ad Z. Quod demonſtrandum erat.

A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	L 16.	K 30.
T 17.	V 8.	X 15.
Q 2560.	N 810.	
Y 1280.	Z 405.	

PROPOSITIO XII. *Probl. 5.*

Inuenire duo triangula rectangula, vt planus ſub perpendiculis, ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato, vel cubo, vel quadratoquadrato, vel quadratocubo, vel cubocubo.

	D 6.				
A 5.	B 4.	C 3.			
E 13.	F 5.	G 12.	Q 36.	K 20.	R 16.
H 52.	K 20.	L 48.	S 144.	N 80.	T 64.
M 108.	N 80.	P 192.	V 576.	X 320.	Y 256.

c quinta. huius.

d prima, huius.

Exponatur quodlibet triang. rect. A B C. ita vt D duplum perpendiculi C ſit maius baſi B. & ab ipſis [c] formetur triangulum H K L. ita vt H ſit aggregatum quadratorum, baſis K ſit interuallum eorundem & perpendiculum L. ſit duplum producti ex B in D. Deinde ſingula latera H K L. diuidantur per baſim B & [d] fiat aliud triangulum ſimile E F G.

Dico primo haberi duo triangula A B C. E F G. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus quadrato numero. Etenim ducto C in G fiat Q. & quia ducto B in F fit K ex conſtructione, auferatur K ex Q. & ſuperſit R. Dico R eſſe quadratum. Quià enim D eſt duplus ad C. productus bis ex B in D nempe L æquatur quadruplo producti ex B in C. Quare diuiſo L per B quotiens G eſt quadruplus ad C. Cùm ergo ex C in G fiat Q. erit Q quadruplus quadrati ipſius C. ſeu æqualis quadrato ipſius D. Proinde cùm K ſit interuallum quo quadratus ex D. nempe Q ſuperat quadratum ex B patet auferendo K ex Q reſiduum R eſſe quadratum ipſius B. Quod erat propoſitum.

Dico ſecundo haberi duo triangula A B C, H K L, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero cubo. Etenim ducto C in L fiat S. & ducto B in K fiat N. quo detracto ex S. ſuperſit T. Dico T eſſe cubum. Quia enim ex eodem C in ipſos G L fiunt Q S. erit Q ad S vt G ad L. Rurſus, quia ex eodem B in ipſos F K, fiunt K N. erit K ad N vt F ad K. Quare cùm ob ſimilitudinem triangulorum ſit F ad K vt G ad L. erit & Q ad S. vt K ad N. Ideo cum ſit vt totus Q ad totum S. ſic ablatus K ad ablatum N. erit & reliquus R ad reliquum T. in eadem ratione. Sed rationis F ad K ſeu G ad L denominator eſt B ex conſtructione. Igitur & rationis R ad T idem B denominator erit, ac proinde ex B in R fiet T. Igitur cùm ex B in ſuum quadratum R. fiat T. erit T cubus ipſius B. Quod erat propoſitum.

Rurſus ſi B ducatur in triangulum H K L, & fiat aliud ſimile M N P. Dico haberi duo triangula A B C. M N P. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadratoquadrato. Etenim ſi C ducatur in P vnde fiat V. & B ducatur in N vnde fiat X quo detracto ex V relinquatur Y. Dico Y eſſe quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento oſtendemus eſſe

T ad

T ad Y ſicut K ad N vel L ad P. Quare cùm rationis K ad N vel L ad P denominator ſit B ex conſtructione ; erit idem B denominator rationis T ad Y ac proinde ex B in ſuum cubum T fiet Y. Quare Y erit quadratoquadratus ipſius B. ſimiliter, ſi B ducatur ruſus in triangulum M N P. fiet aliud ſimile quod cum triangulo A B C exhibebit duo triangula ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadratocubo. nimirum quadratocubo ipſius B. Et ſi ruſus B ducatur in vltimum triangulum, fiet aliud quod cum ipſo A B C duo exhibebit triangula, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus cubocubo ipſius B. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XIII. *Probl. 6.*

Inuenire duo triangula rectangula vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus, faciat quadratum, uel cubum, vel quadratoquadratum, vel quadratocubum, vel cubocubum.

	D 10.				
A 13.	B 12.	C 5.			
E 20 $\frac{1}{3}$.	F 3 $\frac{2}{3}$.	G 20.	Q 100.	K 44.	R 144.
H 244.	K 44.	L 240.	S 1200.	N 528.	T 1728.
M 2928.	N 528.	P 2880.	V 14400.	X 6336.	Y 20736.

Exponatur triang. rect. A B C. ita vt D duplum baſis C. ſit minus perpendiculo B. ª Et ab ipſis B D formetur aliud triangulum H K L vt ſupra, cuius omnia latera diuidantur per B & ᵇ fiat triangulum ſimile E F G. Dico primo duo triangula A B C. E F G huiuſmodi eſſe vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Etenim ducto C in G fiat Q. cui addatur K productus ex B in F ex conſtructione & fiat R. dico R eſſe quadratum. Quia enim D eſt duplus ad C. & ex B in D bis fit L, idem L fiet ex B in quadruplum ipſius C. Quare cum diuidendo L per B fiat G. erit G quadruplus ipſius C. proinde Q productus ex C in G æquabitur quadruplo quadrati ipſius C, ſeu quadrato ipſius D. cùm ergo K ſit interuallum quo quadratus B ſuperat quadratum ex D nempe ipſum Q. addendo Q & K ſumma R. erit quadratus ipſius B Quod erat propoſitum.

a quinta huius. b prima huius.

Dico ſecundo duo triangula A B C. H K L. talia eſſe vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat cubum. Nam ducto C in L fiat S. ductoque B in K fiat N quo addito ad S. fiat T. Dico T eſſe cubum. Etenim quia ex eodem C in G & in L. fiunt Q S. & ex eodem B. in ipſos F K fiunt K N. erit Q ad S. vt G ad L. & erit K ad N. vt F ad K. ſed eſt F ad K. vt G ad L ob ſimilitudinem triangulorum, ergo eſt & Q ad S vt K ad N. Quare & erunt antecedentes ſimul nempe R ad conſequentes ſimul nempe ad T vt N. ſed B eſt denominator rationis K ad N ex conſtructione, ergo & rationis R ad T. Quamobrem ex B in R fiet T. vnde cum R ſit quadratus ipſius B vt oſtenſum eſt, erit T cubus eiuſdem B. Quod erat propoſitum.

Ruſus ſi B ducatur in triangulum H K L. & fiat aliud ſimile M N P. Dico tertio duo triangula A B C. M N P. huiuſmodi eſſe vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratoquadratum. Etenim ſi C. ducatur in P & fiat V, & B ducatur in N. & fiat X. quo addito ad V fiat Y. Dico Y eſſe quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento oſtendemus eſſe T ad Y, ſicut N ad X. Quare cum ex B in N fiat X, neceſſe eſt etiam ex B in T fieri Y. ac proinde cùm T oſtenſus ſit cubus ipſius B, erit N quadratoquadratus eiuſdem B. Similiter ſi B ducatur ruſus in triangulum M N P. fiet aliud ſimile quod cum triangulo A B C. oſtendetur eſſe hujuſmodi vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratocubum ipſius B. Ac demum ſi B ducatur ruſus in vltimum triangulum, fiet aliud, quod cum ipſo A B C, oſtendemus eſſe huiuſmodi, vt planus ſub perpendicûlis cum plano ſub baſibus faciat cubocubum ipſius B. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

SCHOLIVM.

In hoc & in præcedenti problemate accidit vt inuenta duo triangula ſi per eundem numerum vtraquè multiplicentur aut diuidantur, producant alia duo idem præſtantia, quod vnico exemplo ſufficiet probare. Multiplica per 3. triangula 13. 12. 5. & 20 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{2}{3}$. 20. fient alia duo, 39. 36. 15. & 61. 11. 60. vbi vides planum ſub baſibus 900. cum plano ſub perpendiculis 396. efficere quadratum 1296. à latere 36. perpendiculo ſcilicet primi trianguli. Demonſtratio facilis eſt, & ideo eam tibi relinquo indagandam.

PROPOSITIO XIV. *Probl. 7.*

Inuenire tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub hypotenuſis, ad ſolidum ſub perpendiculis ſe habeat vt quadratus ad quadratum.

a duodecima, huius.
b decima huius.

D 6.
A 5. B 4. C 3.
E 13. F 5. G 12.
H 65. K 63. L 16.
M 4225. N 576.

Exponatur triang. rectang. quodcumque A. B. C. ita vt D duplum perpendiculi C. ſit maius baſi B.[a] & ab eo formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato. Tum à duobus hiſce triangulis[b] formetur tertium H K L. ita vt H ſit productus ex A in E At K baſis fiat addito producto ex G in B. ad productum ex F in C. Denique perpendiculum L fiat auferendo productum ex F in B. à producto ex G in C. Dico tria hæc triangula ſatisfacere propoſito, nimirum M ſolidum ſub hypotenuſis ad N ſolidum ſub perpendiculis eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quia enim ex A, in E fit H ex conſtruct. patet ſolidum M factum ex H in H eſſe quadratum ipſius H. Quia vero vt probatum eſt 12. huius ex C in G fit quadratus ipſius D. At L. eſt quadratus ipſius B. ex conſtruct. & per 12. huius. Patet ſolidum N. qui fit ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum cuius latus ſcilicet eſt productus ex B in D. Quare cum vterque M & N. ſit quadratus, patet propoſitum.

c decimo tertia, huius.
d decimo huius.
e decimo tertia, huius.

D 10.
A 13. B 12. C 5.
E 20 $\frac{1}{3}$. F 3 $\frac{2}{3}$. G 20.
H 264 $\frac{1}{3}$. K 221 $\frac{1}{3}$. L 144.

Aliter expoſito triangulo A B C. ita vt D duplum perpendiculi ſit minus baſi B[c] formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Et ab ipſis duobus[d] efformetur tertium H K L. ita vt hypotenuſa H fiat ex A in E. baſis K ſit, quod reſtat à producto ex B in G detrahendo productum ex C in F. Denique perpendiculum L. ſit ſumma productorum ex B in F & ex C in G.[e] Erit igitur L quadratus ipſius B. Quare cum conſtet etiam per decimam tertiam ex C in G produci quadratum ipſius D. patet ſolidum ſub ipſis C G L. productum ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum, cuius ſcilicet latus eſt productus ex B in D. At ſolidus ſub hypotenuſis, vt prius oſtendetur æqualis quadrato ipſius H. Igitur cùm vterque ſolidus ſit quadratus, conſtat abundè propoſitum.

SCHOLIVM.

Quæ hactenus tradita ſunt, ſatis ſuperque ſufficiunt ad abſolutam Diophantæorum problematum enodationem. Cæterum placuit his ſubnectere ſequentia Theoremata non inutilia de triangulis rectangulis, quæ preſulit primus Franciſcus Vieta in libris zeteticorum, quamuis ea ſyntheticè minimè demonſtrarit.

PROPOSITIO XV.

In triangulo rectangulo, quotlibet laterum circa rectum, eſt medium proportionale inter aggregatum & interuallum alterius lateris & hypotenuſæ. Et è conuerſo, ſi fuerint tres inæquales numeri, quorum vnus ſit medius proportionalis inter ſummam & interuallum aliorum, conſtituent triangulum rectangulum ipſi tres numeri.

A 3. B 4. C 5.
D 2. G 16. E 8.

f tertio, 2.
g vigeſima, 7.
h vigeſimo, 7.
i tertia, 2. poriſm.

Sit triangulum rectangulum A B C. & alterius lateris A & Hypotenuſæ C interuallum ſit D. aggregatum E. Dico reliquum latus B eſſe medium proportionale inter ipſos D E. ſumpto enim G. quadrato ipſius B, patet ex hypotheſi quadratum ex A cum quadrato G æquari quadrato ipſius C. Quare G eſt interuallum quo quadratus ex C. ſuperat quadratum ex A.[f] Quamobrem G fiet ex D in E, ex interuallo ſcilicet in ſummam.[g] Igitur B eſt medius proportionalis inter D & E. Quod demonſtrandum erat.

E conuerſo ponatur B medius proportionalis inter D E interuallum & ſummam ipſorum A C. Dico tres A B C conſtituere triang. rect. Quia enim ſunt proportionales D B E,[h] ex D in E fiet G quadratus ipſius B.[i] Atqui ex interuallo D in ſummam E fit interuallum quadratorum ex A & C. Conſtat ergo G eſſe interuallum quo quadratus ex C ſuperat quadratum ex A. Ac ideo G ſeu quadratus ex B cum quadrato ex A æquatur quadrato ex C. Quamobrem A B C conſtituunt triangulum rectangulum. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

In triangulo rectangulo quadratus vnius laterum circa rectum, æquatur quadrato interualli inter alterum latus & hypotenuſam, vna cum duplo producti ex eodem interuallo in idem latus, & è conuerſo.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

k quarta, 2.

Sit triang. rect. A B C. & ſit D interuallum inter hypotenuſam C. & latus B, & ipſius D duplus eſto G. Dico quadratum alterius lateris A æquari quadrato ipſius D, & producto ex G in B. Quia enim B D ſimul æquantur ipſi C.[k] erit quadratus ex C. æqualis quadratis ipſorum B D, & duplo producti ex B in D. hoc eſt quadratis ex B & D, & producto ex G in B. At rurſus ex hypotheſi quadratus ex C æquatur quadratis ipſorum A B. Igitur quadrati ex A & B. æquantur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Quare ablato

vtrimque communi quadrato ex B. remanet quadratus ex A æqualis quadrato ex D, & producto ex G in B. Quod demonſtrandum erat.

Conuerſum eadem facilitate oſtendetur. Sit enim quadratus ex A. æqualis quadrato ex D interualli ipſorum B C. & producto ex G in B. Dico A, B C conſtituere triang. rect. Nam vt priùs quadratus ex C æquatur quadiatis ex B & D & producto ex G in B. Ergo loco quadrati ex D & producti ex G in B. ſumendo quadratum ex A illis æqualem, erit quadratus ea C æqualis quauratis ex A & B. Ac proinde A B C conſtituent triang. rect. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XVII.

In triangulo rectangulo, ſi duplum interualli lateris vnius & hypotenuſæ ducatur in hypotenuſam, fit numerus æqualis quadrato reliqui lateris, vna cum quadrato eiuſdem interualli; & è conuerſo.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit eadem figura quæ prius, dico productum ex G in C æquari quadratis ipſorum A D. [a] Quia enim quadratus ex A æquatur producto ex G in B & quadrato ex D, ſi addatur vtrimque quadratus ex D, erunt quadrati ex A & D ſimul æquales producto ex G in B & duplo quadrati ex D. ſed quia G eſt duplus ad D, productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D. ergo quadrati ex A & D æquantur productis ex G in B & in D, [b] ſeu producto ex G in C qui componitur ex ipſis B D. Quod erat propoſitum.

[a] *decima ſexta, huius.*
[b] *prima, 2.*

E conuerſo ponantur quadrati ex A & D æquales producto ex G in C. dico ipſos A B C conſtituere triang. rect. [c] Quia enim productus ex G in C. æquatur productis ex G in B & in D. & productus ex G in D æquatur duplo quadrari ex D, conſtat quadratos ex A & D æquari producto ex G in B & duplo quadrati ex D. Quare auferendo vtrimquè communem quadratum ex D. remanet quadratus ex A æqualis producto ex G in B & quadrato ex D. [d] Quamobrem A B C conſtituunt triang. rect. Quod demonſtrandum erat.

[c] *prima, 2.*
[d] *decima ſexta, huius.*

PROPOSITIO XVIII.

Si duplum compoſiti ex vno latere & hypotenuſa ducatur in hypotenuſam, productus æquatur quadrato eiuſdem compoſiti, & reliqui lateris quadrato. Et è conuerſo.

A 4. B 3. C 5.
K 16. H 8.

Sit triang. rect. A B C. & ſit H ſumma lateris B & hypotenuſæ C. & ſit K duplum ipſius H. dico productum ex K in C. æquari quadratis ipſorum A H. [e] Nam quadratus ex H æquatur quadratis partium B. C. & producto bis ex B in C. Quare addendo vtrimque quadratum ex A. Quadrati ex A & H æquantur quadratis ſingulorum A B C & producto bis ex B in C. Quia vero K continet bis vtrumque B C. ducere C in K idem eſt ac ducere C in ſeipſum, & in B bis. Ergo productus ex K in C. æquatur duplo quadrati ex C, & producti ex B in C. Proinde loco vnius quadrati ex C. ſumendo quadratos illi æquales ex A & B. fiet productus ex K in C. æqualis quadratis ſingulorum A B C. & producto bis ex B in C. hoc eſt quadratis ipſorum A. H. Quod erat oſtendendum.

[e] *quarta, 2.*

E conuerſo ſi ponantur quadrati ex A & H. æquales producto ex K in C. Dico A B C conſtituere triang. rect. Nam vt prius oſtendemus quadratos ex A & H. æquari quadratis ſingulorum A B C & duplo producti ex B in C. vnde ſequitur ex hypotheſi productum ex K in C. æquari quadratis ſingulorum A B C. & producto bis ex B in C. At vt prius productus ex K in C oſtendetur æqualis duplo quadrati ex C & producti ex B in C. Igitur & quadrati ſingulorum A B C, cum duplo producti ex B in C. æquabuntur duplo producti ex B in C & duplo quadrati ex C. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex B in C. & quadratum ex C ſemel, remanent quadrati ex A & B æquales quadrato ex C. Ac proinde A B C conſtituunt triangulum rectangulum. Quod demonſtrandum fuit.

SCHOLIVM.

His ſubiicere libet aliud non iniucundum, neque inutile theorema, quod ipſi commenti ſumus.

PROPOSITIO XIX.

In triangulo rectangulo quadratus ſummæ laterum æqualis eſt numero qui fit bis ex aggregato hypotenuſæ & baſeos, in aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi; & è conuerſo.

D 12.
A 3. B 5. C 4.
E 8. F 9.

a prima, 2. poriſm.

Eſto triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenuſa B. ſumma laterum D. aggregatum ipſorum A B ſit E, & F aggregatum ipſorum B C. Dico quadratum ipſius D. æquari duplo producti ex E in F. a Etenim quadratus ex D. æquatur quadratis ſingulorum A B C & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At ex hypotheſi quadratus ipſius B æquatur quadratis ipſorum A C. Quare loco quadratorum ex A & C. ſumendo quadratum ex B. erit quadratus ex D æqualis duplo quadrati ex B, & duplo producti ex A in C. & ex B in ipſos A C. Rurſus autem quia E continet ipſos A B. & F continet ipſos B C. duplum producti ex E in F continet bis quadratum ipſius B, & duplum productorum ex A in C. & ex B in ipſos A C. Igitur duplum producti ex E in F æquatur quadrato ex D. Quod erat demonſtrandum.

b prima, 2. poriſm.

Deinde ſint tres numeri A B C. quorum ſumma D. & aggregatum ipſorum A B ſit E, & aggregatum ipſorum B C. ſit F. & duplum producti ex E in F æquetur quadrato ex D. Dico ipſos A B C. conſtituere triangulum rectangulum. Nam vt prius b quadratus ex D. æquatur quadratis ipſorum A B C. & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At duplum producti ex E in F æquatur duplo quadrati ex B & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex quolibet in quemlibet ex alijs, manet duplum quadrati ex B æquale quadratis ſingulorum A B C. & rurſus auferendo vtrimque quadratum ex B, remanet adhuc quadratus ex B. æqualis quadratis ipſorum A C. Ac proinde A B C. conſtituunt triangulum rectangulum. Quod erat oſtendendum.

FINIS.



DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM.
LIBER PRIMVS.

CVM animaduerterem te (obſeruandiſſime mihi Dionyſi) ſtudio diſcendi explicationem quæſtionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggreſſus ſum eius rei viam rationemque fabricari, ex ipſiſque fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito, naturam ac vim numerorum conſtituere. Quod negotium vt videatur fortaſſe difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda ſpem concipiendam nequaquam ſint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonſtratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiſcunt, quorum ad diſcendi cupiditatem doctrina accedit.

THN εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσιν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαὶ, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν, καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν. ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

In primum Librum Diophanti Commentarij.

QVÆCVNQVE ante primam quæſtionem præmiſit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora feſtinans, hæc mira breuitate perſtrinxit, vt non tam ea explicare voluiſſe videatur, quàm indicare, tyronéſque admonere, vt nonniſi horum cognitione iam probè inſtructi ad hoſce libros euoluendos accedant. Quod ſanè non obſcuris verbis profeſſus eſt, definitione decima vndecimáque, cùm ait eum qui hoc negotij ſuſcipit in additione, ſubductione, & multiplicatione ſpecierum iam exercitatum eſſe debere, necnon in æquationibus ritè præparandis apprimè verſatum. Sed & Xilander hic mutus eſt, & iſtarum definitionum obſcuritatem minimè diſſimulans, vt laborem eas explicandi declinet, lectorem ad ſuam Algebram amandat. Scholiaſtes autem Græcus, more ſuo, multa, ſed ea plerunque futilia, vel à ſcopo Diophanti prorſus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obſcuriora videntur breuiter enodanda ſuſcepi, nec tamen inutilia, vel trita & paſſim obuia perſequi ſtatui, præſertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logiſtica, libris, reperiantur. Cæterum eſt quod moneam in Græco ſine vlla diſtinctione haſce definitiones haberi, quas ego diſtinguendas numeris putaui, vt ſic facilius explicari, citatique commodius poſſint.

DEFINITIO I.

ΑΛΛΑ καὶ πρὸς τοῖς δὲ γινώσκοντί σοι πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινὸς, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὕπαρξιν. τυγχανόντων δὴ οὖν ἐν τούτοις, ὧν μὲν τετραγώνων οἵ εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὧν δὲ κύβων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τὰς αὐτῶν πλευρὰς πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ δυναμοδυνάμεων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐφ᾽ ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ δυναμοκύβων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τοὺς ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβους πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ κυβοκύβων οἵ εἰσιν ἐκ κύβων ἐφ᾽ ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθέντων, ἔκ τε τῆς τούτων ἤτοι συνθέσεως, ἢ ὑπεροχῆς, ἢ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ λόγου τοῦ πρὸς ἀλλήλους, ἢ καὶ ἑκάστου, ἢ καὶ ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευρὰς συμβαίνει πλέκεσθαι πλεῖστα προβλήματα ἀριθμητικὰ, λύεται δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδειχθησομένην ὁδόν.

VERVM etiam præter hæc intelligenti tibi omnes numeros compoſitos eſſe è quadam multitudine vnitatum, liquet eos augmentum in infinitum capere. Cùm ergo in his quidam ſint quadrati, qui fiunt numero aliquo in ſe multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur; aliqui cubi qui exiſtunt quadratis in ſua multiplicatis latera; alij rurſus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in ſeipſos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrati in cubos ab eodem profectos latere ducti procreant; quidam denique cubocubi qui cubis in ſeipſos ductis naſcuntur: vſuuenit, vt ex horum vel compoſitione, vel quo præſtant alij alijs, vel multiplicatione, vel ratione inter ſe, aut cuiuſlibet, quorumlibetve ad ſua latera, plurimæ nectantur arithmeticæ quæſtiones, quæ ſoluantur tamen, ſi ea quam commonſtrabimus via incedas.

IN DEFINITIONEM I.

QVAMVIS ſpecies, vel (vt alij vocant) poteſtates, quibus velut elementis vtitur logiſtica in infinitam multitudinem excreſcant, nec earum certus ſit & determinatus numerus, tamen Diophantus de quinque prioribus tantùm tractationem inſtituit, quæ ſunt Quadratus, cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus & cubocubus, ratus ſcilicet has ſufficere ad implicatiſſimas quaſque quæ hactenus excogitatæ ſunt, quæſtiones diſſoluendas. Harum igitur hic affert definitiones. Et Quadratum quidem cubúmque definit vt Euclides. Reliquas verò tres, per ipſam nominum impoſitionem. Nam quadratoquadratum vocat, numerum qui fit ex quadrato in quadratum, ideſt in ſeipſum. Quadratocubum verò, qui fit ex quadrato in cubum ab eodem profectum latere. Denique cubocubum qui fit ex cubo in cubum, hoc eſt in ſeipſum. Vbi aduertendum à recentioribus omnibus quotque ante Diophantum editum logiſtices rudimenta tradidere, Quadratocubum vocari nunc superſolidum, nunc ſurde ſolidum, nunc etiam Primum Relatum. Cubocubum verò, ab iiſdem dici Quadratocubum, quia videlicet eſt quadrati cubus, vel cubi quadratus, quod adnotaſſe operæ pretium duxi, nequem in authoribus legendis nominum ambiguitas remoretur.

DEFINITIO II.

ΚΑΛΕΙΤΑΙ οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ δ ἐπίσημον ἔχον υ, δ^{υ}. ὁ δὲ (ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιασθέντος) κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον κ ἐπίσημον ἔχον υ, κ^{υ}. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο, ἐπίσημον υ, $\delta\delta^{\upsilon}$, δυναμοδύναμις. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτῷ πλευρᾶς κύβον πολλαπλασια-

APPELLATVR igitur Quadratus, Dynamis, & eſt illius nota δ ſuperſcriptum habens υ ſic δ^{υ}. Qui autem fit ex quadrato in ſuum latus cubus eſt, cuius nota eſt κ, ſuperſcriptum habens υ hoc pacto κ^{υ}. Qui autem fit ex quadrato in ſeipſum multiplicato, quadratoquadratus eſt, cuius nota eſt geminum δ habens ſuperſcriptum υ, hac ratione $\delta\delta^{\upsilon}$. Qui fit quadrato in cubum qui ab

eodem latere profectus eſt, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius $\delta\bar{\kappa}$ ſuperſcriptum habens $\bar{\upsilon}$ ſic $\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$. Qui ex cubo in ſe ducto naſcitur, cubocubus vocatur, & eſt eius nota geminum $\bar{\kappa}$ ſuperſcriptum habens $\bar{\upsilon}$, hoc pacto $\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$. Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, ſed conſtat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius ϛ̀. Eſt & aliud ſignum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota $\bar{\mu}$ ſuperſcriptum habens $\bar{o}$ ſic $\mu^{\bar{o}}$

θέντος, δυναμόκυβος, κ̔ ἔϛιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ $\delta\bar{\kappa}$. ἐπίσημον ἔχον τὸ υ, $\delta\kappa^{\upsilon}$. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτ͂ πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, κ̔ ἔϛιν αὐτοῦ σημεῖον δύο $\bar{\kappa}\bar{\kappa}$, ἐπίσημον ἔχοντα υ, $\kappa\kappa^{\upsilon}$. ὁ δὲ μηδὲν τούτων τ͂ ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογον ἀριθμὸς καλεῖται, κ̔ ἔϛιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ϛ̀. ἔϛι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τ͂ ὡρισμένων ἡ μονὰς, καὶ ἔϛιν αὐτῆ σημεῖον τὸ $\bar{\mu}$, ἐπίσημον ἔχον τὸ ο μ^{o}.

IN DEFINITIONEM II.

HÆc ad verbum exprimenda eſſe arbitrarus ſum potiùs quàm cum Xilandro neſclo quid aliud comminiſci. Quamuis enim in reliqua verſione noſtra notis ab eodem Xilandro excogitatis libenter vſus ſim, quas tradam infrà. Hic tamen ab ipſo Diophanto longiùs recedere nolui, quòd hac definitione notas explicet quibus paſſim libris iſtis vtitur ad ſpecies omnes compendio deſignandas, & qui has ignoret ne quidem Græca Diophanti legere poſſit. Porrò quadratum Dynamin vocat, quæ vox poteſtatem ſonat, quia videlicet quadratus eſt veluti poteſtas cuiuſlibet lineæ, & paſſim ab Euclide, per id quod poteſt linea, quadratus illius deſignatur. Itali, Hiſpanique eadem ferè de cauſa Cenſum vocant, quaſi dicas redditum, prouentúmque, quòd à latere ſeu radice, tanquam à feraci ſolo quadratus oriatur. Inde factum vt Gallorum nonnulli & Germanorum corrupto vocabulo zenzum appellarint. Numerum autem indeterminatum & ignotum, qui & aliarum omnium poteſtatum latus eſſe intelligitur, Numerum ſimpliciter Diophantus appellat. Alij paſſim Radicem, vel latus, vel rem dixerunt, Itali patrio vocabulo Coſam. Cæterùm nos in verſione noſtra his notis N. Q. C. QQ. QC. CC. deſignabimus Numerum, Quadratum, Cubum, Quadratoquadratum, Quadratocubum, Cubocubum. Nam quod ad vnitates certas & determinatas ſpectat, eis notam aliquam adſcribere ſuperuacaneum duxi, quòd hæ ſeipſis abſque vlla ambiguitate ſeſe ſatis indicent. Ecquis enim cùm audit numerum 6. non ſtatim cogitat ſex vnitates? Quid ergo neceſſe eſt ſex vnitates dicere, cùm ſufficiat dicere, ſex? Demum legendum in Græco cenſeo, πλῆθος μονάδων ἄλογον, flagitante ſententia, potius quàm ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, vt habetur in codice manu exarato, & per multitudinem vnitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum & indeterminatum, ſeu potius ignotum, quémque ſtatim opponit ὡρισμένῳ ſeu vnitatibus certis & determinatis.

DEFINITIO III.

ENIMVERÒ ſicut partes numeris cognomines, ſimilem ipſis numeris denominationem ſortiuntur (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans dicitur) ita nunc quóque denominatis numeris partes cognomines, ipſis numeris ſimilem habent denominationem, nam à numero pars numerica dicitur; à quadrato, quadratica; à cubo cubica: à quadratoquadrato, quadratoquadratica; à quadratocubo, quadratocubica; à cubocubo, cubocubica. Habebit autem quælibet pars à ſibi cognomine numero notam, & literam ſuperſcriptam quæ ſpeciem à ſpecie diſtinguat.

ΩΣΠΕΡ δὲ τ͂ ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρωνύμως καλοῦνται τοῖς ἀριθμοῖς, τ͂ μὲν $\bar{\gamma}$ τὸ τρίτον, τῶ δὲ $\bar{\delta}$ τὸ τέταρτον. οὕτως κ̔ τ͂ νῦν ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μέρια κληθήσεται παρωνύμως τοῖς ἀριθμοῖς. τ͂ μὲν ἀριθμοῦ τὸ ἀριθμοστὸν, τ͂ δὲ δυνάμεως τὸ δυναμοστὸν, τοῦ δὲ κύβου τὸ κυβοστὸν, τ͂ δυναμοδυνάμεως τὸ δυναμοδυναμοστὸν, τοῦ δὲ δυναμοκύβου τὸ $\delta\kappa^{\tau}$. τοῦ δὲ κυβοκύβου τὸ κυβοκυβοστόν. ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γράμμαν ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

IN DEFINITIONEM III.

QVAM malè acceperint hanc definitionem Græcus Scholiaſtes, & Xilander, ſi vacat, videre poteris. Manifeſtum tamen eſt nil aliud velle Diophantum, quàm vt fractionibus Algebricis notæ ſpecierum à quibus ſumunt denominationem, adſcribantur, docens ipſas fractiones non minus à qualibet ſpecie denominari, quàm numerum quemlibet vnitarum integrum. Hoc autem huiuſmodi ſimilitudine explicat. Quemadmodum, inquit, fractio quælibet abſoluta ab aliquo numero ſumit denominationem, velut triens à ternario, à quaternario quadrans, & ſic de alijs; ita & quælibet fractio Algebrica à ſpecie cuius nota ei affixa eſt, denominationem mutuatur, verbi gratia $\frac{1}{2}$ N. dicetur ſemiſſis vnius Numeri, $\frac{1}{3}$ Q. dicetur triens vnius Quadrati, $\frac{3}{4}$ C. dicetur dodrans vnius Cubi, & ſic de alijs, vt ſuperuacaneum ſit in re manifeſta diutius immorari. Portò Xilandri coniecturam ſecutus, duobus in locis loco παρομοίων, repoſui παρωνύμων.

DEFINITIO IV.

ΕΚΘΕΜΕΝΟΣ οὖν σοι τὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβήσομαι. ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι σχεδὸν ἀπὸ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν οὖν ἐπὶ ς̃ πολλαπλασιασθεὶς, ποιεῖ δύναμιν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, κύβον. ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοδύναμιν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμόκυβον. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κυβόκυβον. δύναμις δὲ ἐπὶ μὲν δύναμιν [ποιεῖ δυναμοδύναμιν.] ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμόκυβον. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κυβόκυβον. κύβος δὲ ἐπὶ κύβον, κυβόκυβον.

PROINDE cùm tibi ſingulas numerorum denominationes expoſuerim, ad eorum multiplicationes me confero, quæ tibi facilè patebunt, cùm per ipſam nominum impoſitionem, ferè ſint iam ante declaratæ.

Ergo numerus in numerum multiplicatus, quadratum producit; in quadratum, cubum, in cubum, quadratoquadratum; in quadratoquadratum, quadratocubum; in quadratocubum, cubocubum. Quadratus verò in quadratum, gignit quadratoquadratum; in cubum, quadratocubum; in quadratoquadratum, cubocubum. Cubus autem in cubum ductus, cubocubum producit.

IN DEFINITIONEM IV.

HIc ſpecierum multiplicationes explicat, quarum aliquæ quidem ex definitione prima, & ipſa nominum impoſitione manifeſtæ ſunt, reliquas verò demonſtrare facile eſt, tali expedito theoremate.

Quadratus, Cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus, & Cubocubus vnà cum communi eorum latere ſunt ab vnitate continuè proportionales.

Sit vnitas A, quodlibet latus B. cuius quadratus C. cubus D. quadratoquadratus E. quadratocubus F. & cubocubus G. Dico A B C D E F G, eſſe continuè proportionales.

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Definit. 1. Quia enim [1] ex B in B, fit C. erit ex definitione multiplicationis A ad B, vt B ad C. ſimiliter quia [2] ex B. in C, fit D. erit eadem de cauſa A ad B, vt C ad D. Quare ipſi A B C D. ſunt continuè proportionales. Rurſus [3] quia ex C in ſeipſum fit E, erit ex definitione multiplicationis A ad C, ſicut C ad E. Quare cùm inter A & C. cadat vnus medius proportionalis B, [4] cadit etiam vnus in eadem ratione inter C & E, ſed in ratione A ad B, vel B ad C, oſtenſus eſt C ad D. Igitur D eſt ille medius, ac proinde eſt C ad D, vt D ad E. Rurſus [5] quia ex C. in D producitur F, erit A ad C, vt D ad F. Quare rurſus cùm inter A C cadat medius proportionalis B, [6] cadit & vnus medius in eadem ratione inter D & F. Vnde cùm in illa ratione oſtenſus ſit eſſe D ad E, erit E ille medius, & idcireo erit D ad E, vt E ad F. Denique [7] quia ex D in ſeipſum fit G, erit A ad D, vt D ad G. vnde ſicut inter A & D cadunt duo medij proportionales B C, [8] ſic & inter D G cadent duo in eadem ratione. Sed in eadem ratione oſtenſi ſunt eſſe D ad E, & E ad F. Igitur E F ſunt illi medij, ac proinde eſt E ad F, vt F ad G. & omnes A B C D E F G. ſunt continuè proportionales. Quod demonſtrandum erat. Hinc porro ſpecierum multiplicatio demonſtratur. Primo enim ex Numero B in ſeipſum fieri quadratum C, itémque ex Numero B in quadratum C. fieri cubum D, patet ex definitione prima. Secundò ex Numero B. in cubum D, fieri quadratoqua-

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Definit. 1. — Definit. 1. — Definit. 1. — 8. octaui. — Definit. 1. — 8. octaui. — Definit. 1. — 8. octaui.

dratum E probatur. Quia enim per præcedens theorema ipſi A B C D E ſunt continuè proportionales, erit A ad B, vt D ad E. Quare qui ſub extremis A E continetur, æquatur ei qui ſub mediis B D. ſed ex vnitate A in E fit ipſemet E. ergo idem E fiet ex B in D. quod erat propoſitum. Tertio 19. ſeptimi.
dico ex Numero B in ſuum quadratoquadratum E fieri quadratocubum F, quia enim eſt A ad B vt E ad F, numerus qui fit ex A in F, nempe ipſe F æquatur ei qui fit ex B in E. Quòd erat propoſitum. Quartò dico ex Numero B in ſuum quadratocubum F, fieri cubocubum G. Nam vt prius cum ſit A ad B. vt F ad G. fiet idem G ex A in G, vel ex B in F. Quod erat intentum. Quinto ex quadrato C in ſeipſum, fieri quadratoquadratum E, patet ex definitione prima, ſicut & ex eodem quadrato. C in cubum D fieri quadratocubum E. Sextò ex quadrato C in quadratoquadratum E fieri cubocubum G ſic probatur. Quia ob continuam proportionalitatem, vt A ad C, ſic eſt E ad G, idem G fiet ex A in G, vel ex C in E. Quod erat propoſitum. Denique ex cubo D in ſeipſum, fieri cubocubum G. patet ex definitione prima. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

DEFINITIO V.

OMNIS numerus in partem ſibi cognominem multiplicatus, vnitatem producit.

Πᾶς ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ὁμώνυμον αὐτοῦ μόριον πολλαπλασιασθεὶς, μονάδα ποιεῖ.

IN DEFINITIONEM V.

HIC præclarè nugatur Scholiaſtes, cùm putat in hac definitione loqui Diophantum de fractionibus abſolutis, & nulla ſpeciei alicuius nota affectis, quaſi docere velit ex $\frac{1}{3}$ in 3. vel ex $\frac{1}{4}$ in 4. fieri vnitatem, quod quid ad logiſticam conferat, non video, ſed ſanè vulgò Arithmeticorum notum eſt, atque ipſis lippis & tonſoribus; vt geometrica demonſtratione, opus non fuerit ad id confirmandum. Cæterùm non id voluit Diophantus, ſed potius fractiones Algebricas illas, in quibus vnitates per aliquam ſpeciem diuiſæ intelliguntur, ductas in ſpeciem à qua denominantur, producere vnitates abſolutas, vt ſi $\frac{1}{2N}$ ducatur in 4. N. fient 2. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{2}{3Q}$ ducantur in 6. Q. fient 4. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{2}{10C}$ ducantur in 10. C. fient 2. vnitates. Et hanc eſſe Diophanti mentem ex definitione octaua manifeſtè colligitur. Cùm enim ibi multiplicationes huiuſmodi fractionum tradat, non docet quid producatur ſi fractio ducatur in ſpeciem à qua denominatur, quia ſcilicet id iſta definitione iam comprehenderat.

DEFINITIO VI.

ENIMVERÒ cùm vnitas immutabilis ſit, ſempérque maneat ſpecies quælibet in eam multiplicata, eandem generat ſpeciem.

Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἑστώσης ἀεὶ, τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται.

IN DEFINITIONEM VI.

NON melius accepit hanc definitionem Scholiaſtes, quàm præcedentem & ſequentes duas, quod ſemel atque iterum monuiſſe ſufficiat. Exiſtimauit enim in iſtis quatuor definitionibus Diophantum loqui de numeris & fractionibus abſolutis, quod à ſcopo illius prorſus alienum eſt. Hic itaque docet Diophantus, vnitates ductas in ſpeciem quamlibet, ipſammet ſpeciem producere, vt ſi 2. ducantur in 3. N. fient 6. N. Et ſi 4. ducantur in 5. Q. fient 20. Q. & ſic de aliis. Cauſam autem aſſignare videtur, quòd vnitates abſolutæ, vnitatis ipſius naturam ſapiant. Quemadmodum ergo vnitas in quemlibet numerum ducta, producit ipſum eundem numerum, ſic & vnitates in quamlibet ſpeciem multiplicatæ, eandem ſpeciem gignunt.

DEFINITIO VII.

AT partes denominatæ ſi inter ſe multiplicentur, partes producunt ipſis numeris cognomines. Verbi gratia pars numerica in partem numericam ducta, quadraticam gignit; in quadraticam,

Τὰ δὲ ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς. οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ τὸ ἀριθμοστὸν, δυναμοστὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν κυβοστόν. ἐπὶ δὲ κυβοστὸν, δυναμοδυναμοστόν.

ἐπὶ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, δυναμοκυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοκυβοστὸν, κυβοκυβοστὸν, καὶ τοῦτο ὁμωνύμως συμβλήσεται. δυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, κ^{x} ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, $\delta\delta^{x}$. ἐπὶ δὲ κυβοστὸν, $\delta\kappa^{x}$. ἐπὶ δὲ $\delta\delta^{x}$, $\kappa\kappa^{x}$. τὸ δὲ κυβοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, ποιεῖ $\delta\delta^{x}$. ἐπὶ δὲ δ^{x}, $\delta\kappa^{x}$. ἐπὶ δὲ κ^{x}, $\kappa\kappa^{x}$. τὸ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, $\delta\kappa^{x}$ ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, $\kappa\kappa^{x}$. τὸ δὲ δυναμοκυβοστὸν ἐπὶ ἀριθμοστὸν, κυβοκυβοστόν.

cubicam; in cubicam, quadratoquadraticam; in hanc, quadratocubicam; in hanc cubocubicam; idque communicata denominatione continget. Pars verò quadratica, in partem numericam, partem cubicam facit; in quadraticam, quadratoquadraticam; in cubicam, quadratocubicam; in quadratoquadraticam, cubocubicam. Pars autem cubica in numericam, partem facit, quadratoquadraticam; in quadraticam, quadratocubicam; in cubicam, cubocubicam. Sed pars quadratoquadratica in numericam, partem facit quadratocubicam; & in quadraticam, cubocubicam. Denique pars quadratocubica in numericam, partem gignit cubocubicam.

IN DEFINITIONEM VII.

HÆc definitio à quarta pendet. Quemadmodum enim ibi numerorum integrorum à ſpeciebus denominatorum multiplicationes docuit, ita & hic fractionum ab iiſdem ſpeciebus denominatarum multiplicationes tradit, quarum eadem eſt prorſus ratio. Nam ſicut verbi gratia 2. N. in 3. N. faciunt 6. Q. ita $\frac{1}{2}$ N. in $\frac{1}{3}$ N. facit $\frac{1}{6}$ Q. & ſicut 3. N. in 4. Q. faciunt 12. C. ſic $\frac{2}{3}$ N. in $\frac{3}{5}$ Q. faciunt $\frac{6}{15}$ C. & ſic de aliis. Itaque quæ demonſtrata ſunt ad definitionem quartam, hîc etiam locum habent.

DEFINITIO VIII.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ μὲν δύναμιν, ἀριθμὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν, ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον. ἐπὶ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν; ἐπὶ κυβόκυβον, δυναμόκυβον. δυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν δύναμιν ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον κύβον. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμοδύναμιν. κυβοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δύναμιν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβον. δυναμοδυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ς^{x}, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δύναμιν. δυναμοκυβοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ς^{x} δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δύναμιν, κυβοστόν ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμόν. τὸ δὲ κυβοκυβοστὸν ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοκυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοστόν.

RVRSVS fractio numerica in quadratum ducta, numerum gignit; in cubum, quadratum; in quadratoquadratum, cubum; in quadratocubum, quadratoquadratum; in cubocubum, quadratocubum. Fractio verò quadratica in numerum ducta, Fractionem numericam producit; in cubum, numerum; in quadratoquadratum, quadratum; in quadratocubum, cubum; in cubocubum, quadratoquadratum. Fractio cubica ducta in numerum, fractionem quadraticam gignit; in quadratum, fractionem numericam; in quadratoquadratum, numerum; in quadratocubum, quadratum; in cubocubum, cubum. Fractio quadratoquadratica in numerum ducta, producit fractionem cubicam; in quadratum, fractionem quadraticam; in cubum, fractionem numericam; in quadratocubum, numerum; in cubocubum, quadratum. Fractio quadratocubica in numerum ducta, fractionem facit quadratoquadraticam; in quadratum, fractionem cubicam; in cubum, fractionem quadraticam; in quadratoquadratum, fractionem numericam; in cubocubum, numerum. Fractio cubocubica in numerum ducta, fractionem gignit

quadratocubicam; in quadratum, fractionem quadratoquadraticam; in cubum, fractionem cubicam; in quadratoquadratum, fractionem quadraticam; in quadratocubum, fractionem numericam.

IN DEFINITIONEM VIII.

TANGIT hîc aliud genus fractionum, quæ fiunt cùm numerus à ſpecie inferiori denominatus diuiſus intelligitur, per numerum ab altiori ſpecie denominatum, vt ſi vnitates per Numeros diuidantur, fit fractio Numerica, qualis eſt $\frac{2}{1N}$. Et ſi vnitates per quadratos diuidantur, fit fractio quadratica, vt $\frac{1}{4Q}$, & ſic de aliis. Differunt ergo re fractiones iſtæ ab iis de quibus actum eſt ſuperiore definitione, quamuis vtraſque iiſdem nominibus appellet Diophantus. Nam in illis ſpeciei denominatio afficit Numeratorem, in iſtis denominatorem, verbi gratia ſi dicas $\frac{2}{3}$ N. intelligis 2. N. diuidi per 3. At ſi dicas $\frac{2}{3N}$ intelligis 2. diuidi per 3. N. vtramque tamen fractionem Diophantus ἀριθμοστὸν vocat, ſimiliter $\frac{1}{}$ Q. & $\frac{2}{4Q}$ vocat δυναμοστὸν communi nomine, & ſic de aliis. Ratio verò multiplicandi fractiones iſtas, tota pendet à ratione diuidendi ſpecies inter ſe. Porrò diuiſio multiplicationi contraria eſt, quamobrem, vt monet Diophantus definitione decima, cognitis ſpecierum multiplicationibus, cognoſcuntur & diuiſiones: ſicut enim verbi gratia Numerus in Numerum ductus producit Quadratum, ita ſi Quadratus per Numerum diuidatur, orietur Numerus; & ſicut ex Quadrato in Cubum fit Quadratocubus, ita ſi Quadratocubus per Cubum diuidatur, orietur Quadratus, & rurſus ſi Quadratocubus per quadratum diuidatur, orietur Cubus, & ſic de alijs. Hinc patet ſi fractio numerica $\frac{2}{3N}$ ducatur in 2. Q. fieri numerum, nam fit ſeruata vtraque denominatione $\frac{4Q}{3N}$ quia verò diuidendo Quadratum per numerum, oritur numerus, hoc idem eſt atque $\frac{4}{3}$ N. Simili argumento rationem reddes omnium quæ hac definitione complectitur Diophantus.

DEFINITIO IX.

MINVS per minus multiplicatum, producit plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota eſt litera ψ decurtata, & deorſum vergens, ſic ⋔.

ΛΕΙΨΙΣ ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν. καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ⋔.

IN DEFINITIONEM IX.

ΥΠΑΡΞΙΝ & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus vſitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem vt ſignificet Plus nulla vtitur nota, ſed conjunctione tantùm copulatiua. Nos verò in verſione noſtra, eos qui ante nos Latinè ſcripſerunt, imitati; Plus hoc ſigno denotabimus +. Minus verò iſto −. Ceterùm ſi cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat, Plus, & huius rei demonſtrationem requirat, legat Petrum Nonium parte 2. ſuæ Algebræ, cap. 4.

DEFINITIO X.

DECLARATIS ergo multiplicationibus, manifeſtæ ſunt etiam partitiones propoſitarum ſpecierum. Æquum itaque eſt eum qui hoc negotij ſuſcipit, in additione, ſubductione, & multiplicatione quæ ſpeciebus accidunt, exercitatum eſſe, nimirum qua ratione ſpecies quæ adſunt, quæque deſunt non eiuſdem multitudinis, alijs adiicias ſpeciebus quæ vel adſunt, vel itidem adſunt atque deſunt. Et quomodo à ſpeciebus quæ adſunt, & aliis quæ deſunt, auferas alias quæ vel adſint, vel itidem adſint atque deſint.

ΚΑΙ τῶν πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσει, καὶ ἀφαιρέσει, καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι. καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα, καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι. καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν καὶ ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρέσεις ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

IN DEFINITIONEM X.

ADDITIONEM, ſubductionem, multiplicationem, & diuiſionem ſpecierum, cùm diuerſimodè per Plus & Minus copulantur, non perſequitur Diophantus, ſed ſupponit in his jam exercitatum eum qui libros iſtos aggrediatur. Nec ego in re facili diutius immorabor, vide, ſi libet, authores omnes qui logiſticam ſcriptis mandarunt, vt Nicolaum Tartaleam, Petrum Nonium, Chriſtophorum Clauium, alióſque paſſim.

DEFINITIO XI.

ΜΕΤΑ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται ὕπαρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐνελλείψῃ τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται. καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ. πεφιλοτεχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. νῦν δ' ἐπὶ τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδὸν πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῶν ἀριθμῶν, καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτά, καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρέσεις, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς, ἀπὸ ἁπλουστέρων ἐπὶ σκολιώτερα διελεῖν, ὡς προσῆκεν. οὕτω γὰρ εὐόδευτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

DEINDE ſi in aliqua quæſtione tractanda eædem ſpecies adſint ex vtraque parte non æquali multitudine, auferenda ſunt ſimilia à ſimilibus, donec vna ſpecies vni ſpeciei æqualis remaneat. Quod ſi in vtraque parte, vel in altervtra deſint quædam ſpecies, quædam adſint, quæ deſunt vtrinque addenda ſunt, dum ſpecies eædem vtrinque inueniantur; rurſumque vtrimque auferenda ſimilia à ſimilibus, tantiſper dum ab vtraque parte vna ſpecies relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionum poſitionibus, quoad detur, conabere efficere, vſque dum vna ſpecies vni ſpeciei æqualis deprehendatur. Poſterius autem tibi commonſtrabimus quomodo quæſtio explicetur, etiam cùm duæ ſpecies vni æquales relinquuntur. Nunc verò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis via abundè pateat, ob materiam ab ipſis ſpeciebus collectam. Cùm autem plurimi ſint numeri, & mole ingentes, atque ideo tardè comprehendantur ab iis qui huic ſtudio incumbunt, nec valent memoria; ſtatui quæ ex iis ita decerpi poſſunt, ita vt maximè in tractationis principio elementorum partes ſuſtineant, primo loco proponere, & à ſimplicioribus ad perplexiora progredi. Sic enim incipientibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim incluſa.

IN DEFINITIONEM XI.

ÆQVATIO, eſt vnicum medium quo vtitur Logiſtica ad quæuis ſoluenda problemata, tali artificio ignotam quantitatem, notæ alicui comparando, vt tandem inter eas æqualitatem deprehendat, & ſic in agnitionem ignotæ perueniat. Vt autem docet hîc Diophantus, non quælibet æquatio ſtatim apta eſt ſoluendæ propoſitæ quæſtioni, ſed magna interdum indiget præparatione quò fiat ſimpliciſſima, ita vt ſi fieri poteſt vna tantum ſpecies vni ſpeciei, vel duæ, vni æquales reperiantur. Totum verò negotium præparationis æquationum in eo conſiſtit, vt defectus communiter addantur, & ſimilia à ſimilibus auferantur, & ſi vtraque æquationis pars altioris gradus

ſpecies

ſpecies contineat, fiat hypobibaſmus, ſeu deſcenſus quidam, vel depreſſio characterum, vt vocat Xilander, omnia diuidendo per infimæ ſpeciei denominationem. Quæ omnia vt vnico exemplo confirmem, ſint 2. C. + 3. N. æquales 9. N. − 4. Q. Quia ergo deficiunt ex altera parte 4. Q. addantur vtrinque 4 Q. fient 2 C. + 3. N. + 4 Q. æquales 9. N. quia verò ſimiles ſpecies, nempe Numeri vtrimque reperiuntur, auferantur vtrimque 3. N. remanent igitur 2. C. + 4. Q. æquales 6. N. Denique quia ſpecies altioris gradus ex vtraque parte reperiuntur, quæ omnes depreſſionem pati poſſunt, diuidatur vtraque pars per infimam ſpeciem quæ hic eſt 1. N. Fient ergo 2. Q. + 4. N. æquales 6. vnitatibus. Et tunc demum æquatio cenſebitur ritè præparata. Præterea Paraboliſmum addit Franciſcus Vieta in libello aureo cui titulus. Iſagoge in artem Analyticen, cuius præſertim vſus eſt in æquationibus compoſitis, qualis eſt illa quam exhibuimus, quique fit diuidendo ſingulas æquationis partes per vnitates altioris ſpeciei, vt in dato exemplo diuidendo eas per numerum Quadratorum, qui eſt 2. fiunt 1 Q. + 2 N. æquales 3. ſed hac methodo non vtitur Diophantus, qui æquationes compoſitas reſoluit abſque huiuſmodi reductione numeri altioris ſpeciei ad vnitatem, vt ſuo loco docebimus. Porrò hæc omnia tribus tantum nituntur principijs, nimirum.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent ſunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.

Si æqualia per eundem numerum diuidantur, fiunt æquales quotientes.

Hæc breuiter cum Diophanto attigiſſe ſufficiat, qui plura deſiderat, legat Vietam libro citato, vbi breuiter, ſed accuratè more ſuo iſta perſequitur.

Cæterùm æquatione ritè præparata, quomodo ea reſoluenda ſit, vt ignota quantitas innoteſcat, non tradit Diophantus, & cum hic polliceatur ſe daturum regulas quomodo explicetur quæſtio, cùm duæ ſpecies, vni æquales reperiuntur, in libris eius qui extant huiuſmodi regulæ non continentur, ita vt videatur regulas omnes Algebræ quas vocat, ſuppoſuiſſe, vt pote notas (nam iis paſſim vtitur in his libris) vel alio opere edito qui ad nos minimè peruenit, eas tradidiſſe. Equidem regulis ſimplicibus tantum (cùm ſcilicet vna ſpecies vni ſpeciei æquatur) in tribus prioribus libris vtitur: in ſequentibus verò ad compoſitas etiam nonnunquam deuoluitur. Simplices vnica regula comprehenduntur quæ talis eſt.

Facto hypobibaſmo ſi opus ſit, ita vt vnitates alicui ſpeciei æquales remaneant, diuidantur vnitates per numerum à ſpecie denominatum, orietur valor illius ſpeciei.

Vt ſi 3. N. æquentur 12. vbi nullo eſt opus hypobibaſmo, diuide 12. per 3. fit 4. valor vnius numeri. At ſi 2. æquentur 10. N. Facto hypobibaſmo 2. N. æquantur 10. vnde facta diuiſione, prodit 5. valor vnius numeri. Quod ſi 2. C. æquentur 18. N. facto hypobibaſmo, 2. Q. æquantur 18. vnde diuidendo 18. per 2. fit 9. valor vnius quadrati, & extracta radice fit 3. valor Numeri. Et ſic de aliis. Huius regulæ fundamentum totum eſt Regula aurea proportionum, ſeu trium, in qua tertius terminus eſt vnitas, vnde ſola diuiſione opus eſt. Nam verbi gratia in vltimo exemplo, dico per regulam trium, ſi 2. Q. æquantur 18. cui numero æquatur 1. Q? vnde patet diuiſio 18. per 2. quotientem 9. eſſe valorem Quadrati. De compoſitis regulis agemus ad propoſitionem 33. libri huius, vbi earum fundamentum tangit Diophantus. Nam piget diutius immorari in re facili, & vulgo etiam Logiſtarum notiſſima.

QVÆSTIO I.

PROPOSITVM numerum in duos numeros partiri, quorum datum ſit interuallum. Eſto datus numerus 100. interuallum verò 40. oportet inuenire numeros. Statuatur minor 1. N. Maior ergo erit 1. N. & 40. vnitates. Igitur vterque ſimul erit 2. N. + 40. Dabantur autem eſſe 100. Proinde vnitates 100. æquales ſunt 2. N. + 40. Aufero ſimilia a ſimilibus, nimirum aufero 40. vnitates, & à 100. & à 2. N. + 40. relinquuntur 2. N. æquales vnitatibus 60. Ergo alter numerorum eſt 30. Ad poſitiones. Erit minor quidem vnitatum 30. maior verò vnitatum 70. & demonſtratio eſt manifeſta.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἔστω γὰρ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες τεσσαράκοντα, δεήσει εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων μ̄. συναμφότεροι ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ δύο, μονάδες μ̄. δέδονται δὲ μονάδες ρ̄. μονάδες ἄρα ρ̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶ μονάσι μ̄, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια ἀφαιρέσθω ἀπὸ τῶν ρ̄ μονάδας μ̄, καὶ ἀπὸ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν ξ̄. ἑκάτερος ἄρα γίνεται ἀριθμὸς μονάδων λ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων τριάκοντα. ὁ δὲ μείζων μονάδων ο̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & nihil continet quod lectorem motari debeat. Verba autem illa ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, quæ longa periphraſi vertit Xilander, & aliquando etiam perperam, vt ſuo loco monebimus, ego paſſim interpretatus ſum, Ad Poſitiones: vel etiam retento Græco vocabulo. Ad Hypoſtaſes. Semper enim inuento valore numeri, propoſitionem his verbis abſoluit Diophantus, quia videlicet vt propoſitæ quæſtionis habeatur perfecta ſolutio, oportet valorem numeri ad poſitiones applicare, vt hoc loco, Cùm inuenerimus valorem Numeri eſſe 30. quia Minor pars propoſiti numeri poſita erat 1. N. erit ea 30. Maior verò quæ poſita erat 1. N. + 40. erit vtique 70. & ſic numerus 100. diuiſus eſt in duas partes 30. & 70. quarum interuallum 40. vt requirebatur. Poterant etiam poſitiones aliter inſtitui hac arte. Ponatur maior pars 1. N. erit ergo minor 1. N. −40. harum aggregatum eſt 2 N.−40. quod æquari debet numero 100. Quare addendo vtrimque 40. fiunt 2. N. æquales 140. vnde fit 1 N. 70. Ad hypoſtaſes. Erit maior pars 70. Minor 30. vt priùs. Ex vtraque autem operatione elicitur huiuſmodi Canon.

Dato numero diuidendo, adde vel adime datum interuallum, ſemiſſis ſumma majorem partem; ſemiſſis reſidui, minorem exhibebit.

Qui Canon à nobis ſyntheticè demonſtratus eſt propoſit. 23. lib. 1. poriſmatum Aliter etiam rurſus poterant inſtitui poſitiones. Statuatur interuallum quæſitarum partium 2. N. Maior verò pars eſto 50. + 1 N. minor 50 − 1 N. ſic enim vtraque ſimul conficit 100. & interuallum ipſarum eſt 2. N. quod æquatur numero 40. Quare fit 1. N. 20. Ad poſitiones. Maior pars quæ poſita erat 50 + 1 N erit vtique 70. Minor verò quæ poſita erat 50 − 1 N. erit 30. & hinc rurſus elicietur alius Canon.

Semiſſi dati numeri diuidendi, adde vel adime ſemiſſem dati interualli, ſumma & reſiduum quæſitas exhibebunt partes.

Porro ex vtroque Canone manifeſtè colligitur, ſi ſolutio in integris contingere debeat, neceſſe eſſe vt Numerus diuidendus, & datum interuallum, ſint ſimul pares numeri, vel ſimul impares, nam ſi alter ſit par, alter impar; tam eorum ſumma, quam quod reſtat minorem de maiori ſubtrahendo, erit impar numerus. Quare nec ſummæ nec reſidui ſemiſſis in integris haberi poterit. Quod tangere voluit Scholiaſtes. Denique moneo eodem artificio datum quemlibet numerum diuidi in quotlibet partes, quarum interualla data ſint. Verbi gratia. Numerus 100. diuidendus ſit in tres partes, ita vt mediæ ſuprà minimam exceſſus ſit 20. maximæ ſupra mediam exceſſus ſit 24. Ponatur minima 1 N. erit ergo media 1 N + 20. maxima verò 1. N. + 44. Harum ſumma eſt 3 N. + 64. æqualis 100. Quare auferendo vtrimque 64. remanent 3 N. æquales 36. & fit 1 N. 12. Ad poſitiones. Erit minima pars 12. Media 32. Maxima 56. Hinc quoque ſi placet eliciemus hunc Canonem.

Aufer à numero diuidendo ſummam interuallorum cuiuſlibet partis ſupra minimam, reſiduum partire in numerum multitudinis partium, orietur minima pars.

Vnde conſtat, vt quæſtio ſit poſſibilis, ſummam interuallorum cuiuſlibet partis ſuprà minimam, minorem eſſe debere numero diuidendo. Cæterùm duobus alijs modis inſtitui poſſunt poſitiones, pro vt media vel maxima pars ſtatuetur 1 N. & hinc rurſus formari alij Canones, quæ omnia induſtriæ tuæ relinquo.

QVÆSTIO II.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τριπλασίονι. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμῶν τριῶν καὶ ἔστιν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. δεῖ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι μονάσιν ξ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ἴσοι μονάσιν ξ. ὁ ἀριθμὸς ἄρα μονάδων ιε. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μονάδων ιε. ὁ δὲ μείζων μο με.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in ratione data. Conſtitutum ſit numerum 60. partiri in duos numeros in ratione tripla. Statuatur minor 1. N. igitur maior erit 3. N. & eſt maior minoris triplus. Supereſt vt ambo ſimul æquentur vnitatibus 60. ſed ambo compoſiti ſunt 4 N. Proinde 4 N. æquales ſunt vnitatibus 60. eſt ergo 1. N. vnitatum 15. Quamobrem minor eſt 15. maior autem 45.

IN QVAESTIONEM II.

ALITER etiam inſtitui poſſunt poſitiones. Statuatur maior 1. N. Ergo minor $\frac{1}{3}$ N. horum ſumma 1 $\frac{1}{3}$ N. æqualis eſt 60. & fit 1. N. 45. Tantus ergo eſt major, minor verò 15. vt prius. Ex vtraque operatione formatur hic. Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum. Quotiens ductus ſigillatim in ſumptos numeros, exhibebit quaſitas dati numeri partes.

Minimos numeros ſumendos eſſe ait Xilander. Sed neceſſe non eſt, niſi facilitatis gratia, quia minores numeri commodius tractantur.

Poteſt & hæc quæſtio extendi ad diuiſionem dati numeri in quotlibet partes, datas rationes ſeruantes, eritque eadem prorſus operatio, & idem Canon, vt ſuperuacaneum ſit id exemplis illuſtrare.

QVÆSTIO III.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in data ratione, & data differentia. Conſtitutum ſit numerum 80. in duos partiri, ita vt maior minoris triplus ſit, & adhuc 4. vnitates ſuperaddat. Statuatur minor 1 N. erit igitur maior 3 N. + 4. & ſic maior minoris triplus eſt, & adhuc quatuor vnitates ſuperaddit. Reſtat vt ambo ſimul æquentur vnitatibus 80. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 4 N. + 4. Igitur 4 N. + 4. æquales ſunt vnitatibus 80. Aufero ſimilia à ſimilibus. Relinquuntur ergo vnitates 76. æquales 4. N. & fit 1 N. 19. Ad poſitiones. Erit igitur minor numerus 19. Maior autem 61. ad triplum minoris adiectis 4. quæ de 80. ſubduxeram, vt triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Poſtea verò eadem 4. adiicio maiori, vtriuſque quantitate cognita.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων ᾖ, καὶ ἔτι μονάσι τέτταρσιν ὑπερέχῃ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ μείζων ἄρα ἀριθμοὶ τρεῖς καὶ μονάδες τέσσαρες. καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ἐστὶ τριπλασίων, ἔτι δὲ μονάσι τέτταρσιν ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι μονάσι π̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες καὶ μονάδες δ̄, ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες καὶ μονάδες δ̄, ἴσοι μονάσι π̄, καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα μονάδες ος̄ ἴσαι ἀριθμοῖς τέσσαρσι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς μο ιθ̄. ὁ δὲ μείζων μο ξᾱ. προστιθεμένων τῶν δ̄ μο, ὧν ἀφεῖλον ἀπὸ τῶν π̄ μο. ἀφεῖλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων μονάδων ἔσται ἕκαστος ἀριθμός. ὕστερον δὲ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προστίθημι τὰς δ̄ μο. μετὰ τὸ γνῶναι πόσον ἕκαστος.

IN QVAESTIONEM III.

IN Græco, vbi ſcriptum erat ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τῆς δοθείσης repoſui, τοῖς δοθεῖσιν, flagitante ſententia. Cæterum hîc etiam aliter inſtitui poteſt operatio, ſi ponatur Maior 1 N. vnde auferendo 4. remanet 1 N.—4. triplum minoris, Minor ergo eſt $\frac{1}{3}$ N.—1$\frac{1}{3}$ vtriuſque ſumma fit 1$\frac{1}{3}$ N —1$\frac{1}{3}$ æqualis 80. & defectum vtrimque adiiciendo 1$\frac{1}{3}$ N. æquatur 81.$\frac{1}{3}$ Quare fit 1 N. 61. maior numerus. Minor verò 19. vt prius.

Verùm ex operatione Diophanti formabitur iſte Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum dato interuallo multatum; quotientem ſi ducas in minorem ſumptorum, fiet minor quaſitorum.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros qui & datam rationem, & datum ſeruent interuallum. Mandatum ſit maiorem minoris eſſe quincuplum, interuallum autem ipſorum eſſe vnitates 20. ſtatuatur minor 1 N. Maior ergo erit 5 N. Supereſt 5 N. excedere 1 N. vnitatibus 20. At horum interuallum eſt 4 N. hoc igitur æquale eſt vnitatibus 20. & fit 1 N. 5.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ὅπως δοθῇ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι πενταπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν αὐτοῖς ποιεῖν μονάδας κ̄. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμῶν ε̄. λοιπὸν θέλω ἀριθμοὺς ε̄ ὑπερέχειν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδας κ̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστιν ἀριθμοὶ δ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄] ἔσται ὁ

ἐλάσσων ἀριθμὸς μ° ε̄. ὁ δὲ μείζων μονάδων κε̄. καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν πενταπλασίων, ἡ δὲ ὑπεροχὴ γίνεται μονάδων κ̄.

Eritque minor numerus vnitatum 5. Maior autem vnitatum 25. ita maiore minoris quincuplo exiſtente, interuallum eſt 20.

IN QVAESTIONEM IV.

QVADRVPLICITER inſtitui poteſt operatio. Primò vt habetur apud Diophantum. Secundò ſic. Ponatur Maior 1 N. ergo minor $\frac{1}{5}$ N. Horum interuallum $\frac{4}{5}$ N. æquatur 20. & fit 1 N. 25. maior numerus. Ergo minor 5. vt prius. Ex vtraque autem harum operationum iſte Canon elicitur.

Sume duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum, quotiens ductus in ſumptos numeros, quæſitos exhibebit.

Tertiò ſic operabere. Eſto minor 1 N. ergo maior 1 N. + 20. qui cùm ſit minoris quincuplus, erunt 5 N. æquales 1 N. + 20. & tandem 4 N. æquantur 20. vel 1 N. æquatur $\frac{1}{5}$ N. + 4. & tandem $\frac{4}{5}$ N. æquantur 4. & vtroque modo fit 1. N. 5. minor numerus. vnde maior eſt 25. vt prius.

Quartò, eſto maior 1 N. ergo minor 1 N. − 20. qui cum ſit quinta pars maioris, fiet $\frac{1}{5}$ N. æqualis 1 N. − 20. vel 1 N. æqualis 5. N. − 100. & vtraque æquatione reſoluta, fit 1 N. 25. maior numerus, vnde minor eſt 5. vt prius. Hinc etiam alius Canon elici poſſet. Quod tibi conſiderandum relinquo.

QVÆSTIO V.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκατέρων τῶν διῃρημένων τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη συντεθέντα ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον δίδοσθαι ὥστε εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν γινομένων δύο ἀριθμῶν ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἐπὶ τὸ αὐτὸ συντεθέντα ποιῇ μ° λ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς ε̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τρίτον ἔσται μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων ϙ̄ λείψει ςς τριῶν. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄, ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δύο καὶ μονάδας ϙ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἄρα μονάδες δέκα ἴσαι ἀριθμοῖς δυσίν. ὁ ς ἄρα ἔσται μονάδων ε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός, ἔσται μονάδων ε̄. αὐτὸς ἄρα μονάδων κε̄. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τρίτον μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνὸς ἔσται μονάδων κε̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων οε̄. καὶ μένει τὸ τοῦ πρώτου τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον μονάδες λ̄. ὥσπερ κοινῇ συντεθέντα ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt horum vtriuſque, non tamen eædem, datæ partes ſi coniungantur, datum conficiant numerum. Oportet autem talem hunc dari qui ſit in medio duorum numerorum qui fiunt, ſi numeri ab initio propoſiti præſcriptæ partes accipiantur. Imperatum ſit partiri 100. in duos numeros, vt primi tertia pars, & ſecundi quinta pars ſi coniungantur, conficiant 30. Statuam ſecundi quintam partem 1 N. ipſe igitur erit vnitatum 30 − 3 N. atque adeo ipſe primus fiet vnitatum 90 − 3 N. Reliquum eſt vtrumque ſimul conficere vnitates 100. At ambo iuncti conficiunt 2 N. + 90. Hæc igitur æqualia ſunt vnitatibus 100. Aufero ſimilia à ſimilibus. Reſtant igitur vnitates 10. æquales 2 N. ergo fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Statueram ſecundi quintam partem 1 N. erit igitur hæc vnitates 5. atque ideo ipſe ſecundus 25. At primi triens erat 30 − 1 N. eſt igitur 25. atque ipſe primus 75. Et primi quidem tertia, ſecundi verò quinta pars ſimul additæ conficiunt numerum 30. provt imperatum erat.

IN QVAESTIONEM V.

HIc duas velnti conditiones apponit Diophantus. Prima eſt non ſumendas eſſe eaſdem partes vtriuſqne ſegmenti. Quod neceſſarium eſt, non vt quæſtio ſit poſſibilis, ſed vt ſit alicuius momenti. Nam ſi eædem partes vtriuſque ſegmenti petantur, hoc idem erit atque diuidendi numeri partem eandem ſumere. Vt ſi poſtuletur duo ſegmenta de 100. fieri, vt vtriuſque quinta pars numerum certum conficiat, patet non alium eſſe poſſe numerum illum quam 20. qui eſt quinta pars ipſius 100. quia ſcilicet idem eſt ſumere quintam partem totius numeri, atque ſumere quintam partem ſingulorum ſegmentorum illius. Itaque in huiuſmodi caſu, datus nnmerus quem debent conficere præſcriptæ partes quæſitorum ſegmentorum, ſemper idem erit, nimirum eadem pars totius diuidendi numeri vt dictum eſt. At ſegmenta ipſa duo quilibet numeri in quos ſecabitur diuidendus numerus, & ſic infinitas ſolutiones recipiet quæſtio; & abſque vllo negotio ſecando propoſitum numerum in duos quoslibet, ſatisfactum erit propoſito. Secunda conditio prorſus neceſſaria, eſt, Numerum quem conficere debent datæ partes quæſitorum ſegmentorum debere eſſe in medio partium earundem propoſiti numeri. Quod ne ſola experientia cum Xilandro cognoſcamus, hoc argumento probabimus. Sit A. propoſitus numerus ſecandus in duos, vt vnius pars ab B. denominata, & alterius pars à C denominata, ſi coniungantur, fiat D. ſitque B. maior quàm C. & ipſius A. partes eædem ſint E. F. dico D. neceſſariò cadere in E. & F. ſeu eſſe minorem quidem ipſo E. maiorem verò ipſo F. Quia enim vt dictum eſt ſuprà, ſi vtriuſque ſegmenti ex A. ſumeretur eadem pars B. eſſet partium ſumma æqualis ipſi E. patet ſi vnius ſegmenti ſumatur pars B. alterius verò pars minor, puta C ſummam partium nimirum D. fore minorem ipſo E. Rurſus ſi vtriuſque ſegmenti ſumatur eadem pars C, erit ſumma partium æqualis F. Igitur ſi vnius quidem ſegmenti ſumatur pars C, alterius verò maior pars, puta B. erit vtique ſumma partium D. maior quàm F. Quare conſtat propoſitum. In Græco autem vbi legebatur, *ἑαυτῷ δὲ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ μέρη*, legendum cenſui, *ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς* &c. *μὴ τὰ αὐτὰ μέρη*.

E $33\frac{1}{3}$		F 20.
	A 100.	
B $\frac{1}{3}$		C $\frac{1}{5}$
	D 30.	

Porro quadruplex inſtitui poteſt operatio, vt benè monet Xilander.

Prima eſt quæ habetur in textu Diophanti, ponendo $\frac{1}{5}$ ſecundi ſegmenti 1. N.

Secunda fiet ſi ponatur triens primi ſegmenti 1 N. tunc enim erit ipſum primum ſegmentum 3 N. at ſecundi quintans erit 30 − 1 N. atque adeo ipſe ſecundus fiet 150 − 5 N. vnde vtrumque ſegmentum faciet 150 − 2 N. æqualia 100. Additòque vtrimque defectu, & auferendo ſimilia à ſimilibus 2. N. æquantur 50. & fit 1 N. 25. primi triens. Reliqua patent.

Tertio, Ponatur primum ſegmentum 1 N. erit ſecundum 100 − 1 N. primi triens erit $\frac{1}{3}$ N. ſecundi quintans 20 − $\frac{1}{5}$ N. quorum ſumma 20 + $\frac{2}{15}$ N. æquatur 30. & tandem $\frac{2}{15}$ N. æquantur 10. fitque 1 N. 75. primum ſegmentum, ſecundum 25.

Quarto ponatur ſecundum ſegmentum 1 N. erit primum 100 − 1. N. ſecundi quintans fiet $\frac{1}{5}$ N. Primi verò triens $33\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{3}$ N. quorum ſumma $33\frac{1}{3}$ − $\frac{2}{15}$ N. æquatur 30. & tandem $\frac{2}{15}$ N. æquatur $3\frac{1}{3}$ & fit 1. N. 25. ſecundum ſegmentum, primum autem eſt 75. vt prius. Et ex duabus operationibus vltimis quidquid dicat Xilander, Canon fiet non adeo perplexus.

Propoſiti numeri ſume partes ſimiles poſtulatis partibus, minorem aufer à dato numero quem conficere debent quæſita ſegmentorum partes, à maiori aufer datum numerum, reſidua ſigillatim diuide per interuallum fractionum exprimentium partes poſtulatas, orientur quæſita ſegmenta.

Quomodo autem ſolui poſſit quæſtio ſi Propoſitus numerus in plures ſecandus proponatur, ita vt ſegmentorum poſtulatæ partes datum conficiant numerum, non quilibet de vulgo logiſta doceat. Cùm enim huiuſmodi quæſtionum genus infinitas, imo infinities infinitas ſæpe recipiat ſolutiones, totum artificium in ſegmentorum determinatione conſiſtit, quod tradere non pigebit, ſi prius tyrones monuero ne operam ludant in re fortè captum illorum adhuc ſuperante, ſed huius problematis omiſſa tractatione ad vlteriora progrediantur, douec in Logiſtica exercitatiores ardua quæque facilè comprehendant.

Sit igitur propoſitus numerus 100. diuidendus in quatuor numeros, ita vt primi $\frac{1}{2}$ ſecundi $\frac{1}{3}$, tertij $\frac{1}{4}$, quarti $\frac{1}{5}$, hæc omnia ſimul efficiant 27. Oportet autem præſcriptum numerum (puta hîc 27.) cadere inter propoſiti ad diuidendum numeri maximam & minimam partium ſimilium illis quæ poſtulantur; hoc eſt quia maxima pars eſt $\frac{1}{2}$ minima $\frac{1}{5}$ ſumentes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{5}$ de 100. nempe 50. & 20. Oportuit 27. maiorem fuiſſe quàm 20. minorem quàm 50. cuius rei ratio eadem eſt quæ ſupra in conditionis explicatione allata eſt. Itaque ponatur primum ſegmentum 1 N. igitur reliqua ſimul erunt 100. − 1 N. & cùm primi ſegmenti $\frac{1}{2}$ ſit $\frac{1}{2}$ N. erunt $\frac{1}{3}$ ſecundi, $\frac{1}{4}$ tertij, & $\frac{1}{5}$ quarti ſimul 27 − $\frac{1}{2}$ N. Itaque iam oportet diuidere 100 − 1 N. in tres numeros, ita vt primi $\frac{1}{3}$ ſecundi $\frac{1}{4}$ tertij $\frac{1}{5}$ conficiant 27. − $\frac{1}{2}$ N. Quare ob appoſitam conditionem oportet 27 − $\frac{1}{2}$ N. cadere inter $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$ de 100 − 1 N. hoc eſt oportet

27 — $\frac{1}{2}$ N. eſſe minus quàm 33. $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ N. & maius quam 20 — $\frac{1}{5}$ N. & quidē 27 — $\frac{1}{2}$ N. eſſe minus quàm 33. $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ N. luce clarius eſt. Curandum ergo tantùm vt ſit maius quàm 20 + $\frac{1}{5}$ N. Hoc autem ſi ponatur addendo vtrimque $\frac{1}{2}$ N. opportebit 27. eſſe maius quàm 20 + $\frac{3}{10}$ N. & ablatis vtrimque 20. oportebit 7. maius eſſe quàm $\frac{3}{10}$ N. Quare cùm diuidendo 7. per $\frac{3}{10}$ fiat quotiens 23 $\frac{1}{3}$. Determinatum ergo eſt de primo ſegmento, nam ſtatui poteſt quilibet numerus infrà 23 $\frac{1}{3}$ Ponatur ergo 10. erunt itaque reliqua ſimul 90. & cùm auferendo 5. ſemiſſem ipſius 10. de 27. ſuperſint 22. iam diuidendus erit 90. in tres numeros , ita vt primi $\frac{1}{3}$ ſecundi $\frac{1}{4}$ tertij $\frac{1}{5}$ conficiant 22. ſtatuatur primus ſeu ſecundum ſegmentum ipſius 100. 1 N. erunt duo reliqui 90 — 1 N. & cùm primi $\frac{1}{3}$ ſit $\frac{1}{3}$ N. patet $\frac{1}{4}$ ſecundi & $\frac{1}{5}$ tertij conficere 22 — $\frac{1}{3}$ N. Hoc autem vt poſſibile ſit, oportet 22 — $\frac{1}{3}$ N. cadere inter $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ de 90 — 1 N. hoc eſt oportet 22 — $\frac{1}{3}$ N. eſſe minus quàm 22 $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$ N. & maius quam 18 — $\frac{1}{5}$ N. & primum quidem manifeſtum eſt ſecundum. Autem ſic curabimus. Quia 22 — $\frac{1}{3}$ N. eſt maior quàm 18 — $\frac{1}{5}$ N. addito vtrimque $\frac{1}{3}$ N. manebit 22 maior quàm 18 + $\frac{2}{15}$ N. & ablatis vtrinque 18. manent 4. maiora quàm $\frac{2}{15}$ N. Quare cùm diuidendo 4. per $\frac{2}{15}$ fiat quotiens 30. patet valorem numeri minorem eſſe debere quàm 30. Itaque poſito primo ſegmento 10. determinatum eſt etiam de ſecundo, nam debet eſſe infrà 30. Ponatur ergo quilibet numerus infrà 30. puta 24. Cùm ergo auferendo 10. & 24. de 100. ſuperſint 66. erit hæc ſumma tertij & quarti. Cùm verò ſemiſſis primi ſit 5. & triens ſecundi 8. ſublatis his de 27. remanet 14. pro quadrante tertij & quintante quarti. Diuidatur ergo per propoſitionem Diophanti numerus 66. in duos, vt vnius quadrans cum alterius quintante conficiat 14. inuenies alterum 16. alterum 50. Quamobrem ſoluta eſt quæſtio, & ſunt numeri 100. quatuor ſegmenta 10. 24. 16. 50. quæ ſatisfaciunt poſtulatis. Manifeſtum autem eſt quæſtionem infinities infinitas recipere ſolutiones. Nam vt probatum eſt, poteſt primum ſegmentum poni quilibet numerus infrà 23. $\frac{1}{3}$ hi autem ob fractiones infiniti ſunt. Deinde ſumpto vno ex infinitis illis numeris puta 10. primo ſegmento manente 10. poteſt ſecundum ſegmentum infinities variari, cùm vt oſtenſum eſt poni poſſit quilibet numerus infrà 30. ſed iſta ſufficiant.

QVÆSTIO VI.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ τοῦ προτέρου μέρος δοθὲν τοῦ ἑτέρου μέρους δοθέντος ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ δὴ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐλάσσονα εἶναι τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ, ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ἐν ᾧ ἐστὶν ἡ ὑπεροχή. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τοῦ τοῦ δευτέρου ἕκτου ὑπερέχῃ μο. κ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἀριθμῶν ϛ̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τέταρτον ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς, καὶ μο. κ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἀριθμῶν τεσσάρων καὶ μονάδων π̄. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δέκα, μονάδας π̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ δέκα ἴσοι μονάσι κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μο β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων δώδεκα. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τέταρτον, ἀριθμοῦ ἑνὸς καὶ μονάδων κ̄, ἔσται μονάδων κβ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μο. πη̄. καὶ μένει τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τοῦ τοῦ δευτέρου ἕκτου ὑπερέχον μονάδας κ̄. οἵτινες καὶ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt prioris data pars, poſterioris datam partem ſuperet dato numero. Hunc autem minorem eſſe oportet, eo qui fit ſi propoſiti ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedit. Conſtitutum ſit ergo partiri 100. in duos numeros, vt prioris quadrans, poſterioris ſextantem 20. vnitatibus ſuperet. Pono ſextantem poſterioris 1. N. ipſe ergo erit 6. N. Quadrans autem prioris erit 1. N. + 20. Ipſe itaque 4. N. + 80. Cæterùm volo duorum ſummam eſſe 100. ſed vtriuſque ſumma eſt 10. N. + 80. hæc igitur æquantur vnitatibus 100. Aufero ſimilia à ſimilibus, relinquuntur 10. N. æquales 20. & fit 1. N. vnitatum 2. Ad hypoſtaſes. Statueram ſextantem poſterioris 1. N. Ipſe ergo erit 12. At prioris quadrans fuit 1. N. + 20. erit igitur 22. & ipſe prior 88. manetque hoc, huius quadrantem ſextante illius maiorem eſſe 20. vnitatibus. Ipſi autem coniuncti numeri, propoſitum reſtituunt numerum.

IN QVAESTIONEM VI.

CONDITIONIS appoſitæ ratio in promptu eſt. Impoſſibile eſt enim vt pars aliqua minoris numeri, ſit æqualis vel maior eadem parte maioris numeri. Quare cùm diuidendus eſt 100. in duos hujuſmodi numeros, vt prioris quadrans ſuperet ſextantem poſterioris numero 20. Impoſſibile eſt 20. non eſſe minorem quadrante de 100. Cùm 20. ſit minor quadrante vnius ſegmenti de 100.

Cæterum vt bene monet Xilander ſex diuerſis operationibus ſolui poterat quæſtio.

Prima eſt quæ habetur in textu Diophanti, ponendo ſcilicet ſextantem poſterioris ſegmenti 1 N.

Secunda huic reſpondens eſt. Si ponatur prioris quadrans 1 N. ipſe prior 4 N. vnde fit ſextans poſterioris 1 N. − 20. ipſe poſterior 6 N. − 120. qui priori additus ſummam facit 10 N. − 120. æqualem 100. vnde fit 1. N. 22. prioris quadrans, ſuntque ipſi numeri vt prius 88. & 12.

Tertia operatio eſt. Pono primum 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. − 20. eſt ſextans ſecundi, ipſe ſecundus $1\frac{1}{2}$ N. − 120. qui primo additus facit $2\frac{1}{2}$ N. − 120. æqualia 100. & fit 1 N. 88. primus ſcilicet.

Quarta huic reſpondens eſt. Pono ſecundum 1 N. ergo $\frac{1}{6}$ N. + 20. eſt quadrans primi. ipſe igitur primus eſt $\frac{2}{3}$ + N. 80, qui ſecundo additus facit $1\frac{2}{3}$ N. + 80. æqualia 100. & fit 1 N. 12. ſecundus numerus.

Quinta operatio eſt. Pono primum 1 N. ergo ſecundus eſt 100 − 1 N. Primi quadrans $\frac{1}{4}$ N. ſecundi ſextans $16\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ N. cui addendo 20. fiunt $36\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ N. æqualia $\frac{1}{4}$ N. & tandem $\frac{5}{12}$ N. æquantur $36\frac{2}{3}$ vnde fit 1 N. 88. vt prius.

Sexta huic reſpondens eſt. Pono ſecundum 1 N. ergo primus eſt 100. − 1 N. ſecundi ſextans eſt $\frac{1}{6}$ N. primi quadrans $25 - \frac{1}{4}$ N. Quare $\frac{1}{6}$ N. + 20. æquantur $25 - \frac{1}{4}$ N. & tandem 5. æquantur $\frac{5}{12}$ N. vnde fit 1 N. 12. vt ſuprà.

Ex duabus autem vltimis elicietur huiuſmodi Canon.

Propoſiti numeri ſume partes ſimiles poſtulatis, & minoris adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiore, ſummam & reſiduum partire ſeorſim per aggregatum fractionum exprimentium partes poſtulatas, orientur quæſiti numeri.

QVÆSTIO VII.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, vt reſidui eam ſeruent quæ dabitur rationem. Iubeamur ab eodem numero auferre 100. & 20. vt maius reſiduum, minoris ſit triplum. Statuatur quæſitus numerus 1 N. ab eo ſi auferam 100. reſiduum eſt 1 N. − 100. & ſi ab eodem auferam 20. relinquitur 1 N. − 20. Oportet autem reſiduum maius minoris eſſe triplum; Ter igitur minus reſiduum æquatur maiori. Atqui ter minus reſiduum, fit 3 N. − 300. Hoc ergo æquatur 1 N. − 20. Defectus communis vtrinque addatur, fiunt 3 N. æquales 1 N. + 280. Auferantur á ſimilibus ſimilia; relinquuntur 2 N. æquales vnitatibus 280. & fit 1 N. vnitatum 140. Ad poſitiones. Numerum quæſitum ſtatueram 1 N. Erit igitur vnitatum 140. & ſi ab eo abſtulero 100. ſuperſunt 40. ſi autem abſtulero 20. reſtant 120. Et maius reſiduum minoris eſt triplum.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τὸν ρ̄, καὶ τὸν κ̄. καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ ζητούμενος, ἀριθμοῦ ἑνός. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς, λείψει μονάδων ρ̄ κἂν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφέλω τὸν κ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λείψει μονάδων κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ ἄρα τὰ ἐλάσσονα γίνεται ἀριθμοὶ γ̄. λείψει μο τ̄ ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ λείψει μονάδων κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις. γίνονται ἀριθμοὶ γ̄ ἴσοι ςῷ ἑνὶ καὶ μονάσι σπ̄. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ςοὶ δύο ἴσοι μονάσι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ρμ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ζητούμενον ςοῦ ἑνός. ἔσται ἄρα μο ρμ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπαὶ μονάδες μ̄. ἐὰν δὲ τὸν κ̄ λοιπαὶ μονάδες ρκ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VII.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & ex ea elicitur huiuſmodi Canon.

Ducito maiorem datorum numerorum in denominatorem rationis poſtulatæ, à producto aufer minorem. Reſiduum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur quæſitus numerus.

Aliter etiam cum Franciſco Vieta inſtitui poterat operatio. Ponatur 1 N. defectus quo 100. deficit à quæſito numero. Erit ergo quæſitus numerus 1 N. + 100. Quia verò defectus quo 20. deficit ab eodem quæſito numero, triplus eſt defectus quo 100. ab eodem deficit, erit ipſius 20. defectus 3 N. adeo quæſitus numerus rurſus æquabitur 3 N. + 20. Quamobrem æquales ſunt 1 N. + 100. & 3 N. + 20. vnde fit 1 N. 40. & quæſitus numerus eſt 140. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon, nimirum.

Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur defectus maioris numeri à quæſito numero, quo ei addito, fiet quæſitus numerus.

QVÆSTIO VIII.

DVOBVS datis numeris eundem adiicere numerum, vt compoſiti ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem minorem eſſe ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Iubeamur ad 100. & ad 20. eundem numerum adiicere, vt maius compoſitum, minoris ſit triplum. Ponatur addendus vtrique numero 1 N. is ſi ad 100. addatur, fiet 1 N. + 100. ſi verò ad 20. adiiciatur, fiet 1 N. + 20. & oportet compoſitum maius minoris eſſe triplum. Ter igitur minus compoſitum æquabitur maiori. Ter autem minus compoſitum, fit 3 N. + 60. Hoc ergò æquale eſt 1 N. + 100. Auferantur ſimilia à ſimilibus, ſuperſunt 2 N. æquales vnitatibus 40. & fit 1 N. vnitatum 20. Ad poſitiones. Statueram adiiciendum vtrique numero 1 N. erit ergo vnitatum 20. & ſi ad 100. addatur fiunt vnitates 120. At ſi ad 20. adiiciatur, fiunt vnitates 40. & eſt maius compoſitum minoris triplum.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον· δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον ἐλάττονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ τῷ ρ̄ καὶ τῷ κ̄ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς^{ου} ἑνός. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, ἔσται ἀριθμοῦ ἑνός, μονάδων ρ̄, ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνεται ἀριθμοῦ ἑνὸς, μ° κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἔσται τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ τὰ ἐλάττονα γίνεται ἀριθμοὶ τρεῖς μονάδες ξ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσι μ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς^{ου} ἑνός, ἔσται μονάδων κ̄. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, γίνονται μονάδες ρκ̄. ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνονται μονάδες μ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VIII.

CONDITIO appoſita nil aliud dicit, quàm quod oſtendimus propoſirione prima libri primi poriſmatum. Reliqua omnia ſunt dilucida, & ex operatione Diophanti formabitur iſte Canon.

Aufer à maiore datorum numerorum, productum ex minore in denominatorem rationis poſtulatæ, reſiduum diuide per eundem denominatorem vnitate multatum, orietur quæſitus numerus.

QVÆSTIO IX.

A DATIS duobus numeris auferre eundem numerum, vt reſidui ad inuicem datam habeant rationem. Opor-

ΑΠΟ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. δεῖ δὴ

τὸν

tet autem datam rationem maiorem eſſe ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Imperatum ſit à 20. & à 100. auferri eundem numerum, vt maius reſiduum minoris ſit ſeſcuplum. Statuatur numerus ab vtroque numero auferendus 1 N. Et ſi quidem à 100. auferatur, reliquæ ſunt vnitates 100 – 1 N. ſi autem à 20. detrahatur, reſtant vnitates 20 – 1 N. Et oportet reſiduum maius, minoris eſſe ſeſcuplum. Sexies igitur minus reſiduum æquatur maiori. Sexies autem minus reſiduum fit 120 – 6 N. hoc æquale eſt 100 – 1 N. Adiiciatur communis defectus, & auferantur ſimilia à ſimilibus, relinquuntur 5 N. æquales vnitatibus 20. & fit 1 N. vnitatum 4. Ad Poſitiones. Statueram auferendum ab vtroque numero 1 N. erit is vnitatum 4. Qui quidem ſi à 100. auferatur, ſuperſunt vnitates 96. ſi autem à 20. detrahatur, relinquuntur vnitates 16. Et eſt reſiduum maius minoris ſeſcuplum.

τὸ διδομένον λόγον, μείζονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ κ̄ καὶ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ἑξαπλάσια. τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸς εἷς, κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ μονάδες ρ̄ λεῖψει ς^ο ἑνός. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν κ̄. λοιπαὶ μονάδες κ̄. λεῖψει ς^ο ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι ἑξαπλάσια. ἑξάκις ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσιν. ἑξάκις δὲ τὰ ἐλάσσονα ποιεῖ μο^ο ρκ̄ λεῖψει ςς̄ ς̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄ λεῖψει ς^ο ἑνός. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̄ ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸν ἕνα, ἔσται μονάδων δ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τῶν ρ̄ ἀφαιρεθῇ λοιπαὶ μονάδες ϟς̄. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν κ̄. λοιπαὶ μονάδες ις̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ἑξαπλάσια.

IN QVAESTIONEM IX.

CONDITIONIS hîc appoſitæ eſt eadem ratio, quæ ſuprà. Canon ſic formabitur. *Ducito denominatorem rationis in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem; reſiduum diuide per ipſum denominatorem vnitate multatum, orietur quæſitus numerus.*

Aliter cum Franciſco Vieta licebit operari. Ponamus 1 N. exceſſum ipſius 20 ſuprà quæſitum numerum, erit ergo 6 N. exceſſus ipſius 100. ſupra eundem. Quare quæſitus numerus erit tam 20 – 1 N. quàm 100 – 6. N. Hæc igitur æquantur inter ſe. Et fit 1 N. 16. exceſſus ipſius 20. ſupra quæſitum numerum, quo ablato remanet 4. quæſitus numerus. Et hinc etiam elicietur alius Canon. *Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur exceſſus minoris numeri ſuprà quæſitum numerum, quo ablato remanet quæſitus numerus.*

QVÆSTIO X.

DVOBVS datis numeris, eundem numerum minori quidem ex ipſis addere, detrahere autem à maiori, vt compoſitum ad reſiduum datam habeat rationem. Imperatum ſit ipſi quidem 20. addere, at verò à 100. auferre eundem numerum, vt compoſitum reſidui ſit quadruplum. Ponatur addendus & adimendus vtrique numero 1 N. & ſi ad 20. addatur, fiet 1 N. + 20. ſi verò à 100. detrahatur, fiet 100 – 1 N. & oportet maius minoris eſſe quadruplum. Quater igitur minus æquabitur maiori. Sed quater minus fit vnitates 400. – 4 N. hoc ergo

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῶν προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν γενόμενον πρὸς τὸν λοιπὸν λόγον ἔχειν διδομένον. ἐπιτετάχθω τῷ μὲν κ̄ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τετραπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς^ο ἑνὸς, κἂν μὲν τῷ κ̄ προστεθῇ, γίνεται ς^ο ἑνὸς μο^ο κ̄. ἐὰν δὲ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, γίνεται μο^ο ρ̄ λεῖψει ς^ο ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων εἶναι τετραπλάσια. τετράκις ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τετράκις δὲ τὰ ἐλάσσονα γί-

νται μονάδες υ̅ λεῖψει ἀριθμῶν δ̅. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσιν κ̅. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̅. ἴσοι μονάσι τπ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ος̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ς^ο ἕνα. ἔσται μο. ος̅. κἂν μὲν τῷ κ̅. μο ος̅ προστεθῶσι. γίνονται μο ϟς̅, ἐὰν δὲ τοῦ ρ̅ ἀφαιρεθῶσι, λείπονται μονάδες κδ̅, καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ὄντα τετραπλάσια.

æquatur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & auferantur à ſimilibus ſimilia, ſuperſunt 5 N. æquales vnitatibus 380. & fit 1 N. 76. Ad poſitiones. Statueram addendum & adimendum vtrique numero 1 N. is ergo erit 76. & ſi ad 20. addantur 76. fiunt 96. ſi verò à 100. auferantur, ſuperſunt 24. & patet maius minoris eſſe quadruplum.

IN QVAESTIONEM X.

ADVERTE hîc triplicem caſum dari poſſe. Vel enim datis duobus numeris idem tertius quæſitus maiori eſt adimendus, & addendus minori. Vel contrà eſt addendus maiori, & adimendus minori. Et ex prima conſideratione, rurſus duplex caſus oritur. Vel enim poſcimus rationem collecti ad reſiduum, vel reſidui ad collectum, ita vt collectum nunc ſit maius extremum proportionis, nunc verò minus.

Primus caſus eſt is, in quem incidit operatio Diophanti, cùm petat auferri eundem numerum à maiori 100. & addi minori 20. vt ſumma reſidui ſit quadrupla. In quo caſu nil refert quæ proportio poſtuletur, ſiue nimirum maior proportione datorum numerorum, ſiue minor; etenim numerus minor 20. quantumlibet augeri poteſt, & maior 100. quantumlibet minui, vnde quæcumque proportio poſtuletur, poterit ſumma eſſe maius extremum, & reſiduum minus extremum. Sed in hoc caſu hic formabitur Canon.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in maiorem datorum numerorum, à producto aufer minorem; & reſiduum partire per ipſum denominatorem vnitate auctum, orietur quæſitus numerus.

Aliter etiam poſitiones fieri poterant. Exceſſus numeri 100. ſuprà quæſitum, eſto 1. N. erit ergo quæſitus 100 − 1 N. & quia ſupradictus exceſſus ponitur ſubquadruplus compoſiti ex numero 20. & ex quæſito numero, erit compoſitum illud 4 N. Quare auferendo 20. remanet 4 N. − 20 quæſitus numerus. Proinde 100 − 1 N. æquantur 4 N. − 20. & fit 1 N. 24. exceſſus ipſius 100. ſuprà quæſitum numerum, quare detracto 24. de 100. relinquitur quæſitus 76. Hinc rurſus fiet hic Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur exceſſus maioris datorum numerorum, ſuprà quæſitum; eoque detracto remanebit quæſitus numerus.

Secundus caſus eſt, cùm quæſitus numerus addendus quidem eſt, vt prius minori datorum, & à maiore detrahendus, ſed reſiduum ſit maius extremum proportionis poſtulatæ. Tunc autem oportet rationem poſtulatam minorem eſſe ratione datorum numerorum. Quod ſic oſtenditur. Sint A. B. dati numeri A. maior, & B. minor: & ſit G. quæſitus numerus qui additus ad B. faciat D. detractus ab A. relinquat C. ita vt C. ſit maior quàm D. dico rationem A. ad B. maiorem eſſe ratione C. ad D. Nam ratio A. ad D. maioris inæqualitatis, maior eſt ratione B. ad D. minoris inæqualitatis, cùm maiorem habeat denominatorem. Igitur & permutando ratio A. ad B. maior eſt ratione C. ad D. Quod erat propoſitum.

A 100. B 20.
C 96. D 24.
G 4.

17. Quinti.

Hic etiam licet duplicem operationem inſtituere, & duplicem Canonem formare, nimirum.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in minorem datorum numerorum, productum aufer à maiore, & reſiduum diuide per ipſum denominatorem vnitate auctum, orietur quæſitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur ſumma quæſiti numeri & minoris datorum, vnde ſi auferatur minor datorum, remanet quæſitus.

Tertius caſus eſt cùm quæſitus numerus addendus eſt maiori datorum, & à minore detrahendus, vbi neceſſe eſt ſummam maiorem eſſe reſiduo, & oportet poſtulatam rationem, maiorem eſſe ratione datorum numerorum. Quod ſimili prorſus argumento oſtendetur, illius quo ſupra contrarium oſtenſum eſt. Sed & duplex inſtituetur operatio, & duplex Canon formabitur, nimirum.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, & reſiduum diuide per denominatorem ipſum vnitate auctum, orietur quæſitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, quotiens erit exceſſus minoris datorum numerorum ſuprà quæſitum, quo detracto relinquetur quæſitus.

QVÆSTIO XI.

DVOS datos numeros, alterum quidem addere, alterum vero detrahere ab eodem numero, vt geniti ad inuicem datam habeant rationem. Conſtitutum ſit ipſum quidem 20. addere, ſed ipſum 100. auferre ab eodem numero, vt maior genitorum, minoris triplus ſit. Eſto quæſitus 1 N. & ſi huic adiiciamus vnitates 20. fit 1 N. + 20. ſi autem ab eodem auferantur vnitates 100. ſupereſt 1 N. − 100. & oportet maiorem minoris eſſe triplum. Ter igitur minor æquatur maiori. Sed minor ter fit 3 N. − 300. Igitur 3 N. − 300. æquantur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & ſimilia à ſimilibus auferantur, ſuperſunt vnitates 320. æquales 2 N. & fit 1 N. 160. Ad poſitiones. Eſt maior vnitatum 180. minor 60. & patet maiorem minoris eſſe triplum.

ΔΥΟ δοθέντας ἀριθμοὺς, ὃν μὲν προσθεῖναι, τὸν δὲ ἕτερον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μὲν κ̄ προσθεῖναι, τὸν δὲ ρ̄ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ° ἑνός. κἂν μὲν τούτῳ προσθῶμεν μ° κ̄. γίνεται ϛ ἑνὸς μ° κ̄. ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ μ° ρ̄. λοιπὸς ἀριθμὸς εἷς λείψει μ° ρ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια, τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. ἀλλὰ τρὶς τὰ ἐλάττονα γίνεται ϛ τρεῖς λείψει μ° τ̄. ἀριθμοὶ ἄρα τρεῖς λείψει μ° τ̄. ἴσα ἐστὶ ϛ ἑνὶ μ° κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, μονάδες τκ̄. ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶν, καὶ γίνεται ὁ ϛ μ° ρξ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μ° ρπ̄. ὁ δὲ ἐλάττων ξ. καὶ μένει τὸν μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, vnde Canon vniuerſalis elicitur, quamuis eum Xilander ad proportionem multiplicem malè reſtringat.

Multiplica detrahendum per denominatorem rationis, producto adiice addendum, ſummam diuide per denominatorem ipſum vnitate multatum, orietur quæſitus numerus.

Aliter etiam licet operari. Ponatur defectus ipſius 100. à quæſito numero 1 N. ergo ipſe quæſitus numerus eſt 1 N. + 100. At 3 N. erit ſumma quæſiti numeri & ipſius 20. Quare ablato 20. remanet quæſitus 3 N. − 20. Proinde 1 N. + 100. æquantur 3 N. − 20. & fit 1 N. 60. defectus ipſius 100. à quæſito, quare quæſitus eſt 160. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, quotiens erit defectus detrahendi numeri à quæſito, quo reſtituto fiet quæſitus.

QVÆSTIO XII.

PROPOSITVM numerum diuidere bis in duos numeros, ita vt vnus è prima diuiſione ad vnum è ſecunda diuiſione datam habeat rationem. At reliquus ex ſecunda diuiſione ad reliquum è prima rationem item habeat datam. Iniunctum ſit nobis numerum 100. diuidere bis in duos numeros, ita vt maior è prima diuiſione, minoris è ſecunda diuiſione ſit duplus; maior verò è ſecunda diuiſione minoris è prima diuiſione ſit triplus. Ponatur minor è ſecunda diuiſione 1 N. Maior igitur è prima diuiſione erit 2 N. Minor itaque è prima diui-

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς. ὅπως ὁ εἷς ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ᾖ διπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ᾖ τριπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ϛ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης

διαιρέσεως ἔσται ςς δύο. ὁ ἐλάττων ἄρα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, μονάδων ρ̄. λείψει ἀριθμῶν δύο. καὶ ἐπεί ἐστι αὐτοῦ τριπλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, ἔσται μονάδων τ̄. λείψει ἀριθμῶν ϛ. λοιπὸν ἄρα καὶ τοὺς τῆς δευτέρας διαιρέσεως συντεθέντας ποιεῖν μο ρ̄. ἀλλὰ συντεθέντες ποιοῦσι μονάδας τ̄. λείψει ἀριθμῶν ε̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μονάδων μ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν μείζονα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ςς δύο. ἔσται μονάδων π̄. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῆς αὐτῆς διαιρέσεως μονάδων ρ̄. λείψει ςς δύο. ἔσται μο κ̄. τὸν δὲ μείζονα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως μο τ̄. λείψει ςς ϛ̄. ἔσται μο ξ. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς ἑνός. ἔσται μο μ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

ſione erit vnitatum 100 − 2 N. & quia hujus triplus eſt maior è ſecunda diuiſione, erit vtique 300 − 6 N. Supereſt igitur vt ambo ſecundæ diuiſionis conjuncti efficiant 100. At coniuncti faciunt 300 − 5 N. Hoc ergo æquatur 100. & fit 1 N. vnitatum 40. Ad poſitiones. Poſueram maiorem è prima diuiſione 2 N. erit ergo vnitatum 80. Minorem verò eiuſdem diuiſionis ſtatueram 100 − 2 N. erit igitur 20. At poſueram maiorem è ſecunda diuiſione 300 − 6 N. erit ergo 60. Minor denique è ſecunda diuiſione qui poſitus fuerat 1 N. erit 40. & euidens eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM XII.

BENE' monet Xilander quadruplicem inſtitui poſſe operationem, eò quod quælibet pars cuiuſlibet diuiſionis poni poteſt 1 N. Sed ego præterea ex ipſa Diophanti operatione aio formari poſſe huiuſmodi Canonem.

Ducito ſigillatim denominatorem rationis vtriuſque vnitate multatum, in datum numerum, producta diuide ſeorſim per numerum qui fit ex mutua denominatorum multiplicatione vnitate multatum, orientur minores partes vtriuſque diuiſionis. Item.

Ducito ſigillatim denominatorem rationis vtriuſque vnitate auctum, in datum numerum producta diuide ſeorſim per eundem qui ſuprà numerum, orientur partes maiores.

Cæterùm in ſimilibus quæſtionibus, ſi pars vna prioris diuiſionis ſit maior vna parte poſterioris, neceſſariò altera poſterioris pars eſt maior altera prioris, quin etiam & eodem interuallo maior eſt, vt conſtat ex prop. quarta libri primi poriſm. Quo fundamento qui niti velit, aliter etiam operationem inſtituet hac arte. Sit minor pars primæ diuiſionis 1 N. Ergo maior ſecendæ erit 3 N. & cùm harum partium interuallum ſit 2 N. oportet & reliquas eodem diſtare interuallo, ſed quia reliqua primæ diuiſionis eſt dupla reliquæ ſecundæ, illarum interuallum æquale eſt ipſi minori parti ſecundæ diuiſionis, quare hæc pars eſt 2 N. quæ maiori nimirum 3 N. addita efficit 5 N. æquales 100. vnde fit 1 N. 20. minor pars primæ diuiſionis, &c.

QVÆSTIO XIII.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως, λόγον, ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἔτι ὁ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὰ ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐκ τῆς τρίτης ᾖ διπλασίων. καὶ ἔτι ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης ᾖ

PROPOSITVM numerum diuidere ter in duos numeros, vt vnus è prima diuiſione ad vnum è ſecunda, datam habeat rationem. Reliquus autem è ſecunda diuiſione, ad vnum è tertia datam habeat rationem. Et rurſus reliquus è tertia diuiſione ad reliquum è prima datam etiam habeat rationem. Iniunctum ſit numerum 100. diuidere ter in duos numeros, vt maior è prima diuiſione, minoris è ſecunda ſit triplus; at maior è ſecunda diuiſione, minoris è tertia ſit duplus; & adhuc maior è tertia diuiſione, minoris è prima ſit quadruplus. Ponatur minor è tertia diuiſione 1 N. Maior

igitur è ſecunda diuiſione erit 2 N. Et quia totus numerus qui diuiditur eſt 100. erit minor è ſecunda diuiſione 100 – 2 N. Et quoniam huius triplus eſt maior è prima diuiſione, erit is 300 – 6 N. Igitur minor ex eadem diuiſione erit 6 N. – 200. Et quia illius quadruplus eſt maior è tertia diuiſione, erit is 24 N. – 800. Supereſt vt tertiæ diuiſionis vtraque pars ſimul efficiat 100. ſed vtraque ſimul eſt 25 N. – 800. Hoc igitur æquatur 100. Et fit 1 N. vnitatum 36. Ad poſitiones. Erit minor è tertia diuiſione 36. maior autem 64. At minor è prima diuiſione 16. maior 84. Denique minor è ſecunda diuiſione erit 28. maior 72. Et manifeſtum eſt hos ſatisfacere propoſito.

τετραπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως ςʷ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔσται ςς δύο. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ διαίρεσίς ἐστι μο. ρ̄. ὁ ἄρα ἐλάττων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔσται μο. ρ̄. λεῖψει ςς δύο. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ τριπλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ἔσται μο τ̄. λεῖψει ςς ς̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔσται ςς ς̄. λεῖψει μο σ̄. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ τετραπλασίων μείζων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως, ἔσται ςς κδ̄. λεῖψει μο ω̄. λοιπόν ἐστι τὴν τρίτην διαίρεσιν συντεθεῖσαν ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλὰ συντεθεῖσα ποιεῖ ςςοὶ κε̄. λεῖψει μο. ω̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μο. λς̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως μο. λς̄. ὁ δὲ μείζων ξδ̄. ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ις̄. ὁ δὲ μείζων πδ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως κη̄. ὁ δὲ μείζων οβ̄. καὶ δῆλον ὅτι ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIII.

SEXTVPLICITER inſtitui poſſe operationem benè monet Xilander. Ego verò & Canonem fabricor ſatis ingenioſum.

Sume tres denominatores eo quo proponuntur ordine, & ducito quemlibet vnitate multatum in eum qui ab ipſo tertius eſt, productum vnitate auctum ducito in datum numerum, & productum diuide per ſolidum ſub denominatoribus contentum vnitate auctum, habebis minores partes ſingularum diuiſionum.

vel.

Ducito quemlibet denominatorem vnitate multatum in eum qui ab ipſo tertius eſt, productum vnitate auctum ducito in reliquum denominatorem, & productum ducito in datum numerum, productumque diuide per ſolidum de quo ſuprà, habebis maiores partes ſingularum diuiſionum.

Propoſitis autem tribus numeris, tertius à quolibet dicitur ille qui tertius ab eo numeratur, ſi cùm perueneris ad vltimum, recurras ad primum. Vt hiſce propoſitis 3. 2. 4. Tertius ab ipſo 3. eſt 4. At tertius ab ipſo 2. eſt 3. denique tertius ab ipſo 4. eſt 2.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ad eorumdem ſummam datam habeat rationem. Oportet autem multitudinem vnitatum quæ ſtatuetur pro altero numerorum maiorem eſſe denominatore rationis datæ. Mandatum ſit productum ex multiplicatione, ad ſummam habere rationem triplam. Ponatur alter numerorum 1. N. alter (vt addita conditio præcipit) maior quàm 3. nempè 12. & ſit productus eorum multiplicatione 12 N. ſumma verò illorum 1 N. + 12. ſupereſt vt 12 N. ſint tripli ad 1 N. + 12. Ter igitur minor æquabitur maiori, & fit 1 N. vnitatum 4. Erit ergo alter illorum 4. alter verò

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. δεῖ δὴ τὸ ὑποτιθέμενον πλῆθος τῶν μονάδων ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν μεῖζον εἶναι τοῦ ὁμωνύμου τῷ διδομένῳ λόγου. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχειν τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν εἷς αὐτῶν ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ δὲ ἕτερος κατὰ τὸν προσδιορισμὸν πλείων μονάδων γ̄. ἔστω μονάδες ιβ̄. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπ' αὐτῶν ςςοὶ ιβ̄. ἡ δὲ σύνθεσις αὐτῶν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. λοιπόν ἐστιν ἀριθμοὺς ιβ̄. τριπλασίονας εἶναι ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἔσται ὁ μὲν

αὐτῶν μ° δ̄. ὁ δὲ μ° ιβ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

duodecim & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XIV.

CONDITIO appoſita ſic demonſtrari poteſt. Sint duo Numeri A B. B C. quorum mutuo ductu fiat G. & ſit G ad totum A C. in ratione cuius denominator D, ita vt ex D in A C. fiat G; dico D minorem eſſe quolibet ipſorum A B. B C. Quia enim idem G fit ex A B. in B C. & ex D in A C. crit A B ad A C. vt D ad B C. ſed A B. eſt minor quàm A C. pars quàm totum, ergo & D eſt minor quàm B C. & eodem argumento probabitur idem D minor quàm A B. igitur patet propoſitum.

G 18.
19. ſeptimi. A..... B C
D 2.

Porrò aduerte Canonem à Xilandro traditum nimis particularem eſſe, cùm iubeat ſumere pro altero quæſitorum numerorum, ipſum denominatorem rationis vnitate auctum. Nos itaque ex ipſa Diophanti operatione elicimus hunc legitimum Canonem

Statue pro altero quæſitorum, quemlibet numerum maiorem denominatore rationis, eumque ducito in ipſum denominatorem, productum diuide per interuallum ſumpti numeri & eiuſdem denominatoris, orietur alter quæſitorum.

Sed & operatio Diophanti, & hic Canon eatenus locum habent; quatenus productum eſt maius extremum proportionis. Nam ſi ſumma debet eſſe maior producto, ſic erit proponenda quæſtio.

Inueniantur duo numeri quorum ſumma ad productum eorum multiplicatione datam habeat rationem.

Mandatum ſit ſummæ ad productum rationem eſſe triplam. Ponatur numerorum alter 1 N. alter quilibet numerus puta 2. erit ergo ſumma 2. + 1. N. productum 2 N. Quare cùm illa ſit huius tripla, 6 N. æquabuntur 2 + 1 N. & fert 1 N. $\frac{2}{5}$ ſunt igitur quæſiti numeri 2. & $\frac{2}{5}$ & ſatisfaciunt poſtulatis.

Conditio hic non apponitur, quia poteſt alter quæſitorum eſſe maior denominatore rationis, dum is tantus ſit, vt eo ducto in denominatorem rationis, productus ſuperet vnitatem. Et hinc formatur Canon huiuſmodi.

Sume quemlibet numerum pro altero quæſitorum, eumque ducito in denominatorem rationis, & per productum vnitate multatum diuide ſumptum numerum, orietur alter quæſitorum.

Cæterum ipſam quæſtionem decimamquartam ſoluit infinitè Diophantus quæſtione 41. lib. 4.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος παρ' ἑκατέρου λαβὼν τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν, λόγον ἔχῃ δεδομένον, πρὸς τὸν ὑπολειφθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τοῦ δευτέρου λαβόντα μονάδας λ̄. γίνεσθαι αὐτοῦ διπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μονάδας ν̄. γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ς ἑνὸς καὶ ὧν δίδωσι μονάδων λ̄. ὁ ἄρα πρῶτος ςς̄ δύο λείψει μ° λ̄, ἵνα λαβὼν παρὰ τοῦ δευτέρου τὰς λ̄. μ°. γένηται διπλασίων αὐτοῦ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μ° ν̄ γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος μονάδας ν̄. λοιποὺς ἔχει ςς̄ δύο λείψει μ° π̄. λαβὼν δὲ αὖ ὁ δεύτερος τὰς ν̄ μ° γίνεται ς̄ ἑνὸς μ° π̄. λοιπόν ἐστι ς ἕνα μ° π̄. τριπλασίονα εἶναι ςς̄ δύο λείψει μ° π̄. τρεῖς ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ς μ° ξδ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδων ϟη̄. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων ϟδ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vterque ab altero imperatum numerum accipiens, ad reſiduum datam habeat rationem. Poſtuletur itaque vt prior acceptis à poſteriore 30. vnitatibus, ſit reſidui duplus. Poſterior autem acceptis à priore vnitatibus 50. ſit triplus ad reſiduum. Ponatur poſterior 1 N. & præterea 30. vnitatum quas dat priori; erit ergo prior 2 N. − 30. vt acceptis 30. vnitatibus à poſteriore, ſit reſidui duplus. Reſtat vt poſterior acceptis à priore 50. vnitatibus, ſit triplus ad reſiduum. Prior autem ſi det 50. vnitates, relinquitur 2 N. − 80. At poſterior acceptis 50. fit 1 N + 80. ſupereſt vt 1 N. + 80. ſit triplus ad 2 N. − 80. Ter igitur minor æquatur maiori. & fit 1 N. vnitatum 64. Erit ergo prior 98. poſterior 94. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XV.

HIc formo huiuſmodi Canonem.

Summam duorum numerorum inuicem præſtandorum, ducito ſigillatim in vtrumque denominatorem vnitate auctum, producta diuide per planum ſub denominatoribus vnitate multatum, orientur defectus præſtandorum numerorum à veris.

Vt in exemplo Diophanti ſumma ipſorum 30. & 50. eſt 80. qua ſigillatim ducta in 3. & in 4. fiunt 240. & 320. quæ ſi diuidas per 5. productum ex 2. in 3. vnitate multatum, fiunt 48. & 64. defectus ipſorum 50. & 30. à quæſitis. Quare addendo 48. ad 50. & 64. ad 30. fiunt quæſiti numeri 98. & 94.

QVÆSTIO XVI.

INVENIRE tres numeros vt bini ſimul ſumpti faciant imperatos numeros. Oportet autem vt ſummæ trium imperatorum ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum. Imperetur itaque primum & ſecundum ſimul additos efficere 20. ſecundum & tertium conficere 30. At tertium cum primo facere 40. Ponatur ſumma trium 1 N. & quoniam primus & ſecundus efficiunt 20. ſi ab 1 N. auferam 20. habebo tertium, nempe 1 N. − 20. Ob hæc eadem erit primus 1 N. − 30. At ſecundus 1. N. − 40. Reliquum eſt vt tres ſimul additi æquentur 1 N. Atqui tres ſimul additi faciunt 3. N. − 90. hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 45. Ad poſitiones. Erit primus quidem 15. ſecundus vero 5. Tertius 25. & euidens eſt demonſtratio.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν ἐπιταττομένων τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου συντεθέντας ποιεῖν μο κ̄. τὸν δὲ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν λ̄. τὸν δὲ τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου ποιεῖν μο μ̄. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ςο ἑνὸς καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιοῦσι μο κ̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ςο ἑνὸς ἀφέλω μο κ̄. ἕξω τὸν τρίτον ςο ἑνὸς λείψει μο κ̄. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ςο ἑνὸς λείψει μο λ̄. ὁ δὲ δεύτερος ςο ἑνὸς λείψει μο μ̄. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἀριθμοὺς γίνεσθαι ἴσους ςο ἑνί. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες, ποιοῦσιν ςοι τρεῖς λείψει μο ϙ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο με̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ε̄. ὁ δὲ τρίτος μο κε̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM XVI.

CONDITIONIS appoſitæ ratio eſt, quia cùm tres numeri bini & bini ſumuntur, aggregatum ſummarum quas bini & bini conficiunt, continet bis ſummam trium numerorum, quod euidens eſt, quia quilibet trium numerorum bis ſumitur. Oportet autem ſummam trium numerorum maiorem eſſe ſumma duorum ex illis. Hinc etiam euidens fit cauſa Canonis à Xilandro traditi, qui tamen & ab operatione Diophanti elicitur.

Aggregati ſummarum quas bini & bini conficiunt tres numeri, cape dimidium; hinc aufer ſigillatim dictas ſummas, reſtabunt quæſiti numeri.

Eodem ferè artificio ſoluetur quæſtio ſi quærantur quotlibet numeri multitudine impari, dentúrque ſummæ primi cum ſecundo, ſecundi cum tertio, tertij cum quarto, quarti cum quinto : & ſic deinceps. Ac demum vltimi cum primo. Verbi gratia. Quærantur quinque numeri vt primus cum ſecundo faciat 8. ſecundus cum tertio faciat 9. tertius cum quarto faciat 10. quartus cum quinto faciat 14. denique quintus cum primo faciat 11. Pone ſummam quinque numerorum 1 N. Cùm ergo primus & ſecundus ſint 8. & tertius & quartus 10. erit quintus 1 N. − 18. Rurſus quia ſecundus & tertius ſint 9. quartus & quintus 14. erit primus, 1 N. − 23. Rurſus quia tertius & quartus ſunt 10. quintus & primus 11. erit ſecundus 1 N. − 21. Item quia quartus & quintus ſunt 14. primus & ſecundus 8. erit tertius 1 N. − 22. Denique quia quintus & primus ſunt 11. at ſecundus & tertius 9. erit quartus 1 N. − 20. Horum ſumma 5 N. − 104. æqualis eſt 1 N. & fit 1 N. 26. ſumma quinque numerorum, vnde ſi auferas ſigillatim ſummam quatuor quorumlibet, nempe ipſos 23. 21. 22. 20. 18. remanent quæſiti numeri 3. 5. 4. 6. 8. Quod ſi artificium ſupra allati Canonis libeat imitari. Sume aggregatum ſummarum datarum 8. 9. 10. 14. 11. nempe 52. huius ſemiſſis 26. eſt ſumma quinque quæ-

ſitorum numerorum, vnde vt prius ſi auferas quatuor quoſque remanebit quintus. Præterea in tractatu noſtro de iucundis quæſtionibus quæ per numeros abſoluuntur, alium tradidimus Canonem, hoc vtique non deteriorem, quem, ſi vacat, videre poteris in praxi vigeſima ſecunda.

Verùm ſi multitudo quæſitorum numerorum fuerit par, qui eodem modo bini ſumantur, & vltimus iungatur primo, nec operatio ſimilis nec traditus Canon locum habebunt vt euidens eſt, cuius rei ratio eſt, quia in hoc caſu quæſtio non vnam recipit ſolutionem, ſed infinitas dum modo poſſibilis proponatur, vt ſi quærantur ſex numeri, ita vt primus cum ſecundo faciat 13. ſecundus cum tertio faciat 15. tertius cum quarto faciat 19. quartus cum quinto faciat 11. quintus cum ſexto faciat 10. Poterunt eſſe quæſiti numeri 8. 5. 10. 9. 2. 8. Itemque hi 7. 6. 9. 10. 1. 9. imò & quemcumque ſumas pro primo qui cadat inter 6. & 13. ſatisfacies quæſtioni. Itaque huiuſmodi quæſtiones hac arte reſoluo. Ponatur in dato exemplo primus 1 N. ergo ſecundus eſt 13 – 1 N. vnde tertius fit 2 + 1 N. Quare quartus erit 17 – 1 N. igitur quintus fiet 1 N. – 6. Ac denique ſextus 16 – 1 N. Reſtat vt & ſextus cum primo faciat 16. Quare cùm 16 – 1 N. & 1 N. verè conficiant 16. nulla reſtat ad æquationem via; ita vt vna ſpecies, alteri ſpeciei æqualis reperiatur. Quamobrem cùm inuenti numeri in terminis Algebricis omnes propoſiti partes impleant, manifeſtum eſt quæſtionem infinitè ſolutam eſſe, hoc eſt quemlibet numerum ſumi poſſe pro valore Numeri, modo poſſit poſitionibus ritè applicari. Etenim non quolibet numero pro valore Numeri ſumpto, aptè reſolui poterunt hypoſtaſes, quod accidit quia in aliis reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum, in aliis Numeri cum defectu vnitatum. Quare determinandum de valore Numeri, & præſcribendi ſunt termini inter quos cadere debeat. Hoc autem ſic præſtabitur. Sume hypoſtaſim illam in qua eſt minimus vnitatum numerus cum maximo defectu Numerorum, itemque illam in qua eſt minimus Numerorum numerus cum maximo defectu vnitatum, ſunt hæ 13 – 1 N. & 1 N. – 6. Diuide ergo vtrobique vnitates per multitudinem Numerorum, fient 13. & 6. quæſiti termini. Igitur neceſſe eſt valorem Numeri maiorem eſſe quàm 6. minorem quàm 13. Quicunque autem ponatur inter 6. & 13. ſatisfiet poſtulatis. Modus iſte præſcribendi terminos inter quos cadere debet valor numeri, in quæſtionibus quæ infinitè ſoluuntur, à nemine ante nos (quod ſciam) traditus eſt, cùm ſit facilis, & ad ardua problemata ſoluenda neceſſarius vt iam monui in libello iucundarum quæſtionum quæ per numeros abſoluuntur, & fuſius docebo ad quadrageſimam primam quarti.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως σὺν τρεῖς συντιθέμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν τεσσάρων τὸ τρίτον μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν μονάδας κ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κβ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κδ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κζ. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ϛ° ἑνός, καὶ ἐὰν ἄρα ἀπὸ ϛ° ἑνὸς ἀφέλω τοὺς πρώτους τρεῖς, τουτέστι μονάδας κ. λοιπὸν ἕξω τὸν τέταρτον ϛ° ἑνὸς, λείψει μ° κ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γίνεται, ϛ° ἑνὸς λείψει μ° κβ. ὁ δὲ δεύτερος ϛ° ἑνὸς λείψει μ° κδ. ὁ δὲ τρίτος ϛ° ἑνὸς λείψει μ° κζ. λοιπὸν ἐστι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἀριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνί. ἀλλ' οἱ τέσσαρες συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς τέσσαρας λείψει μ° ϟγ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ°. λα. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° θ. δεύτερος μ° ζ. ὁ δὲ τρίτος μ°. δ. ὁ δὲ τέταρτος μ°. ια. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti faciant poſtulatos numeros. Oportet autem eorum qui poſtulantur numerorum ſummæ trientem maiorem eſſe quolibet ipſorum. Statutum ſit primum & duos deinceps ſimul iunctos facere 20. ſecundum & duos deinceps facere 22. tertium & duos deinceps facere 24. Denique quartum & duos deinceps facere 27. Ponatur quatuor numerorum ſumma 1 N. Igitur ſi ab 1 N. abſtulero tres primos, nempe 20. reliquum habebo quartum, nimirum 1 N – 20. eadem de cauſa primus erit 1 N. – 22. ſecundus 1 N – 24. tertius 1 N. – 27. Supereſt vt quatuor ſimul additi ſint æquales 1 N. ſed quatuor ſimul additi efficiunt 4 N. – 93. Hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 31. Ad poſitiones. Erit primus quidem 9. ſecundus verò 7. tertius 4. quartus 11. & hi ſatisfaciunt quæſtioni.

QVÆSTIO

IN QVAESTIONEM XVII.

CONDITIO hic apponitur eadem de cauſa, qua factum eſt vt præcedenti apponeretur, quia videlicet cùm quatuor numeri, terni ſumuntur, quoties fieri poteſt diuerſis modis, omnes ſumuntur ter. Hinc autem patet, quæſtionem huiuſmodi proponi poſſe de quotlibet numeris qui ſumantur omnes, vno minus, quoties fieri poteſt diuerſis modis, & erit eadem operationis ratio; ſed & Canon vniuerſaliſſimus formabitur.

Aggregatum ſummarum datarum diuidatur per numerum multitudinis numerorum vnitate multatum. Quotiens erit ſumma numerorum quæſitorum, à qua ſi auferantur ſigillatim datæ ſummæ, fient quæſiti numeri.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros vt bini iuncti ſuperent reliquum imperato numero. Iniunctum ſit primum & ſecundum ſuperare tertium vnitatibus 20. ſecundum & tertium ſuperare primum vnitatibus 30. Tertium vero & primùm ſuperare ſecundum vnitatibus 40. Ponatur ſumma trium 2 N. & quoniam primus & ſecundus ſuperant tertium vnitatibus 20. Adiecto vtrimque communi tertio; trium ſumma erit bis tertius, & interuallum 20. Si igitur à ſumma trium, hoc eſt à 2 N. abſtulero 20. habebo bis tertium, ſcilicet 2 N. − 20. ſimplex ergo tertius eſt 1 N. − 10. Ob hæc eadem erit & primus 1 N. − 15. ſecundus verò 1 N. − 20. ſupereſt vt tres ſimul æquentur 2 N. ſed tres ſimul efficiunt 3 N. − 45. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 45. Ad poſitiones. Erit primus 30. ſecundus 25. tertius 35. & hi ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας κ. τὸν δὲ δεύτερον καὶ τὸν τρίτον τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ. τὸν δὲ τρίτον καὶ τὸν πρῶτον τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς, ςς^οἱ β. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ τρίτου, οἱ τρεῖς, δὶς εἰσὶ ὁ τρίτος καὶ ἡ ὑπεροχὴ μονάδες κ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τριῶν, τουτέστιν ἀριθμῶν, δύο ἀφέλω μονάδας κ. ἕξω δὶς τὸν τρίτον ἀριθμῶν δύο λείψει μο κ. ἅπαξ ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς ἑνὸς λείψει μο ι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ςς ἑνὸς, λείψει μο ιε. ὁ δεύτερος ςς ἑνὸς λείψει μο κ. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ςς^οἱ τρεῖς λείψει μο με. ταῦτα ἴσα ςς^οἱ δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο με. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λ. ὁ δὲ δεύτερος μο κε. ὁ δὲ τρίτος μο λε. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

ADIECTO *vtrimque communi tertio*, &c. Res à Scholiaſte obſcuratur potius quàm illuſtretur. Quod autem ait Diophantus tale eſt. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. ſimul ſuperent tertium C. interuallo D. infert Diophantus. Ergo tres A B C. ſimul continent bis ipſum C. & ſemel ipſum D. quia enim A B. ſimul æquantur ipſis C D. ſimul, ſi vtrimque addatur ipſe C. erunt tres A B C. ſimul, æquales ipſi D. & duplo ipſius C. Quod erat propoſitum. Cæterum ex operatione Diophanti elicitur huiuſmodi Canon.

A 3. B 4. C 5.
D 2.

A ſemiſſe aggregati exceſſuum aufer ſigillatim ſemiſſem cuiuslibet exceſſus, reſidua erunt quæſiti numeri.

vel quod idem eſt.

Ab aggregato exceſſuum aufer ſigillatim ipſos exceſſus, reſiduorum ſemiſſes erunt quæſiti numeri.

Hinc autem manifeſtè colligitur Aggregatum ipſum exceſſuum æquale eſſe ſummæ quæſitorum numerorum. Quod tamen etiam aliter demonſtrabitur hac arte. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. ſuperent C. exceſſu D. Ambo B C. ſuperent A exceſſu E. denique ambo A C. ſuperent B. exceſſu F. dico ſummam ipſorum A B C. æquari ſummæ ipſorum D E F. Quoniam enim per mox demonſtrata tres A B C. continent bis ipſum C. & ſemel ipſum D. itemque tres A B C. continent bis ipſum A & ſemel ipſum E. ac denique tres A B C. continent bis ipſum B & ſemel ipſum F. Patet ſummam ipſorum A B C. ter, continere bis

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.

ipſos A B C. & ſemel ipſos D E F. Quare ſi vtrimque auferantur ipſi A B C. bis, remanent iidem A B C. ſemel, æquales ipſis D E F. ſemel. Quod erat oſtendendum.

QVÆSTIO XIX.

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ἔστω ὁ τρίτος ς° ἑνός. συναμφότερος ἄρα ὅ τε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἔσται ς° ἑνὸς μ° κ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι μονάδας λ̄. τάσσω τὸν δεύτερον τοσούτων μονάδων ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τοῦ τε κ̄, καὶ λ̄. τουτέστι μονάδων κε̄. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός ἐστιν ς° ἑνὸς μ° κ̄. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι μονάδων κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς λείψει μ° ε̄. λοιπὸν δὲ καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. ἀλλὰ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου ἐστὶν ἀριθμοὶ δύο λείψει μονάδων ε̄. ἴσοι ἄρα εἰσὶν μονάσιν ξε̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις· ἀριθμοὶ ἄρα δύο ἴσοι μονάσιν ο̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° λε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν πρῶτον ς° ἑνὸς λείψει μ° ε̄. ἔσται μ° λ̄. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων κε̄. τὸν δὲ τρίτον ς° ἑνός, ἔσται μ° λε̄.

Aliter.

QVANDOQVIDEM primus & ſecundus ſuperant tertium vnitatibus 20. eſto tertius 1 N. Igitur primus & ſecundus iuncti erunt 1 N. + 20. Rurſus quoniam ſecundus & tertius ſuperant primum vnitatibus 30. Pono ſecundum tot vnitatum, quantus eſt ſemiſſis numerorum 20. & 30. nimirum vnitatum 25. Et quia primus & ſecundus iuncti ſunt 1 N. + 20. quorum ſecundus eſt vnitatum 25. reliquus erit primus 1 N. − 5. Supereſt vt tertius & primus iuncti ſecundo ſuperaddant vnitates 40. ſed primus cum tertio eſt 2 N − 5. hoc ergo æquatur vnitatibus 65. Communis addatur defectus. Igitur 2 N. æquantur 70. & fit 1 N. 35. Ad poſitiones. Statueram primum 1 N − 5. erit ergo 30. ſecundum autem poſueram 25. At tertium 1 N. Quamobrem erit 35.

IN QVAESTIONEM XIX.

HIC Diophantus vſurpat huiuſmodi Theorema.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet ſimul reliquo ſint maiores, ſumma duorum exceſſuum quibus bini reliquum ſuperant, dupla eſt vnius ex tribus datis numeris, illius ſcilicet ad quem reliquorum exceſſus non eſt relatus.

Quod ſic demonſtratur. Sint tres dati A B C. & iidem exceſſus qui prius D E F. dico ſummam exceſſuum D E. eſſe duplum ipſius B. & ſic de aliis. Quia enim ambo A B. æquantur ambobus C D. itémque ambo B C. æquantur ambobus A E. erunt ipſi A C. ſemel & B. bis æquales ipſis A C D E. Quare auferendo vtrimque ipſos A C. remanet B bis æqualis ipſis D E. Quod erat propoſitum. Eodem argumento oſtendemus ſummam duorum E F. eſſe duplam ipſius C. & ſummam amborum D F eſſe duplam ipſius A. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum. Hinc autem elicitur huiuſmodi Canon.

A 30. B 25. C 35.
D 30. E 30. F 40.

Summa duorum quorumlibet exceſſuum cape ſemiſſem, habebis quæſitos numeros.

Cæterùm placet in artis ſpecimen ex ſupradicto Theoremate aliud etiam non iniucundum adducere, nimirum.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet ſimul reliquo ſint maiores, duorum exceſſuum differentia dupla eſt differentia duorum datorum numerorum, inter quos viciſſim facta eſt exceſſuum comparatio.

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.
G 10. K 5.

Sint dati qui prius A B C. & iidem exceſſus D E F. & duorum D E. differentia ſit G. cuius ſemiſſis K. dico K eſſe differentiam ipſorum A C. Quia enim vt oſtenſum eſt amborum D E ſumma dupla eſt ipſius B [5. 1. poriſ.] ſunt D B E. arithmeticè proportionales. Quare duorum D B. idem eſt interuallum, quod duorum B E. Cum ergo extremorum differentia componatur ex differentiis extremorum & medij, patet G duplum eſſe differentiæ D ad B vel B. ad E. Quamobrem K eſt differentia D & B. Itaque quoniam ambo A B. æquantur ambobus C D. ex hypotheſi [4. 1. poriſ.] erit in arithmetica medietate A ad C. vt D ad B. Quare cùm oſtenſum ſit K eſſe differentiam ipſorum D B. erit idem K differentia ipſorum A C. Quod erat oſtendendum. Eodem modo oſtendemus ſemiſſem differentiæ ipſorum E F. eſſe differentiam ipſorum A B. itemque ſemiſſem differentiæ ipſorum D F. eſſe differentiam ipſorum B C. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

Quod ſi lubeat theorematis huius opem implorare, licebit rurſus alia operatione ab vtraque Diophanti longè diuerſa problema iſtud abſoluere. Ponatur A 1 N. Cùm ergo E ſit minor quàm F numero 10. erit A minor quàm B, ſemiſſe ipſius 10. Quare B erit 1 N. − 5. Rurſus quia E maior eſt quàm D. numero 10. erit & C maior quàm A ſemiſſe ipſius 10. Erit igitur C. 1 N + 5. Iam ergo cùm tres quæſiti numeri ſint 1 N. 1 N − 5. 1 N. + 5. triplici via licet ad æquationem peruenire. Nam primi & ſecundi ſumma 2 N − 5. æquatur ſummæ tertij & interualli D. nimirum 1 N. + 25. Rurſus ſecundi & tertij ſumma nimirum 2 N. æquatur ſummæ primi & interualli E, nimirum 1 N + 30. Denique primi & tertij ſumma 2 N. + 5. æquatur ſummæ ſecundi & interualli F. nimirum 1 N. + 35 & has tres æquationes ſi reſoluas ſigillatim, fiet ſemper 1 N. 30. primus ſcilicet numerus. Poſſet etiam poni 1 N. pro ſecundo, vel pro tertio, & vtroque modo triplici via ad æquationem perueniri, vt manifeſtum eſt.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti reliquum ſuperent numero imperato. Oportet autem ſemiſſe ſummæ quatuor interuallorum minorem eſſe quemlibet ipſorum. Poſtuletur itaque vt primus & duo deinceps coniuncti quarto ſuperaddant vnitates 20. ſecundus & duo deinceps primo ſuperaddant vnitates 30. tertius & duo deinceps ſimiliter ſecundo ſuperaddant vnitates 40. & adhuc quartus & duo deinceps coniuncti tertio ſuperaddant vnitates 50. Ponatur quatuor numerorum ſumma 2 N. & quandoquidem primus & duo deinceps quarto ſuperaddunt vnitates 20. & quo tres primi ſuperant quartum, eo quatuor ſimul ſuperant duplum quarti, ſunt autem quatuor ſimul 2 N. igitur 2 N. ſuperant duplum quarti vnitatibus 20. Quamobrem duplum quarti eſt 2 N. − 20. Ergo ipſe quartus eſt 1 N. − 10. eadem de cauſa, erit & primus 1 N. − 15. ſecundus 1 N. − 20. & tertius 1 N. − 25. ſupereſt vt quatuor ſimul æquales ſint 2 N. ſed quatuor ſimul faciunt 4 N. − 70. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 35. Ad poſitiones. Erit primus 20. ſecundus 15. tertius 10. quartus 25. & quæſtioni ſatisfaciunt.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως οἱ τρεῖς λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τῶν τεσσάρων τοῦ ἡμίσου ἐλάττονα εἶναι ἕκαστον αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ τετάρτου ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ̄. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ὁμοίως τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. καὶ ἔτι τοὺς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας ν̄. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ δύο, καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ὃν δὲ ὑπερέχουσιν οἱ πρῶτοι τρεῖς τοῦ τετάρτου, τούτῳ ὑπερέχουσιν καὶ οἱ τέσσαρες τοῦ τετάρτου δίς, καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες ςςοὶ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα δύο, δὶς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ὁ ἄρα διπλασίων τοῦ τετάρτου ἔσται ςςοὶ β̄ λείψει μο κ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςοῦ ἑνὸς λείψει μο ῑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ςοῦ ἑνὸς λείψει μονάδων ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος ςοῦ ἑνὸς λείψει μο κ̄. καὶ ἔτι ὁ τρίτος ςοῦ ἑνὸς λείψει μο κε̄. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας ἴσους εἶναι ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ' οἱ τέσσαρές εἰσι ςςοὶ δ̄ λείψει μο ο̄. ταῦτα ἴσα ςςοῖς β̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο κ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ιε̄. ὁ δὲ τρίτος μο ῑ. ὁ δὲ τέταρτος μο κε̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

CONDITIONIS adiectæ ratio eſt, quia vt mox oſtendetur, exceſſuum ſumma dupla eſt ſummæ ipſorum quatuor numerorum. Quare ſemiſſis ſummæ exceſſuum qui æqualis eſt ſummæ numerorum debet eſſe maior tribus quibuſlibet, ac proinde multò magis, maior eſt exceſſu trium ſuper reliquum. Quod autem ſumma exceſſuum, ſit dupla ſummæ numerorum, ſic oſtendo. Sint quatuor numeri A B C D. & exceſſus trium quorumlibet ſuper reliquum ſint E F G H. Dico ſummam ipſorum E F G H duplum eſſe ſummæ ipſorum A B C D. Quia enim A B C. ſimul excedunt D numero E. erunt A B C. ſimul æquales ipſis D E. & addendo vtrimque ipſum D. erit ſumma ipſorum A B C D. æqualis ipſi

A 20. B 15. C 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

D bis, & ipſi E ſemel. Eodem modo oſtendemus ſummam eorumdem A B C D æquari ipſi A bis & F ſemel, itemque ipſi B bis & G ſemel, ac denique ipſi C bis & H ſemel. Ergo ſumendo quater ipſos A B C D. erit quadruplum hoc æquale ipſis A B C D bis, & ipſis E F G H ſemel. Quare auferendo vtrimque ipſos A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis æquales ipſis E F G H ſemel. Quod erat propoſitum.

Ceterùm patet demonſtrationis medium congruenti modo applicari poſſe cuilibet Numerorum multitudini propoſitæ, vnde fiet regula generalis.

Si fuerint quotlibet numeri, quorum omnium vno dempto ſuper reliquum exceſſus dentur, erit exceſſuum ſumma ſummæ numerorum multiplex ſecundum numerum multitudinis numerorum binario multatum.

Ita ſi fuerint quinque numeri, erit exceſſuum ſumma ſummæ numerorum tripla, & ſi fuerint ſex numeri, erit exceſſuum ſumma, numerorum ſummæ quadrupla, & ſic in infinitum. Atque ex his & ex ipſa Diophanti operatione elicietur Canon generalis ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas propoſita qualibet multitudine numerorum.

Summam exceſſuum diuide per numerum multitudinis numerorum binario multatum, à quotiente auſer ſigillatim ipſos exceſſus, reſiduorum ſemiſſes erunt quæſiti numeri.

QVÆSTIO XXI.

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μο κ. τετάχθω ὁ τέταρτος ς ἑνός, οἱ τρεῖς ἄρα ἔσονται ς ἑνὸς μο κ. πάλιν ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι μο λ. τετάχθω συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο τοσούτων, ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τῶν δύο ὑπεροχῶν. λέγω δὴ τῆς κ. καὶ τῆς λ. τουτέστι μο κε. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς εἰσὶν ς ἑνὸς μο κ. ὧν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο κε. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς ἑνὸς λείψει μο ε. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ πρώτου μο λ. οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ δευτέρου μο μ. συναμφότερος ἄρα ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἔσται μο λε. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται μο λε. λείψει ς ἑνός. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο κε. ὧν ὁ τρίτος μο λε λείψει ς ἑνός, λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ς ἑνὸς λείψει μο ι. λοιπόν ἐστι τοὺς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μο ν. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι ἀριθμοὺς τρεῖς λείψει μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο λε. λείψει ς ἑνός. δεῖ δὴ καὶ ςοὺς τρεῖς λείψει μο ιε. ὑπερέχειν μονάδας λε λείψει ς ἑνός, μο ν. ὥστε μονάδες πε λείψει ς ἑνὸς ἴσαι εἰσὶν ςοῖς τρισὶ λείψει μο ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν πρῶτον ς ἑνὸς λείψει μο ε. ἔσται μο κ. ὁ δὲ δεύτερος ὁμοίως μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο ι. ὁ δὲ τέταρτος μο κε.

Aliter.

QVONIAM tres à primo ſuperant quartum vnitatibus 20. Ponatur quartus 1 N. Tres ergo reliqui erunt 1 N. + 20. Rurſus quia tres à ſecundo ſuperant primum vnitatibus 30. Ponantur ſecundus & tertius ſimul tot vnitatum, quot continet ſemiſſis duorum interuallorum, duorum ſcilicet 20. & 30. hoc eſt vnitatum 25. Et quoniam tres à primo ſunt 1 N. + 20. quorum ſecundus & tertius ſunt 25. relinquitur primus 1 N. − 5. Et quia tres à ſecundo ſuperant primum vnitatibus 30. At tres à tertio ſuperant ſecundum vnitatibus 40. erunt vtique tertius & quartus ſimul 35. Igitur relinquitur pro tertio 35 − 1 N. Sunt autem ſecundus & & tertius ſimul 25. quorum tertius eſt 35 − 1 N. relinquitur ergo ſecundus 1 N. − 10. Supereſt vt tres à quarto ſuperent tertium vnitatibus 50. ſed tres illi ſimul ſunt 3 N. − 15. Tertius autem eſt 35. − 1 N. Oportet itaque 3 N. − 15. ſuperare 35 − 1 N. æquantur 3 N. − 15. & fit 1 N. vnitatum 25. Ad poſitiones. Statueram primum 1 N. − 5. erit ergo 20. ſecundus verò ſimiliter 15. tertius 10. quartus 25.

IN QVAESTIONEM XXI.

HIc ſupponit Diophantus, hoc theorema.

Datis quatuor numeris, ita vt tres quilibet reliquo ſint maiores, ſumma duorum exceſſuum, quibus tres reliquum ſuperant, dupla eſt ſumma duorum ad quos exceſſuum relatio facta non eſt.

A 20. B 15. C. 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

Sint numeri & exceſſus qui ſuprà. Dico ſummam exceſſuum E F. duplam eſſe ſummæ ipſorum B C. & ſic de alijs. Etenim quia tres A B C. æquantur duobus D E itemque tres B C D. æquantur duobus A F. erunt A D. ſemel & B C. bis æquales ipſis A D E F. Quare auferendo vtrimque ipſos A D. remanent B C. bis æquales ipſis E F. Quod erat propoſitum.

Hinc etiam patet hoc Theorema ad quotlibet numeros congruenter extendi, ſemper enim eodem modo oſtendetur ſummam duorum exceſſuum duplam eſſe ſummæ omnium ad quos non eſt facta exceſſuum relatio. Ita ſi fuerint quinque numeri duorum exceſſuum ſumma erit dupla ſummæ trium numerorũ ad quos non fiet exceſſuum relatio, & ſic in infinitum. Sed & eadem ratione ad quotlibet numeros extendemus Theorema quod attulimus ad quæſtionē decimam nonam, & illud ſic proponemus.

Datis quotlibet numeris, ita vt omnes ſimul vno dempto ſint ſemper reliquo maiores; duorum exceſſuum differentia dupla eſt differentiæ duorum numerum, inter quos viciſſim facta eſt exceſſuum comparatio.

Sint quatuor numeri A B C D. & exceſſus trium quorumlibet ſuper reliquum ſint E F G H. & ipſorum E F. interuallum K cuius ſemiſſis L. Dico L. eſſe interuallum ipſorum A D. Nam ſumpta M ſumma reliquorum B C. inter quos non fit exceſſuum relatio, erit per iam oſtenſa, ſumma duorum E F. dupla ipſius M. Quare E M F. erunt in arithmetica medietate. Atque adeo cùm extremorum E F differentia ſit K, eius ſemiſſis L. erit differentia ipſorum E M. Itaque quia tres A B C. ſeu duo A M. æquantur duobus D E ex hypotheſi, erunt in arithmetica medietate A ad D. vt E ad M. Quare & ipſorum A D. interuallum erit L. Quod demonſtrandum erat. Eademque eſt ratio ſi plures fuerunt numeri, vt patet. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum. Licebit ergo & huius theorematis auxilio alia operatione, eaque ſane multiplici ſoluere huiuſmodi quæſtiones, vt docuimus ad decimam nonam. Sed de his hactenus.

M 25.
A 20. B 25. C 10. D 25.
E 20. F 30. G 40. H 50.
K 10. L 5.

quinta 1. poriſm.

quarta 3. poriſm.

QVÆSTIO XXII.

PROPOSITVM numerum in tres numeros partiri, vt vterius extremorum adſumpto medio ad reliquum extremum datam habeat rationem. Statutum ſit numerum 100. diuidere in tres numeros, vt primus & ſecundus tertij triplum conſtituant. At ſecundus & tertius quadruplum primi. Ponatur tertius 1 N. & quia primus & ſecundus faciunt triplum tertij, erunt vtique ambo 3 N. Tres ergo numeri ſimul erunt 4 N. æquales ſane numero 100. & fit 1 N. 25. Ad poſitiones. Poſueram tertium 1 N. erit ergo 25. Statueram autem primum & ſecundum ſimul 3 N. erunt ergo 75. Rurſus quia ſecundus & tertius conſtituunt quadruplum primi. Ponatur primus 1 N. erunt igitur ſecundus & tertius 4 N. Tres ergo ſimul ſunt 5 N. ſed & vnitates 100. fit igitur 1 N. 20. eſt ergo primus 20. tertius verò 25. Reſiduum igitur eſt ſecundus, nimirum 55. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων προσλαβὼν τὸν μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἄκρων λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ᾖ τετραπλασίων. τετάχθω ὁ τρίτος ς ἑνὸς, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου εἰσὶ τριπλασίων, τετάχθωσαν οἱ δύο, ἀριθμοὶ τρεῖς. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ςςοι δ̄. οὗτοι ἴσοι μονάσιν ρ̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν τρίτον ς ἑνός. ἔσται μ° κε̄. τὸν δὲ πρῶτον καὶ δεύτερον ςς τριῶν, ἔσονται μ° οε̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου εἰσὶ τετραπλασίονες. τετάχθω ὁ πρῶτος ς ἑνὸς, ἔσται ἄρα ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ςς τεσσάρων. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶ ςςοι ε̄. ἀλλὰ καὶ μ° ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μ° κ̄. ἔσται ἄρα ὁ πρῶτος μ° κ̄. ὁ δὲ τρίτος μ° κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ β̄ ἔσται μ° νε̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXII.

EX operatione Diophanti eliciemus huiuſmodi Canonem.

Datum numerum diuide ſigillatim per denominatorem vtriuſque rationis poſtulata vnitate auctum orientur extremi quæſitorum.

Porro quamuis operatio Diophanti per duas poſitiones ſit elegans, poteſt tamen ſolui quæſtio

per vnicam tantum poſitionem, etiam ſine auxilio regulæ quantitatis, quicquid dicat Xilander. Quod ita fiet. Ponatur primus 1 N. ergo ſecundus & tertius ſimul erunt 4 N. & trium ſumma 5 N. quæ ſi diuidatur in duas partes, quarum altera alterius ſit tripla, habebimus hinc tertium, inde ſummam primi & ſecundi. Diuidemus autem 5 N. in duas partes ſeruantes proportionem triplam per Canonem ſecundæ huius, eruntque $1\frac{1}{4}$ N & $3\frac{3}{4}$ N. eſt ergo primus 1 N. tertius $1\frac{1}{4}$ N. & ſiue à ſumma ſecundi & tertij quæ eſt 4 N. auferatur tertius, ſiue à ſumma primi & ſecundi quæ eſt $3\frac{3}{4}$ N. auferatur primus, remanet ſecundus $2\frac{3}{4}$ N. Omnes autem ſimul faciunt 5. N. Igitur 5 N. æquantur 100. & fit 1 N. 20. Ad hypoſtaſes, erit primus 20. ſecundus 55. tertius 25. & conſtat.

QVÆSTIO XXIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου, τοσούτῳ μέρει τοῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τοῦ τοιούτου μέρους ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον, ποιεῖν ἐν αὐτῷ πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον ἢ ἐν τῷ μέσῳ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ, τὸν δὲ μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ μεγίστου τρίτῳ, τὸν δὲ ἐλάχιστον ὑπερέχειν μονάδας ι τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ς^ος ἑνὸς, καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μονάδων ι. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ἀριθμῶν τριῶν, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ τρίτον τοῦ μέσου καὶ μονάδας ι. ἢ καὶ οὕτως. τετάχθω ὁ μέσος ἀριθμοὶ τρεῖς, καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου μο ι. ἔσται ς^ος ἑνὸς, καὶ μο ι. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ πρώτου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει ς^οις δυσὶ λείψει μο ι. ταῦτα ἄρα τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ μεγίστου, αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσται ςς ς λείψει μο λ. δέησει ἄρα καὶ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχει ςς^οις τρισὶ λείψει μο λ. ταῦτα ἄρα τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ ἐλαχίστου, ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται ἀριθμῶν θ λείψει μο ϟ. ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῦ ἑνὸς μο ι δίεσθη. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ιβ. καὶ ἥμισυ. ἔσται ἄρα ὁ μὲν τρίτος μο κβ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέσος λζ. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέγιστος μο με. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum maximus medium excedat minimi data parte; medius minimum ſuperet maximi data parte. At minimus dato numero ſuperet datam medij partem. Oportet autem medium tanta parte maximi præſtare minimo, vt denominatore partis illius ducto in id quo medius excedit minimum, maior in eo exiſtat Numerorum multitudo, quàm in medio. Conſtitutum ſit maximum medio præſtare, triente minimi. Medium autem minimo ſuperaddere trientem maximi. Minimum denique ſuperare trientem medij 10. vnitatibus. Ponatur itaque minimus 1 N. & 10. vnitatum quibus præſtare debet triente medij. Erit ergo medius 3 N. vt contineat minimus trientem medij & vnitates 10. vel ſic. Ponatur medius 3 N. & quia volo minimum ſuperare trientem medij decem vnitatibus, erit minimus 1 N. + 10. Reſtat vt medius minimum ſuperet maximi triente, ſed quo medius minimum ſuperat eſt 2. N. − 10. hoc ergo eſt triens maximi, ipſe igitur maximus eſt 6 N. − 30. Oportet itaque & maximum medio præſtare, triente minimi, ſed quo maximus medium excedit eſt 3 N. − 30. hoc ergo eſt triens minimi, minimus ergo eſt 9 N. − 90. ſed & repertus eſt 1 N. + 10. Quamobrem fit 1 N. 12. $\frac{1}{2}$ erit igitur tertius 22 $\frac{1}{2}$. Medius 37 $\frac{1}{2}$. Maximus 45. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPORTET *autem medium* &c. Refertur hæc conditio ad Algebricos numeros nota N. affectos, & eius neceſſitas ita demonſtrari poteſt. Quia Diophantus ponit pro medio certam Numerorum multitudinem, erit & minimus certa Numerorum multitudo + certis vnitatibus, quia videlicet minimus eſt certa pars medij + certis vnitatibus. Quare medius excedet minimum certa mul-

titudine Numerorum − certis vnitatibus, cùm enim in medio nullæ ſint vnitates abſolutæ, non poterunt ab eo ſubtrahi vnitates quæ ſunt in minimo, niſi per ſignum −. Cùm ergo exceſſus iſte medij ſupra minimum ſit certa pars maximi, vt habeatur maximus, ducetur hic exceſſus in denominatorem partis, fietque maximus conſtans ex multitudine Numerorum − certis vnitatibus. Neceſſe eſt autem vt hæc Numerorum multitudo exiſtens in maximo, ſit maior Numerorum multitudine exiſtente in medio, alioquin ſi ponatur minor vel æqualis, cùm præterea adiunctum habeat defectum vnitatum, ſequetur maximum minorem eſſe medio. Quod eſt abſurdum. Quæ omnia ex ipſamet Diophanti operatione manifeſta ſunt. Sed (quod pace Diophanti dictum velim) hæc conditio, parum congruenter aſſignata videtur. Etenim cùm quæſtioni apponitur conditio, id fit vt per eam agnoſcamus vtrum poſſibilis ſit quæſtio, necne, ne videlicet oleum operamque perdamus circa impoſſibilem fruſtra operantes, ac proinde talis eſſe debet conditio, vt ante ipſam operationem naturam quæſtionis nobis aperiat. Quod ſane non præſtat hæc Diophanti conditio, cùm per eam non niſi iam prouecta operatione, de ſtatu quæſtionis iudicium fieri poſſit. Itaque ſolitum authoris acumen hîc deſidero. Certè non erat difficile legitimam conditionem præſcribere, hoc modo.

Oportet denominatorem partis medij minorem eſſe numero, qui fit ex eodem denominatore vnitate multato in denominatorem partis maximi.

Canonem hîc ſi formare libet, neceſſe erit eum perplexiorem fieri, hoc ſcilicet modo.

Duc inter ſe denominatores partium maximi & minimi, & productum vnitate auctum ducito in datum numerum, productúmque diuide per ſolidum ſub tribus denominatoribus multatum vnitate & numero qui fit ex denominatore partis minimi in ſummam aliorum duorum denominatorum. Quotienti adde datum numerum, fiet minimus quæſitorum. Et eundem quotientem ducito in denominatorem partis medij, fiet ipſe medius.

Verbi gratia debeat maximus ſuperare medium quarta parte minimi. Medius minimum ſexta parte maximi. minimus quintam partem medij numero 12. ducito inter ſe 4. & 6. producto 24. adde 1. fit 25. quem ducito in 12. fit 300. quem diuide per ſolidum ſub denominatoribus 5. 6. 4. multatum vnitate & producto ex 4. in ſummam aliorum, hoc eſt diuide 300. per 75. fit 4. cui ſi addas 12. fit minimus quæſitorum 16. & ſi ducas 4. in denominatorem 5. fiet 20. medius, vnde facile eſt reperire maximum 24. cùm ſit ſextuplus ad interuallum medij & minimi.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros vt maximus medium ſuperet, minimi data parte. Medius minimum excedat, maximi data parte. Minimus dato numero ſuperet datam medij partem. Oportet autem maximi talem partem dari, vt adiecta minimo, numeros pauciores conficiat iis qui pro medio numero ab initio ponebantur. Ponatur rurſus minimus 1 N. & 10. vnitates quibus ſuperat medij trientem; erit ergo medius 3. N. vt ſcilicet minimus ſuperet 10. vnitatibus trientem medij. Rurſus quia volo maximum medio præſtare triente minimi, ſi addidero medio minimi trientem habebo maximum, nimirum $3\frac{1}{3}$ N. + $3\frac{1}{3}$. Reſtat vt medius æqualis ſit minimo, & maximi trienti. Sed minimus cum triente maximi eſt $2\frac{1}{9}$. Hoc igitur æquatur medio ſeu 3 N. Aufero ſimilia à ſimilibus. Ergo $\frac{8}{9}$ N. æquantur $11\frac{1}{9}$. Omnia nouies. Igitur 8 N. æquantur 100.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον τοῦ μεγίστου μέρος τηλικοῦτον δίδοσθαι, ὥστε προστιθέμενον τῷ ἐλαχίστῳ ποιεῖν τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμοὺς ἐλάσσονας τῶν ἐξ ἀρχῆς λαμβανομένων τοῦ μέσου. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς^ο ἑνὸς, καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μέρους μονάδων ι. ἔσται ἄρα ὁ μέσος ςς^οἱ τρεῖς, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος μονάδας ι τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος, ἕξω τὸν μέγιστον ςς γ. α^γχ μ^ο γ α^γχ. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν μέσον ἴσον εἶναι τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ τῷ τοῦ μεγίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ ἐλάχιστος μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μεγίστου ἀριθμοί εἰσι β α^θ. καὶ μονάδες ια α^θ. ταῦτα ἴσα τοῖς τοῦ μέσου ἀριθμοῖς τρισίν. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀριθμοῦ ἄρα η^θ. ἴσα ἐστὶ μονάσιν ια α^θ. πάντα ἐννεάκις. ςς^οἱ ὀκτὼ ἴσοι μο-

νάσιν ἑκατέρ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο. ιβ καὶ ἥμισυ. καὶ ἡ αὐτὴ δεῖξις τῇ ἐπάνω.

& fit 1 N. 12 ½. & eadem eſt quæ ſuprà demonſtratio.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EST eadem prorſus quæſtio cum præcedente, ſed alia operatio. Conditio adiecta eiuſdem eſt naturæ cum ea quæ præcedenti apponitur, & eius neceſſitas ſimili ratiocinatione poteſt deprehendi, ſed eodem vitio laborat atque præcedens, nec per eam determinari quicquam poteſt de quæſtione propoſita, antequam peracta operatione ad æquationem peruentum ſit. Quare melius præſcribetur ſic.

Oportet denominatorem partis medij maiorem eſſe numero qui fit ſi eiuſdem denominatoris aucti parte vnitatis à parte minimè denominata, ſumatur pars à parte maximè denominata, vnitate aucta.

Canon etiam ab hac operatione formari poſſet, ſed intricatus. Quare cum huiuſmodi Canones vix vſui eſſe poſſint ob eorum perplexitatem, illis ſuperſedere ſatius erit.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς, ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν. ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἑαυτοῦ τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. καὶ ἔτι τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ πέμπτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν τρίτον ἐχόντων μέρος, ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω δὴ ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσι. ἔστω δὴ μονάδων τεσσάρων, καὶ μένει ὁ δεύτερος δοὺς καὶ λαβὼν ςου ἑνὸς μο τριῶν. λοιπόν ἐστι τὸν πρῶτον δόντα καὶ λαβόντα γίνεσθαι ςου ἑνὸς μο γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ςον ἕνα, λαβὼν δὲ μονάδας τρεῖς λείψει ἀριθμοῦ ἑνός, γίνεται ςου ἑνός, μο γ. μονάδες ἄρα τρεῖς λείψει ςου ἑνὸς πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ μο ιε λείψει ςς ε. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δοθέντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεσθαι ςου ἑνὸς μο τριῶν. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον μονάδας τρεῖς λείψει ςου ἑνός, λοιπός ἐστι μονάδων ιβ λείψει ςς δ. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεται μο ιγ λείψει ςς δ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο β. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο ς. ὁ δὲ δεύτερος μο δ. ὁ δὲ τρίτος μο ε. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE très numeros, quorum ſi quiſque proximè ipſum ſequenti ſui partem quæ mandatur dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt fiat æqualitas. Statutum ſit vt primus ſecundo det ſui trientem; ſecundus tertio ſui quadrantem; Tertius primo ſui quintantem, & poſt mutuam hanc contributionem fiant æquales. Ponatur primus quotlibet numerorum qui trientem habeant, quandoquidem daturus eſt trientem, eſto itaque 3. N. Statuatur ſecundus quotlibet vnitatum quæ quadrantem habeant, quia daturus eſt quadrantem; eſto itaque vnitatum 4. & erit ſecundus datis & acceptis quæ imperata ſunt 1 N. + 3. Reſtat vt & primus vbi dederit acceperitque, fiat 1 N. + 3. ſed dans ſui trientem 1 N. accipiens autem 3 − 1 N. fit 1 N. + 3. Igitur 3 − 1 N. eſt quinta pars tertij. ipſo ergo tertius eſt 15 − 5 N. Oportet ergò & tertium dantem quidem ſui quintantem, accipientem verò à ſecundo quadrantem illius, nempe vnitatem, fieri 1 N. + 3. ſed dans ſui quintantem, nimirum 3 − 1 N. relinquitur 12 − 4 N. Accipiens autem à ſecundo quadrantem, puta vnitatem, fit 13 − 4 N. Hoc ergo æquatur 1 N. + 3. & fit 1 N. 2. Ad poſitione. Erit primus 6. ſecundus 4. tertius 5. & conſtat propoſitum.

IN QVAESTIONEM XXV.

HÆC quæſtio infinitas recipit ſolutiones, vt patet, cùm poſito primo 3 N. poni poſſit pro ſecundo quilibet vnitatum numerus. Eodemque modo ſi ponas ſecundum 4 N. poni poterit

tertius

tertius quilibet vnitatum numerus. Et ſi ponatur tertius 5 N. ponetur primus ad libitum quilibet vnitatum numerus.

Quod ſi determinare velis huiuſmodi quæſtiones ad vnicam ſolutionem, præſcribendus eſt numerus in quo fieri debet æqualitas, vt ſi proponatur quæſtio hoc modo. Sint inueniendi tres numeri, ita vt primus impertiendo ſui triente ſecundum, ſecundus ſui quadrante tertium. Tertius ſui quintante primum, poſt hanc mutuam contributionem quilibet trium numerorum inueniatur eſſe 10. Tunc autem ſic erit operandum. Eſto primus 3 N. qui dando ſui trientem ſecundo, remanebit 2 N. Quare cùm accipiendo quintantem tertij, debeat eſſe 10. Erit quintans tertij 10 − 2 N. ac proinde ipſe tertius 50 − 10 N. qui dando ſui quintantem remanet 40 − 8 N. vnde cùm accipiendo quadrantem ſecundi, debeat eſſe 10. erit vtique quadrans ſecundi 8 N. − 30. ac proinde ipſe ſecundus 32 N − 120. ſupereſt vt ſecundus dando ſui quadrantem, & accipiendo trientem primi, fiat etiam 10. fit autem 25 N. − 90. Igitur 25 N. − 90. æquantur 10. & fit 1 N. 4. Ad poſitiones. Erit primus 12. ſecundus 8. tertius 10. Ab hac quæſtione parum differunt decima octaua & decima nona ſecundi vt fuſius eo loco docebimus, ita vt videantur hinc eò tranſlatæ.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE quatuor numeros quorum quilibet proximè ſequenti ſe, det ſui partem quæ imperabitur, ita vt dantes & accipientes fiant æquales. Imperatum ſit primum ſecundo dare ſui trientem; ſecundum tertio dare ſui quadrantem; tertium quarto, ſui quintatem; Quartum primo, ſui ſextantem, vt poſt hanc mutuam contributionem fiant æquales. Ponatur primus aliquot numerorum trientem habentium, quoniam trientem daturus eſt ſitque 3 N. ſecundus autem ponatur aliquot vnitatum quadrantem habentium, quandoquidem quadrantem daturus eſt, ſitque 4. ſecundus igitur dans ſui quadrantem, nempe 1. & accipiens primi trientem, puta 1 N. fit 1 N. + 3. Oportet ergo & primum cùm dederit ſui trientem 1 N. & acceperit ſextantem quarti fieri 1 N. + 3. ſed cùm dedit 1 N. relinquitur 2 N. oportet igitur hoc adſcito, ſextantem quarti fieri 1 N + 3. Quamobrem 3 − 1 N. eſt ſextans quarti, atque ipſe quartus eſt 18 − 6 N. Reſtat vt & quartus dato ſui ſextante, & accepto quintante tertij, fiat 1 N. + 3. ſed dato ſui ſextante, nempe 3 − 1 N. remanet 15 − 5 N. Oportet igitur hunc adſumentem quintantem tertij fieri 1 N. + 3 ſed ſi adſumat 6 N. − 12. fit 1 N. + 3. Igitur 6 N − 12. eſt quintans tertij. Ipſe ergo tertius eſt 30 N − 60. Oportet ergo & tertium dato ſui quintante, accepto vero quadrante ſecundi

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τὸ τρίτῳ τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον τῷ τετάρτῳ τὸ πέμπτον. καὶ ἔτι τὸν τέταρτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕκτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν τρίτον μέρος ἐχόντων ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν ἔστω ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσιν, ἔστω μ° δ. ὁ ἄρα δεύτερος δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα γίνεται ς ἑνὸς μ° γ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον γίνεσθαι ἀριθμοῦ ἑνὸς μ° γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ς ἕνα λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς δύο. δεήσει ἄρα τὸ τοῦ τετάρτου ἕκτον λαβόντα αὐτὸν γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° γ. μονάδες ἄρα τρεῖς λεῖψει ς ἑνὸς ἕκτον μέρος εἰσὶ τοῦ τετάρτου. αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται μ° ιη λεῖψει ςς ς. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν τέταρτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον μονάδας τρεῖς λεῖψει ς ἑνὸς, λοιπός ἐστι μ° ιε λεῖψει ςς ε. δεήσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ τρίτου πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° γ. ἀλλὰ ἂν λάβῃ ἀριθμοὺς ς λεῖψει μ° ιβ γίνεται ς ἑνὸς μ° γ. οἵ τε ἀριθμοὶ ς λεῖψει μ° ιβ. πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς λ λεῖψει μ° ξ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δόντα μὲν τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον ἀριθμοὺς ς λεῖψει μ° ιβ. λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς κδ λεῖψει μ° μη. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον

γίνεται ςˢ κδ λείψει μ° μζ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ν̅ εἰκοστοτρίτων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρν, εἰκοστοτρίτων. ὁ δὲ δεύτερος ϟβ, εἰκοστοτρίτων. ὁ δὲ τρίτος ρκ, εἰκοστοτρίτων, ὁ δὲ τέταρτος ριδ εἰκοστοτρίτων, περιῃρήσθω τὸ μόριον. ἔσται δηλαδὴ ὁ μὲν πρῶτος μ° ρν ὁ δὲ δεύτερος ϟβ. ὁ δὲ τρίτος ρκ. ὁ δὲ τέταρτος ριδ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

fieri 1 N. + 3. ſed dato ſui quintante, puta 6 N. – 12. remanet 24 N – 48. Accepro autem ſecundi quadrante fit 24 N. – 47. Hoc ergo æquale eſt 1 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{50}{23}$ Ad poſitiones erit primus $\frac{150}{23}$ ſecundus $\frac{92}{23}$. terrius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$ Abiiciarur denominator parrium. Erit iraque primus 150. ſecundus 92. tertius 120. quartus 114. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XXVI.

EADEM ratio eſt huius quæſtionis, quæ & præcedentis. Quæſtio infinitas recipit ſolutiones, & ſi determinanda ſit ad vnicam, præſcribendus eſt numerus in quo fieri debet æqualitas, tuncque operabimur vt in præcedente traditum eſt. Quod autem denominatores abiici iubet Diophantus, vt ſolutio in integris habeatur, id fit quia ſi inuenti ſemel numeri quæſtioni ſatisfacientes, per eundem multiplicentur vel diuidantur, producta itidem & quotientes quæſtionem ſoluent, cuius rei ratio eſt quam attingit Xilander, quia ſcilicet quæſiti numeri, partes proportionales viciſſim dant & accipiunt, quæ autem partium cognominum eadem totorum inter ſe, ac viciſſim eſt ratio. Vnde etiam colligi poteſt alius modus ſoluendi huiuſmodi quæſtiones, cùm numerus præſcribitur in quo fiat æqualitas. Nam ſi quæſtio prius ſoluatur per operationem Diophanti, & numerus in quo fit æqualitas diuidatur per eum qui præſcribitur, & per quotientem diuidantur item inuenti numeri per operationem Diophanti, habebuntur quæſiti numeri. Verbi gratia, ſi quærantur quatuor numeri dantes & accipientes eaſdem partes quas requirit Diophantus, ita vt facta contributione quilibet reperiatur 59. ½ ſolues prius quæſtionem cum Diophanto, & inuenies numeros 150. 92. 120. 114. Et numerus in quo fit æqualitas erit 119. Hunc ergo ſi diuidas per numerum præſcriptum 59. ½ erit quotiens 2. per quem ſi diuidas ſigillatim inuentos numeros, fient 75. 46. 60. 57. quæſiti numeri. Poſſet etiam tam hæc quàm præcedens paulò aliter proponi, requirendo ſcilicet vt facta mutua contributione fiant numeri, diuerſi non æquales. Verbi gratia, ſint inueniendi quatuor numeri vt primus dando ſui trientem & accipiendo ſextantem quarti fiat 6. Secundus dando ſui quadrantem, & accipiendo trientem primi fiat 7. Tertius dando ſui quintantem, & accipiendo quadrantem ſecundi fiat 14. Quartus dando ſui ſextantem, & recipiendo quintantem tertij, fiat 23. Et tunc imitabimur artificium operationis quæ ad præcedentem tradita eſt, hoc modo. Ponatur primus 3 N. cum ergo multatus ſuo triente & auctus ſextante quarti faciat 6. erit 6 – 2 N. ſextans quarti, & ipſe quartus 36 – 12 N. vnde ablato ſextante, manent 30. – 10 N. quæ cùm quintante tertij debent facere 23. Igitur quintans tertij eſt 10 N. – 7. Ideoque ipſe tertius eſt 50 N. – 35. qui multatus quintante manet 40 N – 28. debetque tunc cum quadrante ſecundi facere 14. Quare 42 – 40 N. eſt quadrans ſecundi, & ipſe ſecundus 168 – 160 N. vnde ablato quadrante manent 126 – 120 N. quæ cum triente primi debent facere 7. ſed faciunt 126 – 119 N. hoc ergo æquatur 7. & fit 1 N. 1. Ad poſitiones primus eſt 3. ſecundus 8. tertius 15. quartus 24.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ πέμπτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ςˢ ἑνὸς, οἱ δὲ λοιποὶ δύο μονάδων τινῶν τῆς προχείρου ἕνεκεν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ° γ. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ςˢ ἑνὸς μ° γ. καὶ δὴ ὁ πρῶτος λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ τρί-

INVENIRE tres numeros vt quilibet à reliquis duobus coniunctis partem imperaram accipiat, & fiant æquales. Statutum ſit primum à reliquis duobus coniunctis ſumere trientem. Secundum à reliquis duobus coniunctis accipere quadrantem. Tertium à reliquis duobus conjunctis ſumere quintantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò duo compendij gratia, quia trientem dare debenr, ſtatuantur vnitatum quotlibet, trienrem habentium, ſinrque 3. Tres ergo numeri ſimul erunt 1 N. + 3.

& ſanè primus ſumens à reliquis duobus trientem, fit 1 N. + 1. Oportet ergo & ſecundum à duobus reliquis coniunctis ſumpto quadrante fieri 1 N. + 1. Sumantur omnia quater. Quater igitur ſecundus adſcitis duobus reliquis, eſt ter ſecundus adſciſcens ipſos tres numeros. Ter ergo ſecundus adiunctis tribus numeris fit 4 N. + 4. Si igitur inde abſtulero tres numeros relinquuntur 3 N. + 1. quod eſt ter ſecundus, ipſe ergo ſecundus eſt 1 N. + $\frac{1}{3}$ Oportet itaque & tertium ſumpto reliquorum duorum quintante fieri 1 N. + 1. Omnia ſimiliter ſumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$. Supereſt vt tres ſimul iuncti ſint æquales 1 N. + 3. & fit N. $\frac{13}{12}$ & omiſſa denominatione partis, fit primus 13. ſecundus 17. tertius 19. & implent poſtulata.

τον, γίνεται ς^ε ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^ε ἑνὸς μονάδος μιᾶς, πάντα τετράκις. τετράκις ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς δύο, τρίς ἐστι ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς τρεῖς. τρὶς ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς τρεῖς γίνεται ἀριθμοὶ δ̄ μονάδες δ̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτων ἀφέλω τοὺς τρεῖς, λοιποὶ ἀριθμοὶ τρεῖς μονὰς μία τρίς ἐστι ὁ δεύτερος. αὐτὸς ἄρα ὁ δεύτερος, ἔσται ς^ε ἑνὸς, μονάδος τρίτου. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον παρὰ τῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς^ε ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα ὁμοίως πεντάκις, καὶ συνάγεται διὰ τῶν ὁμοίων ὁ τρίτος ς^ε ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ δωδεκάτων. καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο ιγ. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο ιζ. ὁ δὲ τρίτος μ^ο ιθ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXVII.

SVMANTVR *omnia quater*, &c. Hæc ſi obſcuriora videantur, ſic poterunt elucidari. Quia oportet ſecundum ſumpto quadrante reliquorum fieri 1 N + 1. ſumendo huius quadruplum patet 4 N + 4. continere quater ſecundum, & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſemel ſumma trium numerorum, nempe 1 N + 3. patet reſiduum 3 N + 1. continere ter ſecundum. Quare fiet ipſe ſecundus 1 N. + $\frac{1}{3}$ Similiter quia 1 N. + 1. continet ſemel tertium, & quintantem reliquorum, ſi ſumatur huius quintuplum, patet 5 N. + 5. continere quinquies tertium, & ſemel reliquos. Quare ſi auferatur inde ſumma omnium, nimirum 1 N. + 3. reſiduum 4 N. + 2. erit tertij quadruplum, erit ergo tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$ cætera patent.

Hæc etiam quæſtio infinitas ſolutiones recipit, & inuentis ſemel numeris quæſtionem ſoluentibus, quotquot ſumentur in iiſdem rationibus, ij ſatisfacient propoſito, vt ſatis indicat Diophantus cùm denominatorem abiicit. Quod ſi præſcribatur numerus in quo fiat æqualitas, iam determinabitur quæſtio ad vnicam ſolutionem. Verbi gratia. Sit propoſitum inuenire très numeros vt primus cum $\frac{2}{3}$ reliquorum faciat 40. Itemque ſecundus cum $\frac{3}{4}$ reliquorum, & rurſus tertius cum $\frac{4}{5}$ reliquorum faciat etiam 40. Ponatur primus 1 N. ergo $\frac{2}{3}$ reliquorum erunt 40 − 1 N. Quare ipſa ſumma ſecundi & tertij fiet 60. − 1 $\frac{1}{2}$ N. & ſumma omnium 60 − $\frac{1}{2}$ N. Itaque cùm 40. contineat ſecundum & $\frac{3}{4}$ reliquorum, huius quadruplum 160. continebit quater ſecundum, & ter reliquos, auferatur ergo hinc triplum ſummæ omnium, puta 180 − 1 $\frac{1}{2}$ N. remanebit ſecundus 1 $\frac{1}{2}$ N. − 20. Similiter quia 40. continet tertium, & $\frac{4}{5}$ reliquorum, huius quintuplum, nempe 200. continet quinquies tertium, & quater reliquos, auferatur hinc quadruplum ſummæ omnium, nimirum 240 − 2 N. remanet tertius 2 N. − 40. Supereſt vt huic addendo $\frac{4}{5}$ tam primi, quàm ſecundi nempe $\frac{4}{5}$ N. & $\frac{6}{5}$ N. − 16. fiat 40. fiunt autem 4 N. − 56. æqualia 40. & fit 1 N. 24. Ad hypoſtaſes. Eſt primus 24. ſecundus 16. tertius 8.

Eodem artificio ſoluetur quæſtio, ſi ſinguli numeri cum certa parte aliorum diuerſos conficiant numeros, vt ſi primus cum $\frac{1}{2}$ aliorum faciat 32. ſecundus cum $\frac{1}{3}$ aliorũ faciat 28 tertius cum $\frac{1}{4}$ aliorũ faciat 31. Ponatur enim primus 1 N. ergo ſemiſſis aliorum eſt 32 − 1 N. ſummaque ipſorũ 64 − 2 N. & ſumma omniũ 64 − 1 N. Cùm ergo 28. contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ reliquorum, huius triplum 84. continet ter ſecundum & ſemel reliquos, quare ſi hinc auferatur ſumma omnium 64 − 1 N. reſiduum 20 + 1 N. erit duplum ſecundi, ac proinde ipſe ſecundus eſt 10 + $\frac{1}{2}$ N. Similiter quia 31. continet tertium & $\frac{1}{4}$ reliquorum, huius quadruplum 124. continet quater tertium & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſumma omnium 64 − 1 N. reſiduum 60 + 1 N. eſt triplum tertij: ergo ipſe tertius eſt 20 + $\frac{1}{3}$ N. ſupereſt, vt huic addendo $\frac{1}{4}$ tam primi quàm ſecundi nempe $\frac{1}{4}$ N. & 2 $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$ N. fiat 31. fit autem 22 $\frac{1}{2}$ + $\frac{17}{24}$ hoc ergo æquatur 31. & fit 1. N. 12. Ad poſitiones. Primus eſt 12. ſecundus 16. tertius 24.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς τὸ τέταρτον, τὸν τρίτον ὁμοίως τὸ πέμπτον. τὸν δὲ τέταρτον τὸ ἕκτον. καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ο ἑνός. οἱ δὲ λοιποὶ τρεῖς μονάδων τινῶν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ^ο γ̄. ὁ ἄρα πρῶτος παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ τρίτον γίνεται ς^ου ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^ου ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα πάλιν ὁμοίως τετράκις. καὶ συνάγεται διὰ τὴν αὐτὴν ὁ μὲν δεύτερος ς^ου ἑνὸς μονάδος τρίτου. ὁ δὲ τρίτος ς^ου ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. ὁ δὲ τέταρτος ς^ου ἑνὸς μονάδος τριῶν πέμπτων. λοιπὸν δεῖ τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ς^ῳ ἑνὶ μονάσι τρισί. συνάγεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο μζ̄ ἐν μορίῳ ἐννενηκοστῷ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο μζ. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο οζ. ὁ δὲ τρίτος μ^ο ϟβ̄. ὁ δὲ τέταρτος μ^ο ρᾱ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE quatuor numeros, vt quilibet à tribus reliquis coniunctis accipiat partem imperatam, & fiant æquales. Imperatum ſit primum à reliquis tribus coniunctis ſumere trientem. Secundum à reliquis tribus coniunctis ſumere quadrantem. Tertium ſimiliter ſumere quintantem. Quartum verò, capere ſextantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui vero tres, quandoquidem trientem dare debent, ſtatuantur vnitatum quotlibet trientem habentium, putà 3. Primus igitur à tribus reliquis coniunctis ſumpto triente fit 1 N. + 1: Oportet ergo & ſecundum ſumpto à reliquis tribus quadrante fieri 1 N. + 1. Rurſus omnia vt in præcedenti quater ſumantur, & iiſdem de cauſis inuenietur ſecundus 1 N. + $\frac{1}{3}$ Tertius verò 1 N. + $\frac{1}{2}$ At quartus 1 N. + $\frac{3}{5}$ Reſtat vt quatuor numeri ſimul iuncti æquentur 1 N. + 3. & fit tandem 1 N $\frac{47}{90}$ Erit ergo primus 47. ſecundus 77. tertius 92. quartus 101. & hi ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

EADEM omnia quæ ad præcedentem dicta ſunt, hîc etiam locum habent. Vnde apparet ſimili prorſus artificio extendi poſſe quæſtionem ad quinque, ad ſex vel ad plures numeros, ſiue ea determinetur ad vnicam ſolutionem, ſiue non; & ſiue ſinguli numeri cum certa parte reliquorum æquales faciant numeros, ſiue diuerſos. Itaque de his ſatis.

QVÆSTIO XXIX.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὃν μὲν τετράγωνον, ὃν δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, ὅ τε σ̄, καὶ ὁ ε̄. καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ος εἷς, κἂν μὲν ἐπὶ τὰς σ̄ μονάδας πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ ς^ους σ̄. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰς ε̄ μονάδας, ποιεῖ ς^ους ε̄. δεῖ δὲ τούτων τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τοὺς ε̄. ἀριθμοὺς τετραγωνίσω, γίνονται δυνάμεις κε̄ ἴσαι ς^οις σ̄. πάντα παρὰ ἀριθμόν. ἀριθμοὶ ἄρα κε̄ ἴσοι μονάσι σ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο η̄. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

DVOBVS datis numeris, inuenire aliquem numerum qui in vtrumque ductus, hunc quidem quadratum efficiat, illum verò latus eiuſdem quadrati. Sint dati duo numeri 200. & 5. & ponatur is qui quæritur 1 N. qui ſi ducatur in 200. facit 200 N. At ſi ducatur in 5. facit 5 N. Oportet autem horum alterum quadratum eſſe, alterum latus eius; ſi ergo quadrauero 5 N. fient 25 Q. æquales vtique 200 N, omnia per numerum diuidantur. Igitur 25 N. æquantur 200. & fit 1 N. 8. Ac is quæſtioni ſatisfacit.

IN QVAESTIONEM XXIX.

DVPLEX caſus hîc conſiderari poteſt, prout tertius quæſitus ductus in vtrumque datorum, productum ex maiore facit quadratum, & ex minore latus quadrati. Vel contrà productum ex minore facit quadratum, & ex maiore latus. In priorem caſum incidit æquatio Diophanti. In poſteriorem iſta. Ponatur 5 N. quadratus, & eius latus 200 N. ergo 5 N. æquantur 40000. Q. & fit 1 N. $\frac{1}{8000}$ qui quæſtioni ſatisfacit. Pro vtroque autem caſu fiet vnus Canon vniuerſalior eo quem affert Xilander.

Alterum datorum numerorum diuide per quadratum alterius, orietur quæſitus numerus.

Porro quod ait Xilander, ſi quidem in numeris non ſurdis & integris quæſtio conſiſtat, duos propoſitos numeros ſemper eſſe quadratorum ſimiles, falſiſſimum eſt ſi per propoſitos numeros, datos ab initio intelligat, vt ex ipſo Diophanti exemplo manifeſtum fit, nam 200. & 5. non ſunt plani ſimiles. Si autem intelligat tertium quæſitum, & alterum datorum, id verum eſt. Semper enim tertius quæſitus & is in quem ille ductus quadratum facit, ſunt quadratorum ſimiles. Sed ſi hoc voluit Xilander obſcurè locutus eſt, & malè ad integros numeros id reſtrinxit. Quicumque enim ſumantur Numeri, idem euenire neceſſe eſt, [a] cùm ponatur ex eorum mutuo ductu produci quadratum. a ἐσται,

Quod autem ait Diophantus, πάντα ἐπὶ ἀριθμὸν, depreſſionem ſpecierum intelligit, quam alibi vocat ὑποβιβασμὸν, de qua definitione vndecima actum eſt. Cùm enim 5 N. ſint æquales 25 Q. ſi vtraque æquationis pars per 1 N. diuidatur, fiunt 5. æquales 25 N. quia ſcilicet Æquales numeri per eundem numerum diuiſi, æquales dant quotientes.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros, vt ſumma ipſorum, & productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros. Oportet autem inueniendorum numerorum ſummæ ſemiſſis quadratum, quadrato ſuperare productum multiplicationis. Eſt autem hoc Plaſmaticum. Conſtitutum ſit ſummum efficere 20. at productum multiplicationis 96. Ponatur interuallum ipſorum 2 N. Et quoniam ſumma ipſorum eſt 20. ſi hanc bifariam ſecuero, erit pars quælibet diuiſionis, ſeu ſemiſſis ſummæ 10. Et ſi ſemiſſem interualli, puta 1 N. vni parti adiecero, & detraxero ab altera, manebit rurſus vtriuſque ſumma 20. & interuallum 2 N. Ponatur ergo maior 1 N. + 10. erit minor 10 − 1 N. & manet ſumma 20. interuallum 2 N. Reſtat vt productus multiplicationis ſit 96. ſed productus ille eſt 100 − 1 Q. Hoc ergo æquatur 96. & fit 1 N. 2. Eſt igitur maior 12. minor 8. & ſatisfaciunt propoſito.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον, τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας ϟϛ̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ϛοὶ β̄. καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστι μο κ̄, ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα. ἔσται ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως. ἥμισυ τοῦ συνθέματος μο ῑ. κἂν τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τουτέστιν ϛον ἕνα, ἐνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ. τοῦ δὲ λοιποῦ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μο κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω οὖν ὁ μείζων ϛος ἑνὸς καὶ μο ῑ. τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μο ῑ. λείψει ϛοῦ ἑνός. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα μο κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛοὶ β̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϟϛ̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μονάδες ρ̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς. ταῦτα ἴσα μονάσι ϟϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛος μο β̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μο η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXX.

DVO indicat conditio appoſita. Primum an abſolutè poſſibilis ſit quæſtio necne, ſecundum an per numeros rationales ſolui poſſit, vel per ſurdos tantum. Primo enim cùm conſtet per ſecundam ſecundi poriſmatum. Quadratum ſemiſſis ſummæ duorum numerorum æquari producto multiplicationis eorundem, & quadrato ſemiſſis interualli ipſorum, fieri non poteſt vt productum multiplicationis ſit maius quadrato ſemiſſis ſummæ, ſed oportet æquale eſſe, vel minus. Æquale

quidem ſi æquales ſint numeri, nam ſemiſſis ſummæ æqualium numerorum, idem eſt atque alter ipſorum, ac proinde productum mulriplicationis æquatur quadrato eiuſdem ſemiſſis. Minus verò, ſi ſint inæquales numeri, quia tunc, vt dictum eſt, productum multiplicationis vnà cum quadrato ſemiſſis interualli æquatur quadrato ſemiſſis ſummæ. Quare oportet, vt à quadraro ſemiſſis ſummæ auferendo productum, ſuperſit quadratus ſemiſſis interualli. Vnde conſtat Diophantum per conditionem appoſitam ſupponere quæſitos numeros eſſe inæquales. Deinde patet vt ſolutio contingat rationalis, oportere vt detracto producto à quadrato ſemiſſis ſummæ, reſiduum ſit quadratus numerus. Nam cùm hoc reſiduum ſit quadratus ſemiſſis interualli, ſi reſiduum illud non ſit quadratus numetus, erit interuallum irrationale, ac proinde & ipſi numeri. Verbi gratia, ſi diuidendus ſit 20. in duos numeros, quorum productum ſit 98. operando cum Diophanto inueniemus tandem 1 Q. æqualem 2. Quare ſemiſſis interualli erit ℞ 2. atque ipſi numeri 10 — ℞ 2. & 10 + ℞ 2. Porro tam ex conditione appoſita, quàm ex ipſa operatione elicitur iſte Canon.

A quadrato ſemiſsis ſumma, aufer productum multiplicationis, reſidui radix quadrata, addita & adempta eidem ſemiſſi ſumma, quaſites exhibebit numeros.

Aliter etiam proponi poterat conditio, nimirum.

Oportet numerorum ſumma quadratum, quadrato numero ſuperare quadruplum producti.

Nam vt oſtenſum eſt quinta ſecundi poriſmatum. Quadratus, ſummæ duorum numerorum, æqualis eſt quadruplo plani ſub ipſis numeris, vnà cum quadrato interualli ipſorum. Vnde etiam alius Canon formabitur, nimirum.

Aufer quadruplum producti à quadrate ſumma, reſidui radicem quadratam adde & adime ipſi ſumma, ſemiſſis aggregati & reſidui quaſitos exhibebit numeros.

Sed & noratu dignum eſt ad hanc quæſtionem, illam etiam poſſe reduci.

Dato medio trium proportionalium, & aggregato extremorum, extremes inuenire.

20. ſeptimi Vt dato medio 8. & ſumma extremorum 20. ſint inueniendi ipſi extremi. Quia in tribus proportionalibus, planus ſub extremis æquatur quadrato medij, cùm medij quadratus ſit 64. patet eo reduci propoſitam queſtionem, vt diuidatur 20. in duos numeros, quorum mutuò ductu fiat 64. Quod idem eſt cum Diophantæo problemate, & per illud, vel per eius Canones inuenientur extremi quæſiti 4. & 16. Quod autem attinet ad verba illa, ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικὸν, quæ nos retento Græco vocabulo vertimus, *Eſt autem hoc plaſmaticum*, Xilander verò Diophanti mentem minimè aſſecutus, malè interpretatur, *Hoc autem eſt effectum actunae.* Nos ea explicabimus infra quæſtione trigeſima tertia.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. * ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. * ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας ση̄. τετάχθω δὴ ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς^οἱ β̄ καὶ ἔστω ὁ μείζων ς^ου ἑνὸς καὶ μ^ο ῑ. τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων μ^ο ῑ. λείψει ς^ου ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. λοιπόν ἐστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας ση̄. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις δύο μονάδας σ̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ση̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ^ο β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων μ^ο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ^ο η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt & ſumma ipſorum, & ſumma quadratorum ab ipſis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum ſummæ quadratorum, quadrato ſuperare quadratum ſummæ numerorum. * Et hoc quoque Plaſmaticum eſt. * Imperatum ſit ſummam numerorum eſſe 20. & ſummam quadratorum ab ipſis ortorum eſſe 208. Ponatur itaque interuallum ipſorum 2 N. & eſto maior 1 N. + 10. vnitates, quot ſcilicet continet ſemiſſis ſummæ, minor autem ſit 10 — 1 N. & manet rurſus eorum ſumma 20. Interuallum verò 2 N. Supereſt vt ſumma quadratorum ab ipſis, ſit 208. Atqui ſumma quadratorum facit 2 Q. + 200. Hoc igitur æquale eſt vnitatibus 208. & ſit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit maior 12. minor 8. & ſatisfaciunt poſtulatis.

IN QVAESTIONEM XXXI.

HIc etiam conditio indicat an poſſibilis ſit quæſtio, & an per numeros rationales ſolui poſſit, idémque prorſus dicit quod ſeptima ſecundi poriſmatum, nimirum. Quadratus ſummæ duorum numerorum & quadratus interualli eorum æquantur duplo aggregati quadratorum. Quare vt quæſtio ſit poſſibilis neceſſe eſt duplum aggregati quadratorum, eſſe maius quadrato ſummæ, niſi propoſiti numeri ſint æquales, tunc n. duplum quadratorum æquabitur quadrato ſummæ. ' Quia quadratus ſummæ æquatur quadratis numerorum & duplo producti, at cum numeri ſunt æquales, duplum producti æquatur ipſis quadratis. Quare in hoc caſu quadratum ſummæ æquatur duplo quadratorum. Vt verò ſolutio ſit rationalis neceſſe eſt duplum quadratorum excedere quadratum ſummæ, quadrato numero, cùm enim hic exceſſus ſit quadratus interualli numerorum, vt docuimus, ſi huiuſmodi exceſſus non ſit quadratus, erit interuallum numerorum irrationale, ac proinde & ipſi numeri. Cæterùm ex hac conditione ſic explicata pendet Canon à Xilandro traditus, nimirum. *4. ſecundi.*

A duplo agregati quadratorum, aufer quadratum ſumma numerorum, reſidui latus quadratum adde & adime ipſi ſumma numerorum, ſemiſſis aggregati & reſidui quaſitos exhibebit numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appoſitè ad operationem Diophanti.

Oportet ſummam quadratorum ſuperare duplum quadrati ſemiſſis ſumma numerorum duplo quadrati numeri.

Quia enim per ſextam ſecundi poriſmatum conſtat ſummam quadratorum duplam eſſe quadratorum qui fiunt à ſemiſſe ſummæ laterum, & à ſemiſſe interualli eorumdem, patet ſi à ſumma quadratorum, auferatur duplum quadrati à ſemiſſe ſummæ numerorum, reſiduum æquari duplo quadratis ſemiſſis interualli numerorum. Itaque ex hac etiam conditione ſic explicata, & ex ipſamet Diophanti operatione elicietur alter Canon.

A ſumma quadratorum aufer duplum quadrati ſemiſſis ſumma numerorum, reſidui ſemiſſis latus quadratum additum vel ademptum ipſi ſemiſſi numerorum, quaſitos dabit numeros.

Verba autem illa, ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικὸν, hic, vt arbitror, ſubreptitia ſunt, vt ad trigeſimam tertiam fuſius docebo, noluì tamen ea de textu tollere, ne audax plus æquo vel temerarius alicui forte viderer, ſed ea aſteriſcis includere ſatis habui.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE duos numeros, vt ſumma ipſorum, & interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, datos faciant numeros. Conſtitutum ſit ſummam numerorum eſſe 20. Interuallum verò quadratorum ab ipſis ortorum eſſe 80. Ponatur interuallum ipſorum 2 N. erit ſimiliter maior 1 N. + 10. Minor autem 10 − 1 N. & manet rurſus ſumma ipſorum 20. interuallum verò 2 N. ſupereſt vt interuallum quadratorum ab ipſis ortorum ſit 80. ſed interuallum quadratorum ab ipſis eſt 40 N. Hoc ergo æquatur 80. & fit rurſus maior 12. Minor 8. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς β̄. ἔσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ς ἑνὸς μο ῑ. ὁ δὲ ἐλάσσων μο ῑ, λείψει ς ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ςῶν β̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μο π̄. ἀλλ᾽ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν ςς μ̄. ταῦτα ἴσα μονάσι π̄. καὶ συνάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μο η̄. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXII.

HIc nulla opus eſt conditione vt ſolutio contingat rationalis, ſemper enim, dum quæſtio ſit poſſibilis eam per numeros rationales ſolui continget, verum vt ſit poſſibilis ſanè aliqua limitatione indiget, quicquid dicat Scholiaſtes, quam ego ita concipio.

Oportet exceſſum quadrati ſuper quadratum minorem eſſe quadrato ſumma numerorum.

Cuius neceſſitas euidens eſt, quia ' Quadratus ſummæ æquatur ipſis quadratis numerorum, & duplo producti, quare niſi pars ponatur æqualis toti, vel etiam maior, impoſſibile eſt interuallum *4. ſecundi.*

quadratorum eſſe æquale vel maius quadrato ſummæ numerorum. Itaque in exemplo Diophanti poſita ſumma numerorum 20. eùm eius quadratus ſit 400. poterit interuallum quadratorum præſcribi quilibet numerus minor quàm 400. æqualis, autem vel maior nequaquam. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiuſmodi Canon.

Diuide interuallum quadratorum per duplum ſummæ numerorum, quotiens additus vel ademptus ſemiſſi ſummæ, dabit quæſitos numeros.

Hoc autem idem fere eſt quod demonſtratum eſt prop. tertia ſecundi poriſmatum. nimirum.

Diuide interuallum quadratorum per ſummam numerorum, orietur interuallum numerorum.

Data porro ſumma numerorum & eorum interuallo ſoluitur quæſtio per Canonem primæ huius. Poteſt etiam aliter inſtitui operatio, & tamen ad æquationem ſimplicem deuenietur. Eſto alter numerorum 1 N. alter 20 − 1 N. horum quadrati ſunt 1 Q. & 1 Q. + 400. − 40 N. quorum interuallum eſt 400 − 40 N. hoc ergo æquatur 80. & fit 1 N. 8. Hinc etiam elicietur Canon alius, priore non deterior.

Quadrato ſummæ adde vel adime interuallum quadratorum, ſummam & reſiduum diuide ſeorſim per duplum ſummæ numerorum, orientur quæſiti numeri.

QVÆSTIO XXXIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδας δ. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν μονάδας ϟϛ. τετάχθω τὸ σύνθεμα αὐτῶν ςς β. ἔχομεν καὶ τὴν ὑπεροχὴν μο δ. ἔσται ὁ μείζων ς ἑνὸς μο β ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνὸς λείψει μο β. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν ἀριθμοὶ β. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες δ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϟϛ. ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἐστι δυ α. ⋔ μο δ. ταῦτα ἴσα μονάσι ϟϛ. καὶ γίνεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μο ιβ. ὁ δὲ ἐλάττων μο η. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt interuallum ipſorum, & productum multiplicatione faciant datos numeros. Oportet autem quadruplum producti multiplicationis cum quadrato interualli iunctum, facere quadratum. Et hoc quoque Plaſmaticum eſt. Statutum ſit interuallum eſſe 4. productum verò multiplicationis 96. Ponatur ſumma ipſorum 2 N. habemus autem & interuallum 4. erit itaque maior 1 N. + 2. Minor 1 N − 2. & manet ſumma ipſorum 2. N. interuallum 4. Reſtat vt productum multiplicatione fit 96. eſt autem huiuſmodi productum 1 Q. − 4. Hoc ergo æquatur 96. & fit rurſus maior 12. minor 8. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIC appoſita conditio non eſt ad oſtendendum an quæſtio ſit poſſibilis, ſed tantùm an per numeros rationales ſolui poſſit. Etenim non poteſt abſolutè proponi huiuſmodi quæſtio impoſſibilis, quodcumque enim præſcribatur numerorum interuallum, & qualecumque ſtatuatur productum multiplicationis eorum, ſoluetur quæſtio. Sed vt ſolutio contingat rationalis, neceſſe eſt vt quadruplo producti addendo quadratum interualli, quadratus fiat, quia ſcilicet, * quadruplum
5. 2. poriſ. producti cum quadrato interualli æquatur quadrato ſummæ numerorum. Hinc autem elicitur Canon à Xilandro traditus.

Quadrato interualli adde quadruplum producti, aggregati latus eſt ſumma numerorum, cui ſi addas & adimas interuallum, ſemiſſis ſummæ & reſidui quæſitos dat numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appoſitè ad operationem Diophanti.

Oportet quadratum ſemiſſis interualli additum producto, conficere quadratum.

p. 2. poriſ. * Quia ſcilicet quadratus interualli cum producto, quadratum efficit ſemiſſis ſummæ. Vnde etiam & ex ipſamet operatione Diophanti alium elicimus Canonem.

Adde producto quadratum ſemiſſis interualli, aggregati latus eſt ſemiſſis ſummæ numerorum, cui addendo & adimendo ſemiſſem interualli, fient quæſiti numeri.

Eſt etiam notatu dignum non differre quæſtionem iſtam ab illa. *Dato medio trium proportionalium & differentia extremorum, inuenire extremos.* Vt dato medio 8. & interuallo extremorum 12. quærantur extremi. Quia planus ſub extremis æquatur quadrato medij, & is eſt 64. eò reducetur quæſtio,

vt

vt inueniantur duo numeri, quorum interuallum ſit 12. productum multiplicationis 64. Quod idem eſt cum quæſtione iſta Diophanti. Quare per eam vel per Canones allatos inuenientur extremi quæſiti 4. & 16. Supereſt vt explicem verba illa, ἔϛι δὲ τοῦτο πλασματικὸν, quæ tum huic quæſtioni tum trigeſimæ & trigeſimæ primæ adiecta ſunt ſtatim poſt conditionem, quæque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus eſt lector, nec Scholiaſtem, nec Xilandrum mentem Diophanti aſſequutum eſſe, quod cuilibet fiet manifeſtum qui ea quæ vterque ad trigeſimam commentus eſt legere voluerit. Sanè non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Prætetea Xilander verba ipſa male reddidit, nam Plaſmaticum, interpretatus eſt, effictum aliunde; cum potius ſignificet id à quo aliud quippiam effingi & plaſmari poteſt. Ego itaque nil aliud voluiſſe Diophantum aio, quam indicare ex huiuſmodi quæſtionum ſolutione, ſeu ex conditionibus adiectis, vel ex canonibus inde deductis formari & plaſmari quodammodo regulas illas quas vocant compoſitas, cùm ſcilicet ex tribus infimis ſpeciebus, duæ vni æquales reperiuntur, ſeu vt loquitur Franciſcus Vieta, regulas de quadrato affecto ſub latere. Etenim prima & ſecunda illarum regularum, ab hac ipſa quæſtione trigeſima tertia facilè deducuntur. Tertia verò pendet omnino à trigeſima. Quamobrem cùm à trigeſima prima nulla formetur huiuſmodi regula, non dubito eadem verba ibi temerè inculcata eſſe, ab ipſo ſcilicet Scholiaſta, vel imperito amanuenſi ex aliis quæſtionibus eò tranſlata.

Quomodo autem ab his quæſtionibus formentur ſupradictæ regulæ, non pigebit in tyronum gratiam adſcribere, ipſas etiam tradendo regulas, tum eo modo quo communiter abſoluuntur, tum eo quem tradit Petrus Nonius ad vitandas Fractiones ſæpe commodo, ac denique methodum ipſam Diophanti exhibendo.

PRIMA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati & Numeri æquales vnitatibus.

Fiat prius reductio ad vnum Quadratum per paraboliſmum, diuidendo ſcilicet ſingulas æquationis partes per numerum Quadratorum. Tunc capiatur ſemiſſis Numerorum, & eius quadrato addantur vnitates, ab aggregati latere auferatur ſemiſſis Numerorum, reſiduum eſt valor Numeri.

Verbi gratia 2 Q. + 8 N. ſint æquales 42. fiet reductio ad 1 Q. diuidendo omnia per 2. fientque 1. Q. + 4 N. æqualia 21. Tunc ſumpto ſemiſſe Numerorum 2. eius quadratum 4. addo vnitatibus 21. fit 25. cuius latus 5. vnde auferendo ſemiſſem Numerorum, remanet 3. valor Numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Facto vt ſupra paraboliſmo ſi opus ſit. Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum; ab aggregati latere aufer numerum Numerorum, reſiduum erit valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q + 5 N. ſint æquales 24. Quia nullo hîc opus eſt paraboliſmo, quadrato ipſius 5. nimirum ipſi 25. adde quadruplum ipſius 24. nimirum 96. fit 121. cuius latus 11. vnde auferendo 5. remanet 6. duplum numeri, ergo Numerus eſt 3. vtrumque autem modum ab hac quæſtione trigeſima tertia deduci ſic oſtendemus. Ponantur 1 Q. + 4 N. æquales 21. & ſit C D 1 N. cui addatur B C ipſi æqualis. Et illis addatur adhuc A B æqualis numero Numerorum, puta 4. Tunc conſtat ex C D in B C. fieri 1 Q. & ex C D in A B fieri 4 N. Igitur ex C D in totum A C fit 21. Quamobrem cùm notum ſit duorum A C. C D. interuallum eſſe A B, nempe 4. & productum ex eorum multiplicatione eſſe 21. patet nos eo deduci vt quæramus duos numeros quorum interuallum 4. productum multiplicatione ſit 21. Quod ipſum quærit Diophantus quæſtione hac trigeſima tertia. Minor autem quæſitorum erit C D. ſeu 1 N. quod inueniendum proponebatur. Itaque ſi vtamur ſecundo Canone ſupra allato, capiemus ſemiſſem Numerorum, ſeu interualli, nempe ipſius 4. & eius quadratum addemus vnitatibus ſeu producto 21. vnde fient 25. cuius latus 5. vnde ſi auferantur 2 ſemiſſis ipſius 4. remanet 3 minor quæſitorum, ſeu C D. ſeu 1 N. vnde patet à ſecundo illo Canone deduci modum communem perficiendi hanc regulam.

A....B...C...D

Quod ſi ad inueniendum duos numeros quorum interuallum ſit 4. productum 21. vtaris primo Canone ſupra allato, incides ſane in regulam Petri Nonij. Nam quadrato ipſius 4 qui eſt 16. addes quadruplum ipſius 21. nempe 84. vnde fiet 100. à cuius latere 10. auferes 4. & reſiduum 6. erit duplum Numeri, nempe ipſius 3.

SECVNDA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati æquales Numeris & vnitatibus.

Facto ſi opus ſit paraboliſmo, adde vnitatibus quadratum ſemiſſis Numerorum, lateri aggregati adde ipſum ſemiſſem Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 1 Q. ſit æqualis 4 N. + 21. addo ad 21. quadratum ſemiſſis ipſius 4. nempe 4. fit 25. cuius lateri 5. addo ſupradictum ſemiſſem 2. fit 7. valor numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum, lateri aggregati adde numerum Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q. ſi æqualis 5 N. + 24. Adde 25. ad quadruplum ipſius 24. nempe ad 96. fit 121. cuius lateri 11. adde 5. fit 16. duplum Numeri. Quare ipſe Numerus eſt 8. Vtrumque modum deriuari quoque ab hac quæſtione trigeſima tertia ſic probabimus. Sit 1 Q. æqualis 4. N. + 21. imprimis patet 1 N. maiorem eſſe quàm 4. numerum Numerorum, nam ex quolibet latere in ſeipſum, vel in numerum ipſo maiorem, fit vel quadratus lateris, vel numerus eodem quadrato maior. Quare ſi 4. eſſet æqualis vel major quàm 1 N. eſſent 4 N. æquales vel maiores quàm 1 Q. ac proinde non poſſet 1 Q. æquari 4 N. + 21. Hoc poſito. Sit A C. 1 N. erit ergo A C maior quàm 4. vt probatum eſt. Sumatur igitur in eo A B 4. & reliquo B C addatur æqualis ei C D.

A....B...C...D

Patet ergo quadratum ex A C eſſe 1 Q. & productum ex A C in A B eſſe 4 N.

2. ſecundi. ' Quare cùm quadratus ex A C ſit æqualis productis ex A C. in A B. & ex A C. in B C. ſeu in C D. ſequitur productum ex A C. in C D. æquari 21. Igitur vt prius quærendi ſunt duo numeri A C. C D. quorum interuallum A B ſeu 4. & productum multiplicationis eſt 21. nam horum maior A C. erit valor numeri. Itaque à duplici Canone, duplex vt ſupra eruitur regula, primæ prorſus ſimilis, finali tantum ſubſtractione in additionem mutata, quia videlicet ibi quærebatur minor numerus C D. Hìc vero quæritur maior A C.

TERTIA REGVLA COMPOSITARVM.

Numeri æquales Quadratis & vnitatibus.

Facto ſi opus ſit Paraboliſmo. A quadrato ſemiſſis Numerorum aufer vnitates, reſidui latus adde vel adime ſemiſſi Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 10 N. ſint æquales 1 Q. + 21. Quadratus ſemiſſis Numerorum eſt 25. vnde ſi auferas 21. vnitates ſupereſt 4. cuius latus 2. ſi addas & adimas ſemiſſi Numerorum 5. fit valor Numeri vel 3. vel 7.

EADEM EX PETRO NONIO.

A quadrato numeri Numerorum aufer quadruplum vnitatum, reſidui latus adde vel adime ipſi numero Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 7 N. ſint æquales 1 Q. + 10. à quadrato ipſius 7. puta à 49. aufer quadruplum ipſius 10. nempe 40. ſupereſt 9. cuius latus 3. adde vel adime ipſi 7. fiet vel 4. vel 10. duplum Numeri. Quare Numerus eſt vel 2. vel 5. vtramque regulam deduci à trigeſima quæſtione Diophanti facilè probabitur. Sunto 10 N. æquales 1 Q. + 21. imprimis patet numerum Numerorum 10. maiorem eſſe quàm 1 N. nam ſi eſſet æqualis, vel minor, eo ducto in 1 N. fierent 10 N. æquales 1 Q. vel minores illo. Quare cùm 10 N. præter 1 Q continueant 21. oportet 10. eſſe maiorem quàm 1 N. Hoc poſito ſit A B 10. in quo ſumatur 1 N. A D. vel D B. & ſi ponatur 1 N. A D. conſtat ex A B in A D.

A.......D...B

fieri 10 N. & quadratum ex A D. eſſe 1 Q. Quare cùm productus ex A B. in

3 ſecundi. A D. ' ſit æqualis quadrato ex A D. vnà cum producto ex A D. in D B. relinquitur productum ex A D in D B. eſſe 21. Igitur quærendi ſunt duo numeri quorum ſumma ſit 10. productum 21. Eodem modo ſi 1 N. ponatur D B. oſtendemus ex A B. in D B. fieri 10. N. & ex A D. in D B. fieri 21. Quare vt prius quærendi erunt duo numeri, quorum ſumma ſit 10. productum 21. Quod ipſum quærit Diophantus quæſtione trigeſima.

Itaque ſi libeat vti primo Canone ibi allato. Summæ 10. ſemiſſe capto nempe 5. ab illius quadrato

25. auferemus productum 21. & reſidui 4. latus 2. addemus vel adimemus ipſi 5. & fient quæſiti numeri 7. & 3. quorum alter eſt A D. alter D B. & vterque valor Numeri eſſe poteſt. Qui eſt primus modus hanc regulam perficiendi. Quod ſi vtaris ſecundo Canone, incides in regulam Petri Nonij vt manifeſtum eſt. Sed & ex annotatis ad trigeſimam patet ſi quadratus ſemiſſis Numerorum æqualis ſit vnitatibus, ipſum eundem ſemiſſem eſſe valorem Numeri, ſignum enim eſt quæſitos A D. D B. æquales eſſe.

Cæterùm quia Diophantus vt iam monui ad definitionem vndecimam, peculiari vtens methodo, & nunquam adhibens paraboliſmum æquationes reſoluit, quomodo id perficiat iam docendum eſt.

REGVLAE COMPOSITAE EX DIOPHANTO.

Ducito numerum Quadratorum in vnitates, producto adde quadratum ſemiſſis Numerorum in prima & ſecunda regula. vel ab eodem quadrato aufer idem productum in tertia regula. Summæ vel reſidui cape latus; & huic adde vel adime ſemiſſem Numerorum in prima vel ſecunda regula. Contra ſemiſſi numerorum adde vel adime idem latus in tertia regula. Summam vel reſiduum diuide per numerum quadratorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 3 Q. + 20 N. ſint æquales 52. ducito 3. in 52. fit 156. cui adde 100. quadratum ſemiſſis Numerorum, fit 256. cuius latus 16. vnde ſi auferas 10. remanet 6. quo diuiſo per 3. fit 2. valor Numeri, eademque eſt aliarum regularum ratio. Differt Ergo Diophantæa methodus a communi in hoc ſolum, quod in communi diuiſio per numerum Quadratorum fit ab initio, in Diophantæa methodo, eadem diuiſio fit in fine. Sed demonſtrandum eſt vtramque methodum eodem recidere. Sit enim A numerus quadratorum, & B numerus Numerorum, & C vnitatum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in C. fiat D. ſumptoque E ſemiſſe ipſius B. eius quadratus F addatur ad D. & fiat G. cuius latus eſto H. vnde auferendo E ſuperſit K. Deinde per communem methodum diuidandur per A. ipſi A. B. C. vnde fiant vnitas M. & numeri N. P. ſumptoque Q. ſemiſſe ipſius N. eius quadratus R. addatur ad P. & fiat T. cuius latus eſto V. vnde ablato Q. ſuperſit X. Erit ergo vt demonſtratum eſt in prima regula, X. valor numeri. Dico ſi K. per A. diuidatur produci eundem X. valorem Numeri. Sumatur enim L. quadratus ipſius A. Quoniam ergo M. eſt vnitas, erunt continuè proportionales L A M. in ratione cuius denominator eſt A, & rationis ipſius L. ad M. denominator erit L. Cum autem idem A. ductus in P & in C. producat C & D[1] erit D ad C vt C ad P. & ipſi D C P. erunt proportionales ipſis L A M. eritque D ad P. vt L. ad M. Quare ex L in P. fiet D. Quia etiam A ductus in N. facit B, erit B ad N. vt A ad M. Quare & dimidium E. ad dimidium Q. erit vt A. ad M. Quamobrem & quadratus F. ad quadratum R erit vt L ad M. Igitur vt F ad R. ita eſt D ad P. Quare &[2] antecedentes ſimul, puta G. ad conſequentes ſimul, puta ad T. erunt vt L ad M. Ergo rurſus latus H. ad latus V. erit vt A. ad M. Itaque cùm oſtenſum ſit eſſe quoque E. ad Q. vt A. ad M. erit vt totus H. ad totum V. ita ablatus E. ad ablatum Q.[3] Quare & reliquus K ad reliquum X erit quoque vt A ad M. Quamobrem diuiſo K per A prodibit X. Quod demonſtrandum erat.

Y 36. K 6. H 21.
F 225. G 441.
L 9. E 15. D 216.

A 3. B 30. C 72.
M 1. N 10. P. 24.

R 25. Q 5. T 49.
Z 12. X 2. V 7.

17. ſeptimi.
12. ſeptimi.
21. ſeptimi.

Eadem prorſus ratione, idem euenire oſtendetur in ſecunda regula. Nam omnia eodem modo perficiuntur, niſi quod in fine fit additio loco ſubſtractionis. Vt in communi methodo, addatur Q ad V. fiet Z valor Numeri. Itaque in Diophantæa methodo addatur E ad H. & fiat Y. dico ſi Y diuidatur per A. prodire eundem valorem Numeri Z. Cùm enim vt oſtenſum eſt ſit H ad V, ſicut E ad Q. erunt & antecedentes ſimul, puta Y ad conſequentes ſimul, puta ad Z in eadem ratione, quæ eadem eſt cum ratione A ad M. Quamobrem diuiſo Y. per A, orietur Z. Quod erat oſtendendum.

Non diſſimili ratione oſtenderue vtramque methodum conuenire in tertia regula. Sit enim A quadratorum numerus & B vnitatum, & C numerorum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in B fiat D. & ſemiſſis ipſius C. eſto E cuius quadratus F vnde auferendo D. ſuperſit G. cuius latus H. quo detracto ex E ſuperſit K, & eodem H addito ad eundem E fiat Y. Deinde per communem methodum diuidantur per A ipſi A B C. & fiant M N P. & ipſius P ſemiſſis eſto Q. cuius quadratus R, vnde auferendo N. ſuperſit T. cuius latus V. quo detracto ex Q ſuperſit X, & eodem V ad Q addito fiat Z. Erit igitur valor Numeri tam X quàm Z. Dico itaque ſi ipſi K. Y. per A diuidantur prodire eoſdem X Z. Nam ſumpto L quadrato ipſius A, rurſus vt prius oſtendemus eſſe L ad M vt D ad N. ſed & eſt C ad P vt A ad M. ergo rurſus ſemiſſis E ad ſemiſſem Q. eſt vt A ad M. Quare & quadratus F ad quadratum R eſt vt L ad M. ſeu vt D ad N. Quamo-

Y 24. H 9. K 6.
G 81. F 225.
L 9. D 144. E 15.

A 3. B 48. C 30.
M 1. N 16. P 10.

R 25. T 9. Q 5. brem & reliquus G ad reliquum T eſt vt L ad M, ac proinde & latus H ad latus
12. ſeptimi. Z 8. V 3. X 2. V eſt vt A ad M ſeu vt E ad Q. Itaque cùm ſit E ad Q. vt H ad V. ſiue addantur H E, itemque Q V. ſiue detrahatur H ex E itemque V ex Q. [1] erit rurſus compoſito-
11. ſeptimi. rum Y & Z, [2] Itemque reſiduorum K & X eadem ratio quæ A ad M. Quare ſi ipſi Y & K diuidantur per A orientur ipſi Z & X. Quod demonſtrandum erat.

Ex his tribus modis abſoluendi regulas compoſitas, eum ſeliget peritus logiſta, quem compendioſiorem iudicabit. Sanè ſi paraboliſmus citrà fractiones fieri poſſit, communem præſtat amplecti methodum, ſin ſecus, Diophantæa compendioſior eſt. In vtraque porrò ſi numerus Numerorum ſit impar, Nonij methodum adhibere iuuabit, nam ea commodè aptari poteſt, non minus Diophantææ quàm communi, Vt ſi 3 Q + 7 N. æquentur 26. ducto 3 in 26. fit 78. & quia numerorum Numerus eſt impar ſumo eius quadratum 49. cui addo quadruplum ipſius 78. puta 312. fitque 361. cuius latus 19. vnde ſi auferas 7. ſupereſt 12. quo diuiſo per numerum quadratorum 3. fit 4 valor numeri duplicati, ac proinde ipſe Numerus eſt 2. vel ſi placet diuide 12. per duplum numeri quadratorum, nimirum per 6. fiet ſtatim valor Numeri 2. ſed de his ſatis.

Quoniam vero quærendo duos numeros quorum ſumma, vel ſumma quadratorum, vel interuallum, vel interuallum quadratorum, aut productum multiplicationis data ſint diuerſimodè, multæ aliæ non inelegantes quæſtiones fieri poſſunt, quas omiſit Diophantus, liber hîc earum nonnullas ſubiicere, in quibus nobis non erit magnoperè cauendum, ne in regulas compoſitas æquatio deuoluatur, cùm illæ iam nobis ſint familiares, dum per conditiones adiectas innoteſcat, an in numeris rationalibus ſolutio contingat.

QVAESTIO PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt ſumma quadratorum ab iis ortorum, & productus eorum multiplicatione ſint quales poſcimur. Oportet autem, ſiue addatur, ſiue adimatur, ſummæ quadratorum, duplum producti, fieri vtrimque quadratum.

Eſto ſumma quadratorum 34. productum multiplicationis 15. ſi placet per reductionem ad alias
4. ſecundi. quæſtiones, iſta variis modis ſolui poteſt. [1] Quia enim ſumma quadratorum adſcito duplo producti,
4. 2. poriſ. æquatur quadrato ſummæ numerorum. [4] At ſumma quadratorum multata duplo producti, relinquit quadratum interualli numerorum; ſi ad 34. addas 30. fiet 64. quadratus ſummæ. Quare ipſa ſumma eſt 8. Item ſi à 34. auferas 30. remanet 4. quadratus interualli. Quare ipſum interuallum eſt 2. Iam ergo per quatuor quæſtiones inueniri poſſunt quæſiti numeri. Primò per trigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. productum 15. Secundò per trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. & ſumma quadratorum 34. Tertiò per trigeſimam tertiam quærendo duos numeros, quorum interuallum 2. productum 15. Quartò denique per primam quærendo duos numeros, quorum ſumma 8. interuallum 2.

Sed ſi peculiari operatione rem abſoluere placeat. Ponatur interuallum quadratorum 2. N. erunt ipſi quadrati 17 − 1 N. & 17 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 289 − 1 Q. æquale quadrato producti 15. nempe 225. Quare tandem 64. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 8. Ad poſitiones ſunt quæſiti quadrati 25. & 9. quorum latera 5. & 3. ſunt quæſiti numeri. Hinc etiam Canonem formare licet.

A Quadrato ſemiſſis ſummæ quadratorum aufer quadratum producti, reſidui latus additum & ademptum ſemiſſi ſummæ quadratorum, ipſos exhibebis quadratos.

QVAESTIO SECVNDA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & ſumma quadratorum ab ipſis ortorum, ſint quales poſcimur. Oportet autem duplum ſummæ quadratorum multatum quadrato interualli, relinquere quadratum.

Eſto interuallum 6. ſumma quadratorum 68. ſi per reductionem, quæſtionem propoſitam ſoluere libet. [1] Quia duplum ſummæ quadratorum, æquatur quadrato ſummæ numerorum, & qua-
7. 2. poriſ. drato interualli, à duplo ipſius 68. nempe à 136. aufer quadratum ipſius 6. nempe 36. remanet 100. cuius latus 10. eſt ſumma numerorum. Iam ergo ſoluetur quæſtio per trigeſimam primam, quærendo duos numeros quorum ſumma 10. & ſumma quadratorum 68. & rurſus per primam quærendo duos numeros, quorum ſumma 10. interuallum 6. ſed ſi peculiari eſt vtendum operatione id ita fiet. Cùm interuallum præſcribatur 6. Ponatur alter numerorum 3 + 1 N. alter 1 N − 3. fiet ſumma quadratorum 18 + 2 Q. æqualis 68. Quare fit 1 N. 5. & ſunt quæſiti numeri 8. & 2. Hinc etiam Canon formabitur.

Dimidium quadrati interualli aufer à ſumma quadratorum, reſidui ſemiſſis latus additum & ademptum ſemiſſi interualli quæſitos numeros exhibebit.

Qui ſanè Canon prorſus conuenit cum ſexta ſecundi poriſmatum, vt manifeſtum eſt.

QVAESTIO TERTIA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & interuallum quadratorum ab ipſis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem eſſe interuallo quadratorum.

Sit interuallum numerorum 6. interuallum quadratorum 60. ſi libet vti reductione. [a] Quia ex interuallo numerorum in ſummam eorundem, fit interuallum quadratorum, diuidendo 60. per 6. *3.2. poriſ.* quotiens 10. erit ſumma numerorum. Igitur ſoluetur quæſtio per trigeſimam ſecundam quærendo duos numeros, quorum ſumma 10. interuallum quadratorum 60. Rurſus ſoluetur per primam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. interuallum 6. Sed ſi peculiarem requiras operationem. Pone minorem quæſitorum 1 N. ergo maior 1 N. + 6. interuallum quadratorum eſt 36 + 12 N. quod æquatur 60. & fit 1. N. 2. minor numerus. Vel, Pone maiorem 1 N. erit minor 1 N. − 6. Interuallum quadratorum eſt 12 N. − 36. quod æquatur 60. & fit 1 N. 8. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Quadratum interualli numerorum adde & adime interuallo quadratorum, ſummam & reſiduum diuide per duplum interualli numerorum, prodibunt quæſiti numeri.

Aliter etiam eſto minor 1 N − 3. maior 1 N + 3. fiet interuallum quadratorum 12 N. æquale 60. Quare fit 1 N. 5. & ſunt numeri vt prius 2. & 8. Hinc etiam Canon alius formari poteſt.

Diuide interuallum quadratorum per duplum interualli numerorum, quotienti adde & adime ſemiſſem interualli numerorum: habebis quæſitos numeros.

QVAESTIO QVARTA.

Inueniantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione ~~, & interuallum~~ quadratorum ab ipſis ortorum, ſint quales poſcimur. Oportet autem quadratum dupli producti additum quadrato interualli quadratorum, efficere quadratum, cuius lateri ſiue addatur ſiue ~~adimatur duplum producti~~, fiat quadratus.

Eſto productus 15. interuallum quadratorum 16. Ponatur ſumma quadratorum 1 N. Ergo ſi addatur ei duplum producti [a], fiet 1 N. + 30. æquale quadrato ſummæ numerorum: & ſi ab 1 N. auferatur idem duplum producti 30. [a] fiet 1 N. − 30. æquale quadrato interualli numerorum. Porro [b] *4. ſecundi.* quia ex interuallo numerorum in ſummam ipſorum fit interuallum quadratorum, patet ex qua- *4.2. poriſ.* drato interualli numerorum in quadratum ſummæ, fieri quadratum interualli quadratorum. Qua- *3.2. poriſ.* mobrem ex 1 N. − 30. in 1 N. + 30. productus 1 Q. − 900. æquatur quadrato ipſius 16. nempe 256. & fit 1 N. 34. ſumma quadratorum. Reducetur ergo iam quæſtio ad primam iſtarum quærendo duos numeros, quorum productum 15. ſumma quadratorum 34. vel etiam ex ſumma quadratorum 34. & interuallo ipſorum 16. reperientur ſigillatim ipſi quadrati 25. & 9. per primam huius libri, vnde & latera 5. 3. innoteſcent.

Aliter etiam, & facilius inſtitui poteſt operatio, & alia quoque conditio præſcribi. nimirum. Oportet quadratum producti additum quadrato ſemiſſis interualli quadratorum facere quadratum, cuius lateri ſiue addatur ſiue adimatur ſemiſſis interualli quadratorum, fiat item quadratus. Ponatur quadratorum alter 1 N. + 8. alter 1 N. − 8. Sic enim eſt eorum interuallum 16. Igitur cùm ex quadratorum mutuo ductu fiat quadratus plani ſub lateribus, ex 1 N. + 8. in 1 N. − 8. fiet 1 Q. − 64. æquale quadrato producti 15. nempe 225. & fit 1 N. 17. ſuntque quadrati quæſiti 25. & 9. vnde & ipſa latera 5. & 3. noſcuntur. Hinc elicietur huiuſmodi Canon.

Quadratum producti adde quadrato ſemiſſis interualli quadratorum, ſummæ lateri adde & adime ſemiſſem interualli quadratorum, fient quadrati quæſitorum numerorum.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex ſumma quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem quadruplum aggregati ex producto multiplicationis, & ex ſumma quadratorum multatum triplo quadrati ſummæ, relinquere quadratum.

Eſto ſumma 10. aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum 76. Eſto alter numerorum 5 + 1 N. alter 5. − 1 N. erit ſumma quadratorum 50 + 2 Q. productum multiplicationis 25 − 1 Q. ergo aggregatum horum erit 75 + 1 Q. æquale 76. & fit 1 N. 1. ſunt ergo quæſiti numeri 6. & 4. Hinc formatur iſte Canon.

Ab aggregato ex ſumma quadratorum & ex producto multiplicationis aufer, dodrantem quadrati ſumma, reſidus latus additum & ademptum ſemiſſi ſumma, quaſitos dabit numeros.

Vel quod idem eſt.

A quadruplo aggregati aufer triplum quadrati ſumma, reſidui latus additum & ademptum ipſi ſumma, praſtabit duplum quaſitorum numerorum.

4. ſecundi. Quod ſi per reductionem velis hoc problema ſoluere. ¹ Quoniam quadratus ſummæ æquatur ſummæ quadratorum & duplo producti, ſi à quadraro ſummæ 100. auferas 76. compoſirum ex ſumma quadratorum & ex producto ſemel, reſiduum 24. æquabitur producto. Iam ergo triplicirer reducerur quæſtio. Primo ad rrigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. productum multiplicationis 24. ſecundo ad trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. & ſumma quadratorum 52. nam cogniro producto 24. cognoſcitur & ſumma quadrarorum auſerendo 24. de 76. Tertio ad primam iſtarum quærendo duos numeros quorum productum 24. ſumma quadratorum 52.

QVAESTIO SEXTA.

Dato aggregato ex ſumma quadratorum, & ex producto multiplicationis, datoque altero è duobus numeris, alterum inuenire. Oportet autem datum aggregatum multatum dodrante quadrati dati numeri, relinquere quadratum.

Eſto datum aggregarum 124. alrer numerorum 10. Ponatur compoſitum ex quæſiro numero & ex ſemiſſe dati 1. N. ergo quæſirus 1 N. — 5. cuius quadratus eſt 1 Q. + 25 — 10 N. At alrerius quadrarus eſt 100. productum verò multiplicationis ipſorum eſt 10 N. — 50. Quæ omnia ſimul efficiunt 1 Q. + 75. æqualia 124. Quare fir 1 N. 7. ergo quæſitus numerus qui ponebatur 1 N. — 5. erir 2. Hinc elicietur huiuſmodi Canon.

A dato aggregato aufer dodrantem quadrati dati numeri, à reſidui latere aufer ſemiſſem dati numerò, relinquetur quaſitus.

QVAESTIO SEPTIMA.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex producto multiplicationis, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum huius compoſiti vnitate auctum, additum ſummæ quadratorum, efficere quadratum, cui proximè minor quadratus, ablatus a duplo ſummæ quadratorum relinquat etiam quadratum.

Sit ſumma quadrarorum 34. Compoſirum ex ſumma numerorum, & ex producto multiplicationis ſit 23. Ponatur ſumma numerorum 1 N. ergo productum eſt 23 — 1 N. cuius duplum 46 — 2 N.
4. ſecundi. quo addiro ſummæ quadrarorum 34. ² fir 80. — 2 N. æquale quadrato ſummæ 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. æquantur 80. quæ eſt prima compoſirarum, & fit 1 N. 8. ſumma ſcilicer numerorum. Quare productum mulriplicationis eſt 15. Itaque iam reducetur quæſtio ad rres alias. Primò ad trigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. productum 15. ſecundò ad trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. & ſumma quadrarorum 34. tertiò ad primam iſtarum, quærendo duos numeros quorum productum 15. ſumma quadratorum 34. & omnibus modis inuenientur quæſiti numeri 3. & 5. Hinc fiet Canon.

Summa quadratorum adde duplum compoſiti ex ſumma numerorum & ex producto, vnitate auctum. Aggregati latus vnitate multatum, erit ſumma numerorum.

Porro hîc & in ſequentibus per quadratum proximè minorem, intelligo illum cuius latus deficit vnitate à larere quadrati cuius fit mentio.

QVAESTIO OCTAVA.

Inueniantur duo numeri, vt productum multiplicationis eorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem octuplum producti vnitate auctum, additum quadruplo compoſiti conficere quadratum, cui proximè minor quadratus multatus ſedecuplo producti relinquat quadratum.

Eſto productum 6. Compoſitum ex ſumma numerorum & quadratorum 18. Ponatur ſumma numerorum 1 N. ergo ſumma quadrarorum 18 — 1 N. cui addendo 12. duplum producti ³ fiet 30. —
4. ſecundi. 1 N. æqualis quadrato ſummæ numerorum, pura 1 Q. Quare 1 Q. + 1 N. æquatur 30. & fir 1 N. 5. ſumma ſcilicet quæſirorum numerorum. Quamobrem ſumma quadrarorum eſt 13. Itaque iam licer ad tres alias quæſtionem hanc reuocare, ſicut & præcedentem, nimirum ad trigeſimam primam,

& primam iſtarum. Inuenienturque quæſiti numeri 2. & 3. Hinc formatur huiuſmodi Canon.

Quadruplo compoſiti adde octuplum producti vnitate auctum, aggregati latus vnitate multatum, erit duplum ſumma numerorum.

QVAESTIO NONA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & compoſitum ex eorum interuallo, & ex ſumma quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato compoſito auferendo ſemiſſem quadrati ſummæ, reſidui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Eſto ſumma 8. Compoſitum ex interuallo numerorum, & ex ſumma quadratorum 56. Ponatur minor 4 − 1 N. maior 4 + 1 N. horum interuallũ eſt 2 N. ſumma quadratorum 32 + 2 Q. Quare 32 + 2 N. + 2 Q. æquantur 56. & tandem 2 Q + 2 N. ſunt æquales 24. vnde fit 1 N. 3. ſemiſſis interualli, ipſum ergo interuallum eſt 6. ſumma quadratorum 50. Itaque iam ad tres alias reuocabitur quæſtio. Primò ad primam quærendo duos numeros, quorum ſumma 8. interuallum 6. Secundò ad trigeſimam primam quærendo duos numeros, quorum ſumma 8. ſumma quadratorum 50. Tertiò ad ſecundam iſtarum quærendo duos numeros, quorum interuallum 6. ſumma quadratorum 50. & omnibus modis inuenientur quæſiti numeri 1 & 7. Hinc etiam elicitur facilis Canon.

Aufer à dato compoſito ſemiſſem quadrati ſumma, reſidui duplo adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum ipſorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato compoſito auferendo ſemiſſem quadrati interualli, reſidui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Eſto interuallum 6. compoſitum ex ſummis numerorum & quadratorum 58. Ponatur ſumma numerorum 2 N. ergo ſumma quadratorum erit 58 − 2 N. ipſi verò numeri 1 N − 3. & 1 N. + 3. vt eorum interuallum maneat 6. Fiet autem ſumma quadratorum 2 Q. + 18. ſed iam erat 58 − 2 N. Igitur 58 − 2 N. æquantur 2 Q. + 18. & tandem 2 Q. + 2 N. æquantur 40. & fit 1 N. 4. ſemiſſis ſummæ numerorum. Eſt ſumma ergo numerorum 8. & ſumma quadratorum 50. Quare rurſus reuocabitur quæſtio ad eaſdem tres ad quas præcedens reduci oſtenſa eſt, & inuenientur quæſiti numeri 1 & 7. fiet etiam Canon.

Aufer à dato compoſito ſemiſſem quadrati interualli, reſidui duplum vnitate auctum quadratus fiet, cuius latus vnitate multatum erit ſumma numerorum.

Non adiicitur hîc alia huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum, & compoſitum ex ſumma numerorum & ex eorum interuallo datos conficiant numeros.

Quia facilè citrà Algebram ſolui poteſt. Sit enim ſumma quadratorum 50. compoſitum ex ſumma numerorum, & ex eorum interuallo 14. Patet per Canonem primæ libri huius, vel per vigeſimam tertiam primi poriſm. 14. eſſe duplum maioris numeri. Quare ipſe maior numerus eſt 7. cuius quadratum 49. ſi auferas à 50. remanet 1. quadratus minoris.

QVAESTIO VNDECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex interuallo ipſorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt exceſſus quadrati ſemiſſis ſummæ ſuper aggregatum, vnitate auctus conficiat quadratum. Vel vt exceſſus aggregati ſuper quadratum ſemiſſis ſummæ, ab vnitate detractus, relinquat quadratum.

Eſto primum ſumma numerorum 16. aggregatum ex producto & interuallo 56. Ponatur interuallum 2 N. ergo productum erit 56. − 2 N. ipſi verò numeri 8 + 1 N. & 8 − 1 N. quorum productum fit 64. − 1 Q æquale 56 − 2 N. & tandem 2 N. + 8. æquantur 1 Q. vnde fit 1 N. 4. ſemiſſis interualli, ac proinde ipſum interuallum eſt 8. productum 48. Itaque iam reducetur quæſtio ad primam, cum ſumma ſit 16. interuallum 8. vel ad trigeſimam, cum ſumma ſit 16. productum 48. vel ad trigeſimam tertiam, cùm interuallum ſit 8. productum 48. & inuenientur numeri 4. & 12. Deinde eſto ſumma $\frac{1}{2}$ aggregatum ex producto & interuallo $\frac{1}{3}$. Poſito vt prius interuallo 2

N. erit productum $\frac{1}{3}$ − 2 N. ipſi verò numeri $\frac{5}{12}$ + 1 N. & $\frac{5}{12}$ − N. 1 quorum productum fit $\frac{25}{144}$ − 1 Q. æquale $\frac{1}{3}$ − 2 N. & tandem 1 Q. + $\frac{23}{144}$ æquantur 2. N. & fit 1. N. $\frac{1}{12}$ ſemiſſis interualli, ergo ipſum interuallum eſt $\frac{1}{6}$ productum item $\frac{1}{6}$ & per quæſtiones ſuprà citatas reperientur quæſiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ Hinc fit iſte Canon.

Aufer à quadrato ſemiſſis ſumma datum aggregatum, reſiduum vnitate auctum eſt quadratus, cuius latus vnitate auctum eſt ſemiſſis interualli numerorum. Vel.

Aufer à dato aggregato quadratum ſemiſſis ſumma, reſiduum ab vnitate detractum relinquit quadratum, cuius latus detractum ab vnitate eſt ſemiſſis interualli numerorum.

QVAESTIO DVODECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex ſumma, & ex producto ipſorum, datos faciant numeros. Oportet autem vt quadrato ſemiſſis interualli ad datum aggregatum vnitate auctum adiecto, fiat quadratus.

Eſto interuallum 8. aggregatum ex ſumma & producto 32. Ponatur ſumma 2 N. ergo productum relinquetur 32 − 2 N. ipſi autem numeri erunt 1 N. + 4 & 1 N. − 4. quorum productum 1 Q. − 16, æquatur 32. − 2 N. & tandem 1 Q. + 2 N. æquatur 48. & fit 1 N. 6. ſemiſſis ſummæ. Ipſa ergo ſumma eſt 12, productum 20, Soluetur igitur quæſtio per eaſdem per quas ſuperior, & inuenientur quæſiti numeri 2 & 10. & fiet Canon.

Quadrato ſemiſſis interualli adde datum aggregatum vnitate auctum, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum erit ſemiſſis ſumma numerorum.

Hîc etiam non ſubiicitur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, quorum productum, & aggregatum ex ſumma ipſorum & interuallo, datos conficiant numeros.

Etenim nullo negotio abſque Algebra ſoluitur. Eſto productum 48. aggregatum ſummæ & interualli 24. patet per Canonem primæ huius, vel per vigeſimam tertiam primi poriſm. 24. eſſe duplum maioris numeri. Eſt ergo maior 12. per quem ſi diuidas 48. fit minor 4.

QVAESTIO DECIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & aggregatum ex producto multiplicationis, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quintuplo quadrati ſemiſſis ſummæ auferendo datum aggregatum, ſuperſit quadratus.

Eſto ſumma 12. aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 116. Ponatur minor 1 N. maior 12 − 1 N. interuallum quadratorum erit 144 − 24 N. productum verò 12 N. − 1 Q quæ iuncta faciunt 144 − 12 N. − 1 Q. æqualia 116. & tandem 1 Q. + 12 N. æquantur 28 & fit 1 N. 2. minor numerus. Ergo maior eſt 10. Hinc formatur Canon.

A quintuplo quadrati ſemiſſis ſumma aufer datum aggregatum, remanebit quadratus cuius latus multatum ſemiſſe ſumma, minorem exhibet numerum.

Hic videntur deſiderari duæ quæſtiones quibus quæruntur duo numeri dato producto, & aggregato ex ſumma numerorum, & ex interuallo quadratorum. Vel dato interuallo quadratorum & aggregato ex ſumma numerorum & ex producto. Sed quia reſolui non poſſunt per regulas Algebræ perfectè Canonicas, quandoquidem incidunt in æquationes in quibus duæ ſpecies duabus ſpeciebus æquales reperiuntur, non poſſunt hîc commode tractari. Qua de cauſa nonnullas etiam alias omiſimus eiuſdem naturæ.

QVAESTIO DECIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem aggregatum interuallorum eſſe minus quadrato ſummæ aucto ſuo latere.

Eſto ſumma 10. aggregatum interuallorum 44. Ponatur interuallum Numerorum 2. N. erunt ipſi 5 − 1 N. & 5 + 1 N. quadratorum interuallum fiet 20. N. æquale 44. − 2 N. & fit 1 N. 2. ſemiſſis interualli, quare quæſiti numeri ſunt 3. & 7. Hinc fit Canon.

Diuide aggregatum interuallorum per duplum ſumma binario auctum, orietur ſemiſsis interualli numerorum.

Reducitur ergo ad primam vel ad trigeſimam ſecundam Diophanti, vel ad tertiam harum. Aliter

ter ponatur alter numerorum 1 N. alter 10 – 1 N. fiet aggregatum interualli numerorum & quadratorum 110 – 22 N. vel 22 N. – 110. prout 1 N. nunc maior nunc minor ſtatuetur. Igitur 110 – 22. N. æquantur 44. & fit 1 N. 3. minor numerus. Vel 22. N – 110. æquantur 44. & fit 1. N. 7. maior numerus. Hinc etiam fiet Canon.

Quadrato ſummæ ſuo latere aucto adde vel adime aggregatum interuallorum: ſummam, & reſiduum diuide per duplum ſummæ binario auctum, orientur quæſiti numeri.

QVAESTIO DECIMA QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex ſumma ipſorum, & ex interuallo quadratorum, datos conficiant numeros.

Oportet autem datum aggregatum maius eſſe interualli quadrato aucto ſuo latere.

Eſto interuallum 4. aggregatum ex ſumma numerorum, & ex interuallo quadratorum 50. Ponatur alter 1 N. alter 1 N + 4. fiet aggregatum ex ſumma numerorum & interuallo quadratorum 10. N + 20 æquale 50. vnde fit 1 N. 3. minor numerus. Quod ſi ponatur maior 1 N. minor 1 N. – 4. fient 10 N – 20 æqualia 50. vnde erit 1 N. 7. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Dato aggregato adde vel adime interualli quadratum auctum ſuo latere, ſummam & reſiduum diuide per duplum interualli auctum binario, orientur, quæſiti numeri.

Aliter etiam fiet operatio poſita ſumma 2 N. & ipſis numeris 1 N – 5. & 1 N + 5. vt tibi conſiderandum relinquo. Hic quoque prætermitto quæſtionem de inueniendis duobus numeris dato interuallo quadratorum, & aggregato ex ſumma & interuallo numerorum, nam ſoluitur abſque Algebra.

QVAESTIO DECIMA SEXTA.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, & aggregatum ex interuallo numerorum, & ex producto multiplicationis datos conficiant numeros. Oportet autem vt ſi à ſumma quadratorum auferatur duplum dati aggregati vnitate multatum, remaneat quadratus.

Eſto ſumma quadratorum 58. aggregatum interualli & producti 25. Ponatur interuallum 1 N. erit ergo productum 25 – 1 N. Sed à ſumma quadratorum 58. auferendo quadratum interualli 1 Q. [a] reſiduum 58 – 1 Q duplum eſt producti. Ergo 58 – 1 Q. æquatur 50 – 2 N. & fit 1 N. 4. interuallum numerorum, productum ergo eſt 21. Itaque iam reducetur quæſtio vel ad trigeſimam tertiam Diophanti, vel ad primam, vel ad ſecundam harum, & inuenientur quæſiti numeri 3. & 7. 4.2. poriſ.

Aduertendum autem fieri poſſe vt ſumma quadratorum ſit minor duplo aggregati. Quo caſu ſic præſcribenda erit conditio. Oportet vt ſummam quadratorum auferendo à duplo aggregati, reſiduum ab vnitate detractum, relinquat quadratum. Et pro vtroque caſu Canon formabitur.

A ſumma quadratorum aufer duplum aggregati, reſiduum vnitate auctum quadratus erit, cuius latus vnitate auctum erit interuallum numerorum.

Vel in alio caſu.

A duplo aggregati aufer ſummam quadratorum, reſiduum ab vnitate detractum relinquet quadratum, cuius latus ab vnitate detractum; erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA SEPTIMA.

Inuenire duos numeros quorum interuallum, & aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt ſi ab aggregato auferatur quadratus ſemiſſis interualli, reſidui triens ſit quadratus.

Eſto interuallum 4. aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum 79. Per ſolam reductionem ſolui poteſt quæſtio hac arte. [a] Quia ſumma quadratorum continet duplum producti & quadratum interualli, patet 79. continere ter productum & ſemel quadratum interualli. Quare ſi inde auferatur 16. quadratus interualli, reſiduum 63. erit triplum producti, erit ergo productum 21. ſumma quadratorum 58. Quare multis modis reducetur quæſtio, vt manifeſtum eſt. Aliter ponatur ſumma Numerorum 2 N. ergo ipſi numeri ſunt 1 N. – 2 & 1 N. + 2. aggregatum ex ſumma quadratorum & ex producto eſt 3 Q. + 4. æquale 79. vnde fit 1 N. 5. ſemiſſis ſummæ. Quare ipſa ſumma 10. ex qua & interuallo per primam huius libri noſcuntur numeri 3. & 7. Canon. 4.2. poriſ.

Aufer ab aggregato quadratum ſemiſſis interualli, reſidui triens eſt quadratus ſemiſſis ſummæ numerorum.

QVAESTIO DECIMA OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt productum multiplicationis & aggregatum ex interuallo ipſorum, & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadruplum exceſſus aggregati ſuprà duplum producti, adſcita vnitate faciat quadratum.

Eſto productum 21. aggregatum ex interuallo numerorum, & ex ſumma quadratorum 62. Ponatur interuallum numerorum 2 N. erit ergo ſumma quadratorum 62 − 2 N. vnde ſi auferatur quadratus interualli, nimirum 4 Q. ' reſiduum 62 − 2 N. − 4 Q. æquatur duplo producti, hoc eſt vni-
4. 2. poriſ. tatibus 42. Quare tandem 4 Q. + 2 N. æquantur 20. & fit 1 N 2. ſemiſſis interualli numerorum. Quare ipſum interuallum eſt 4. ſumma quadratorum 58. Itaque reducitur quæſtio ad trigeſimam tertiam Diophanti. Vel ad primam iſtarum, vel ad ſecundam, & inueniuntur quæſiti numeri 3. & 7. Hinc etiam fit Canon.

Quadruplo exceſſus aggregati ſuprà duplum producti adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum duplum eſt interualli numerorum.

QVAESTIO DECIMA NONA.

Inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum & aggregatum ex producto, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt quintuplum interualli quadratorum ortorum à data ſumma, & à dato aggregato, additum vel ademptum quadrato aggregati ſummam vel reſiduum faciat quadratum.

Eſto ſumma quadratorum 58. aggregatum ex producto, & ex interuallo numerorum 61. Ponatur productum 1 N. Igitur eius duplo addito ad ſummam quadratorum, ' fit 58 + 2 N. quadratus
4 ſecundi. ſummæ numerorum. At eodem duplo detracto ab eadem ſumma quadratorum, ' remanet 58 − 2 N.
4. 2. poriſ. quadratus interualli numerorum. Quoniam igitur ex ſumma numerorum in eorum interuallum, '
3. 2. poriſ. fit interuallum quadratorum; vtique ex quadrato ſummæ numerorum in quadratum interualli eorum, fiet quadratus interualli quadratorum. Igitur ex 58. + 2 N. in 58 − 2. N. fiet 3364. − 4 Q. æqualis quadrato ipſius 61 − 1 N. nimirum 3721. + 1 Q. − 122 N. & tandem 5 Q. + 357 æquabuntur 122 N. & fiet 1 N. 21. productum ſcilicet. Ergo interuallum quadratorum erit 40. vnde licet varia vti reductione, & inuenire quæſitos numeros 3. & 7.

Accidit autem vt data ſumma nunc minor ſit, nunc verò maior dato aggregato, vt in ſuperiore exemplo minor extitit, ſed in ſequente maior eſt. Eſto ſumma quadratorum 34. Aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 31. eodem vtentes ductu inueniemus tandem 62 N. + 195. æquales 5 Q. & fiet 1 N. 15. productum ſcilicet, vnde interuallum quadratorum eſt 16. & ipſi quadrata 25. & 9. Hinc elicitur Canon.

Quintuplum exceſſus quadrati à dato aggregato ſuper quadratum à data ſumma, aufer à quadrato aggregati, reſidui latus adde aggregato, ſumma quinta pars erit productum. Vel.

Quintuplum exceſſus quadrati à data ſumma ſuper quadratum à dato aggregato, adde quadrato aggregati, ſummæ latus adde aggregato, compoſiti quinta pars erit productum.

Aduertendum porrò, vt omnino ſolutio ſit rationalis, præter appoſitam conditionem, neceſſe eſſe vt inuento interuallo quadratorum, id ademptum vel additum ſummæ quadratorum, ſummam & reſiduum faciat quadratum.

QVAESTIO VIGESIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum quadratorum, & aggregatum ex ſumma quadratorum, & ex producto datos conficiant numeros.

Oportet autem vt triplum exceſſus quadrati à dato aggregato ſuper quadratum à dato interuallo, additum quadrato aggregati efficiat quadratum, cuius latus multatum eodem aggregato, numerum relinquat cuius triens additum rurſus eidem aggregato, faciat quadratum.

Eſto interuallum quadratorum 40. Aggregatum ex ſumma quadratorum, & ex producto 79.
4. 2. poriſ. eſto productum 1 N. ergo ſumma quadratorum 79 − 1 N. vnde auferendo duplum producti,
4. ſecundi. ' reſiduum 79 − 3 N. eſt quadratus interualli numerorum. Sed etiam ſi ad 79 addatur productum 1
3. 2. poriſ. N. ' fit 79 + 1 N. quadratus ſummæ numerorum. ' Igitur cùm ex ſumma numerorum in eorum

interuallum fiat interuallum quadratorum, vtique ex quadrato ſummæ 79 + 1 N. in quadratum interualli 79 − 3 N. fiet 6241 − 158 N. − 3 Q. æquale quadrato interualli quadratorum, nimirum 1600. & tandem 4641. æquantur 3 Q. + . 158 N. & fit 1 N 21. productum. Quare per reductionem ad præcedentes regulas ſoluitur quæſtio. Hinc fiet Canon.

Triplum exceſſus quadrati ab aggregato ſuper quadratum ab interuallo, adde ipſi quadrato aggregati; à ſumma latere aufer idem aggregatum, reſidui triens erit productum multiplicationis.

Alia quæſtio qua quæruntur numeri dato producto, & aggregato ex ſumma & interuallo quadratorum facilis eſt, & ſoluitur abſque algebra.

QVAESTIO VIGESIMA PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, itemque aggregatum ex ſummis numerorum & quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem ſiue aggregarum interuallorum addatur aggregato ſummarum, ſiue adimatur, duplum ſummæ & reſidui addita vnitate fieri vtrimque quadratum.

Eſto aggregatum interuallorum 14. aggregatum ſummarum 26. Quoniam [a] igitur addendo interuallum numerorum ſummæ numerorum, fit duplum maioris numeri, & addendo interuallum quadratorum ſummæ quadratorum, fit duplum maioris quadrati, patet addito 14. ad 26. ſummam 40. continere bis maiorem numerum, & bis eius quadratum. Ergo 20. eſt maior numerus & eius quadratus. Ponatur maior numerus 1 N. erit eius quadratus 1 Q. Igitur 1 Q. + 1 N. æquatur 20. fitque 1 N. 4. maior numerus. Eadem ratione auferendo 14. de 26. reſiduum 12. eſt duplum minoris numeri & eius quadrati. Quare 6. eſt minor numerus & eius quadratus. Poſito ergo minore numero 1 N. fiet 6. æqualis 1 Q. + 1 N. & erit 1 N. 2. minor numerus. Hinc formatur Canon. 23. 1. poriſ.

Duplo ſummæ duorum aggregatorum, & duplo interualli ipſorum, adde ſeorſim vnitatem, fient duo quadrati, quorum latera vnitate multata, dupla manebunt quæſitorum numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt aggregatum ex ſumma ipſorum, & ex interuallo quadratorum, itemque aggregatum ex ſumma quadratorum, & ex interuallo numerorum datos faciant numeros. Oportet autem vt duplum ſummæ aggregatorum addita vnitate faciat quadratum. Et vt duplum interualli eorundem vel additum vnitati, vel detractum ab vnitate faciat quadratum.

Eſto prius aggregatum 18. poſterius 22. Patet ob rationem allatam in præcedente horum ſummam 40. eſſe duplum maioris numeri & quadrati ipſius. Quare vt ſuprà inuenietur maior numerus 4. Quia verò auferendo 18. de 22. ſupereſt 4. patet 4. eſſe duplum minoris quadrati minus duplo lateris. Quare poſito minore numero 1 N. duplum minoris quadrati erit 4 + 2 N. Quare 2 + 1 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 2.

Sed eſto prius aggregatum 20 $\frac{2}{9}$. Poſterius 19. $\frac{7}{9}$. Quia horum ſumma eſt quoque 40. erit 4 maior numerus vt prius. Sed quia prius aggregatum excedit poſterius, erit horum interuallum $\frac{4}{9}$ duplum minoris numeri, minus duplo ſui quadrati. Quare poſito minore numero 1 N. fient $\frac{4}{9}$ + 2 Q. æqualia 2 N. vnde erit 1 N. $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ Et vtrumqne ſatisfacit propoſito. Hinc fit Canon.

Duplum ſummæ aggregatorum vnitate auctum fit quadratus, cuius latus vnitate multatum eſt duplum maioris lateris, & duplum exceſſus poſterioris aggregati ſuper prius aggregatum; addita vnitate quadratus fit, cuius latus vnitate auctum eſt duplum minoris lateris. At duplum exceſſus prioris aggregati ſuper poſterius aggregatum, detractum ab vnitate quadratum relinquit, cuius latus additum & ademptum ſemiſſi vnitatis, vtroque modo exhibet duplum minoris numeri.

Sed & aduertendum eſt, ſi vnum aggregatum alteri ſit æquale, tunc minorem numerum eſſe ſemper vnitatem vt facilè eſt demonſtrare.

QVAESTIO VIGESIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros vt productum ex interuallo numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex ſumma numerorum in ſummam quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum poſterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Eſto prius productum 32. poſterius 272. Ponatur ſumma numerorum 1 N. Igitur $\frac{272}{1N}$ eſt ſumma
3. 2. poriſ. quadratorum, & quia ex ſumma numerorum in interuallum eorundem fit interuallum quadratorum, quo rurſus ducto in numerorum interuallum fit 32. erit $\frac{32}{1N}$ quadratus interualli numerorum,
7. 2. poriſ. qui ſi auferatur à duplo ſummæ quadratorum, nimirum à $\frac{544}{1N}$ reſiduum $\frac{512}{1N}$ æquatur quadrato ſummæ numerorum 1 Q. & omnia ducendo in 1 N. fiunt 512 æquales 1 C. & fit 1 N 8. ſumma numerorum, & 34. ſumma quadratorum, & 2. interuallum eorundem. Vnde facilè reperiuntur numeri 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo poſterioris, reſiduum eſt cubus ſummæ numerorum, per quam ſi diuidas prius productum, fit quadratus interualli numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros vt productum ex ſumma numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex ſumma quadratorum in interuallum numerorum, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum poſterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Eſto prius productum 128. poſterius 68. Ponatur interuallum numerorum 1 N. ergo ſumma quadratorum erit $\frac{68}{1N}$ & ob cauſam in precedente allatam $\frac{128}{1N}$ erit quadratus ſummæ numerorum. Itaque
7. 2. poriſ. ſi à duplo ſummæ quadratorum quod eſt $\frac{136}{1N}$ auferatur quadratus ſummæ numerorum nimirum $\frac{128}{1N}$ reſiduum $\frac{8}{1N}$ eſt quadratus interualli numerorum. Quare $\frac{8}{1N}$ æquatur 1 Q. & omnia in 1 N. fiunt 8. æquales 1 C. eſt ergo 1 N 2. interuallum numerorum, & ſumma quadratorum 34. & quadratus ſummæ numerorum 64. vnde licet variis modis quæſtionem ſoluere, & inuenire quæſitos numeros 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo poſterioris, reſiduum eſt cubus interualli numerorum, itaque per eius latus diuidendo prius productum, oritur quadratus ſummæ numerorum.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας δεδομένον ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ςᾱ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς γ. λοιπόν ἐστι τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι. τὸ δὲ αὐτῶν σύνθεμα ςςοὶ δ. ὥστε δυνάμεις ι πενταπλασίονές εἰσιν ςς δ. ἀριθμοὶ ἄρα κ ἴσοι δυνάμεσι ι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο β. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο β ὁ δὲ μείζων μο ς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, datam inter ſe rationem habentes, vt & ſumma quadratorum ab ipſis, ad ſummam ipſorum datam habeat rationem. Imperatum ſit maiorem minoris eſſe triplum; ſummam autem quadratorum; ſummæ numerorum eſſe quincuplam. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Supereſt vt ſumma quadratorum ab ipſis, ſummæ vtriuſque ſit quincupla. Cæterùm ſumma quadratorum ab ipſis ortorum fit 10 Q. ſumma verò ipſorum eſt 4 N. vnde conſtat 10 Q. quincuplos eſſe ad 4 N. Quamobrem 20 N. æquantur 10 Q. & fit 1 N. 2. Eſt igitur minor 2. maior 6. & quæſtioni ſatisfaciunt.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

CIRCA hanc quæſtionem & octo ſequentes nulla eſt difficultas, nec ampliori indigent explicatione. Canones etiam pro qualibet formari nullo negotio poſſunt, quod tibi relinquo peragendum.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt ſumma quadratorum ab

ipſis ortorum, ad interuallum ipſorum datam habeat rationem. Iniunctum ſit maiorem minoris triplum eſſe; ſummam autem quadratorum ab ipſis ortorum, interualli ipſorum eſſe decuplam. Ponatur minor 1 N. Maior ergo erit 3 N. Cæterum volo ſummam quadratorum ab ipſis, interualli ipſorum eſſe decuplam. Sed ſumma quadratorum ab ipſis facit 10 Q. Interuallum autem ipſorum 2 N. Igitur 10 Q. decupli ſunt ad 2 N. ſed & 20 N. decupli ſunt ad 2 N. Igitur 20 N. æquales ſunt 10 Q. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 10 N. æquales 20. & fit 1 N. 2. & eſt rurſus minor 2. maior 6. & ſatisfaciunt propoſito.

τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα, τὸ δὲ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ο α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς^οι γ. λοιπὸν θέλω τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς^οὶ β. δυνάμεις ἄρα ι δεκαπλάσιοί εἰσιν ςς^ῶν β. ἀλλὰ καὶ ςς^οὶ κ δεκαπλάσιοί εἰσιν ςς^ῶν β. ἀριθμοὶ ἄρα κ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ι. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ςς^οὶ ἄρα ι ἴσοι μονάσιν κ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο β. καὶ ἔσται πάλιν ὁ ἐλάσσων μ^ο β. ὁ δὲ μείζων μ^ο ς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt & interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, ad ſummam ipſorum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum. Interuallum autem quadratorum ab ipſis ſummæ ipſorum eſſe ſeſcuplum. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Supereſt vt & interuallum quadratorum ab ipſis ortorum ſummæ vtriuſque ſit ſeſcuplum. Sed interuallum quadratorum ab ipſis eſt 8 Q. ſumma autem numerorum ipſorum eſt 4 N. Igitur 8 Q. ſeſcupli ſunt ad 4 N. Quamobrem 24 N. æquantur 8 Q. & fit 1 N. 3. & eſt minor quidem 3. Maior verò 9. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι ὅπως καὶ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς ἀμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ου ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς^ῶν γ. λοιπόν δεῖ καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η. συναμφότερος δὲ ςς^οὶ δ. δυνάμεις ἄρα η. ἑξαπλασίονές εἰσι ςς^ῶν δ. ἀριθμοὶ ἄρα κδ. ἴσοι εἰσὶν δυνάμεσιν η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο γ, καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ο γ. ὁ δὲ μείζων μ^ο θ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO XXXVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt etiam interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, ad interuallum ipſorum datam habeat rationem. Imperatum ſit maiorem minoris eſſe triplum; interuallum quadratorum, interualli numerorum eſſe duodecuplum. Ponatur rurſus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. ſupereſt vt & interuallum quadratorum, interualli numerorum ſit duodecuplum. Sed interuallum quadratorum eſt 8 Q. Hoc ergo duodecuplum eſt ad 2 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς^ου ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς^ῶν γ. λοιπὸν δεῖ καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η. αὗται ἄρα δω-

δεκαπλασιονες ἴσοι ςς β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι η̄. καὶ γίνεται πάλιν ὁ ς° μ° γ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ὁμοίως δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ εὑρεθήσονται καὶ ἀριθμοὶ δύο πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχειν δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχειν δεδομένον.

Quamobrem 24. N. æquantur 8 Q. & fit rurſus 1 N. 3. & demonſtratio eſt manifeſta.

Similiter hac ipſa ratione inuenientur duo numeri datam ad inuicem rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad ſummam ipſorum datam habeat rationem. Et rurſus duo numeri datam inter ſe rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad ipſorum interuallum datam habeat rationem.

QVÆSTIO XXXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος, πρὸς τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάττονος τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τοῦ μείζονος εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς° ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, εἶναι τοῦ μείζονος ἑξαπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονός ἐστι δυνάμεως μιᾶς. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶν ἀριθμῶν τριῶν. ἀριθμοὶ ἄρα ιη̄ ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° ιη̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ° ιη̄. ὁ δὲ μείζων μ° νδ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus à minore ortus ad maiorem datam habeat rationem. Iniunctum ſit maiorem minoris eſſe triplum; quadratum autem minoris, eſſe maioris ſeſcuplum. Ponatur rurſus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. ſupereſt vt & quadratus à minore ortus, ſit maioris ſeſcuplus. Sed quadratus minoris eſt 1 Q. Igitur 1 Q. ſeſcuplus eſt ad 3 N. Quamobrem 18 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 18. Erit ergo minor 18. Maior 54. & hi ſatisfaciunt quæſtioni.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάττονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονος ἑξαπλασίονα. ἔστω ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς° ἑνός, καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος τριπλασίων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ ἐλάσσονος εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶ ἀριθμοῦ ἑνός. ἀριθμοὶ ἄρα ς̄. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° ς̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάττων μ° ς̄. ὁ δὲ μείζων μ° ιη̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad ipſum minorem datam habeat rationem. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum; Minoris autem quadratum ipſius minoris eſſe ſeſcuplum. Eſto ſimiliter maior 3 N. minor 1 N. & manet maior minoris triplus. Reſtat vt minoris quadratus, ipſius minoris ſit ſeſcuplus. Quamobrem 1 Q. ſeſcuplus eſt ad 1 N. Proinde 6. N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 6. erit igitur minor 6. Maior 18. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι διπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς° ἑνός. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad ſummam vtriuſque datam habeat rationem. Statutum ſit maiorem minoris eſſe triplum; quadratum verò minoris ſummæ vtriuſque eſſe duplum. Eſto rurſus Maior 3 N. minor 1 N. Supereſt vt quadratus à minore ortus, ſummæ vtriuſque ſit du-

plus, ſed quadratus minoris eſt 1 Q. ſumma verò vtriuſque 4 N. Igitur 1 Q. duplus eſt ad 4 N. Quamobrem 8 N. æquales ſunt 1 Q. & fit 1 N. 8. Erit igitur minor 8. maior 24. Et ſatisfaciunt quæſtioni.

τετράγωνον συναμφοτέρου ἐστὶ διπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος ἐστὶ δυνάμεως μιᾶς, συναμφότεροι δὲ ϛϛ δ̅. δύναμις ἄρα μία διπλασίων ἐστὶ ϛϛ δ̅. ἀριθμοὶ ἄρα η̅. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο η̅. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο η̅. ὁ δὲ μείζων μο κδ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros in ratione data, vt quadratus minoris ad ipſorum interuallum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum. Quadratum autem minoris interualli ipſorum eſſe ſeſcuplum. Eſto rurſus maior 3 N. minor verò 1 N. Supereſt vt quadratus minoris interualli ipſorum ſit ſeſcuplus. Igitur 1 Q. ſeſcuplus eſt ad 2 N. Quamobrem 12 N. æquales ſunt 1 Q. vnde fit 1 N. 12. Erit ergo minor 12. maior 36. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ἑξαπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛϛ γ̅. ὁ δὲ ἐλάσσων ϛ ἑνός. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία, ἑξαπλασίων ἐστὶ ϛϛ β̅. ἀριθμοὶ ἄρα ιβ̅, ἴσοι εἰσὶ δυνάμει μιᾷ ὁ ἄρα ἀριθμὸς ἔσται μο ιβ̅. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων ιβ̅. ὁ δὲ μείζων μο λϛ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLII.

SIMILITER ob hæc eadem, inuenientur duo numeri in data ratione, ita vt maioris quadratus ad minorem datam habeat rationem. Et rurſus duo numeri in data ratione, vt quadratus maioris ad ipſum maiorem datam habeat rationem. Et ſimiliter duo numeri in data ratione, vt maioris quadratus ad ſummam vtriuſque datam habeat rationem. Et adhuc duo numeri in ratione data, vt & maioris quadratus ad interuallum ipſorum datam habeat rationem.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται ἀριθμοὶ δύο ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς αὐτὸν τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ἔτι δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

QVÆSTIO XLIII.

DVOBVS datis numeris, alium numerum inuenire, vt ex his tribus bini quique coniuncti, & in reliquum multiplicati, producant tres numeros æqualibus ſe incrementis ſuperantes. Sint duo dati numeri 3. & 5. & oporteat inuenire alium numerum, vt bini coniuncti, & in reliquum multiplicati producant tres numeros, quorum æqualia ſint interualla. Eſto quæſitus 1 N. & ſi adiiciatur ad 5. fit 1 N. + 5. Quod ſi multiplicetur in reliquum, nimirum in 3. fit 3 N. + 15. Rurſus ſi 1 N. addatur ad 3. fit 1 N. + 3.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς, προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως τῶν τριῶν ἐκκειμένων συνδύο συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅ τε τρία καὶ ὁ πέντε, καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως συνδύο συντεθέντες, καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ ἑνὸς καὶ ἐὰν μὲν συντεθῇ μετὰ μο ε̅. γίνεται ϛ εἷς μο ε̅. ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λοιπὸν τουτέστι τὸν γ̅. γίνονται ϛϛ τρεῖς μο ιε̅. πάλιν ἐὰν ϛ εἷς συντεθῇ μετὰ μο γ̅. γίνεται ϛ εἷς μο γ̅. ἐὰν δὲ, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν

λοιπὸν τουτέστι τὸν, ε̄. γίνονται ςς ε̄ μο ιε̄. καὶ ἔτι ἐὰν μο ε̄. συντεθῶσι μετὰ μο γ̄. καὶ γίγνόμεναι μο η̄. πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ς ἕνα. γίνονται ςς η̄. ὅτι μὲν οὖν οὐδέποτε ἔσαι μέγιστος ὁ τῶν ςς γ̄. μο ιε̄ φανερόν. μείζων γὰρ αὐτοῦ ἐστὶν ὁ τῶν ἀριθμῶν ε̄ μο ιε̄. ὁ ἄρα ςς γ̄. μο ιε̄. ἤτοι μέσος ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ὁ δὲ τῶν ςς ε̄ μο ιε̄. ἤτοι μέγιστός ἐστιν, ἢ μέσος. ὁ δὲ τῶν ςς η̄. καὶ μέγιστος, καὶ μέσος, καὶ ἐλάχιστος δύναται τυγχάνειν τῷ ἄδηλον εἶναι τὴν τοῦ ς ὑπόστασιν. τετάχθω οὖν πρῶτον μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς ε̄ μο ιε̄. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςς γ̄ μο ιε̄. μέσος δὲ δηλονότι ὁ τῶν ςς η̄. ἐὰν δὲ ὦσιν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου, καὶ ἔστιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ςς η̄ μονάδες λ̄. ταῦτα ἴσα ςς ις̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δεκαπέντε τετάρτων μονάδος. τοσούτων ἔσαι ὁ ζητούμενος. καὶ ποιῶν τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς ε̄ μο ιε̄. μέσος δὲ ὁ τῶν ςς γ̄ μο ιε̄. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςς η̄. ἐὰν δὲ ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ᾧ ὑπερέχει ὁ μέγιστος τὸν μέσον, τούτῳ ὑπερέχει ὁ μέσος τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχει δὲ ὁ μὲν μέγιστος τὸν μέσον ἀριθμοῖς β̄. ὁ δὲ μέσος τὸν ἐλάχιστον μονάδας ιε̄ λεῖψει ςς ε̄. μονάδες ἄρα ιε̄ λεῖψει ςς ε̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε̄ ἑβδόμων τοσούτων ἔσαι ὁ ζητούμενος· καὶ ποιῶν τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς η̄. μέσος δὲ ὁ τῶν ςς ε̄ μο ιε̄. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ἀριθμῶν γ̄ μονάδων ιε̄. ἐπεὶ οὖν πάλιν ὁ μέγιστος καὶ ἐλάχιστος διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος εἰσὶν ςς ια̅ μονάδες ιε̄. ταῦτα διπλάσια εἰσὶ τοῦ μέσου. ὁ δὲ μέσος ἐστὶ ςς ε̄ μο ιε̄. ςς ἄρα ι̅. μο λ̄. ἴσοι εἰσὶν ςς ια̅ μονάσι ιε̄. ἔσαι ἄρα ὁ ζητούμενος μο ιε̄. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

quod ſi multiplicetur in reliquum, puta in 5. fit 5 N. + 15. Denique ſi 3. & 5. coniungantur, & qui conficitur 8. ducatur in 1 N. fiunt 8 N. Enimvero 3 N. + 15. non eſſe trium productorum maximum liquet, maior enim illo eſt 5 N. + 15. Ergo 3 N. + 15. aut minimus eſt, aut medius. At 5 N. + 15. aut maximus eſt, aut medius, Denique 8 N. & maximus, & medius, & minimus eſſe poteſt, eo quod ignotum ſit quantum valeat 1 N. Ponatur ergo primò maximus 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. medius ſubinde 8 N. Iam ſi tres numeri æqualibus ſe ſuperent interuallis, maximus & minimus coniuncti, duplum ſunt medij. Maximus autem & minimus faciunt 8 N. + 30. Hoc ergo æquale eſt 16 N. & fit 1 N. $\frac{15}{4}$. Tantus eſt quæſitus, & ſatisfacit poſtulatis.

Iam verò ſit maximus quidem 5 N. + 15. ſed medius 3 N. + 15. minimus verò 8 N. Atqui ſi tres numeri æqualibus ſe ſuperent interuallis, quanto maximus medium ſuperat, tanto medius ſuperat minimum. Sed exceſſus maximi ſupra medium eſt 2 N. Medij autem ſupra minimum exceſſus eſt 15 − 5 N. Igitur 15 − 5 N. æquantur 2 N. & fit 1 N. $\frac{15}{7}$. Tantus eſt quæſitus, & quæſtioni ſatisfacit. Denique maximus eſto 8 N. medius autem 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. Quandoquidem rurſus maximus & minimus duplum medij conficiunt, ſed maximus & minimus faciunt 11 N. + 15. hoc duplum eſt medij; medius autem eſt 5 N. + 15. Igitur 10 N. + 30. æquantur 11 N. + 15. Erit ergo quæſitus numerus 15. & implet poſtulata.

IN QVÆSTIONEM XXXXIII.

QVOD hîc aſſumit Diophantus. Si tres numeri fuerunt in arithmetica medietate, ſumma extremorum eſt æqualis duplo medij, demonſtratum eſt propoſitione quinta libri primi poriſmatum.

Cæterùm ex triplici operatione, triplex Canon formari poteſt nimirum.

Diuide duplum producti multiplicationis datorum numerorum, per ſummam eorundem, orietur tertius quæſitus. vel.

Diuide productum multiplicationis per compoſitum ex maiore numero & interuallo numerorum, orietur tertius quæſitus. vel denique.

Diuide productum multiplicationis per id quo duplum minoris numeri excedit maiorem, orietur tertius quæſitus.

Ex hoc autem vltimo Canone manifeſtum eſt requiri vt duplum minoris numeri excedat maiorem. Nec tertia operatio Diophanti abſque tali limitatione locum habere poteſt.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM

LIBER SECVNDVS.

QVÆSTIO I.

INvenire duos numeros, vt ſumma ipſorum, ad ſummam quadratorum ab ipſis ortorum datam habeat rationem. Imperatum ſit ſummam ipſorum ſummæ quadratorum ab ipſis ortorum eſſe decimam partem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. fit ſumma ipſorum 3 N. Summa verò quadratorum ab ipſis ortorum eſt 5 Q. Oportet igitur 3 N. eſſe decimam partem de 5 Q. Quare 30 N. ſunt æquales 5 Q. & fit 1 N. 6. Eſt ergo minor 6. maior 12. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν σύνθεσιν λόγον ἔχῃ δεδομένον. Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν σύνθεσιν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν συνθέσεως εἶναι μέρος δέκατον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^ο ἑνός. ὁ δὲ μείζων ςς^ῶν β. γίνεται ἡ μὲν σύνθεσις αὐτῶν ςς^οι γ. ἡ δὲ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, δυνάμεις ε. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς γ. δέκατον μέρος εἶναι δυνάμεων ε. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ^ο ς. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ο ς. ὁ δὲ μείζων μ^ο ιβ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

In II. Librum Diophanti Commentarij.

IAM animaduerterunt & Scholiaſtes & Xilander quatuor quæſtiones initio libri huius expoſitas, cum quatuor priore libro traditis, in omnibus ferè conuenire, nimirum primam & ſecundam huius cum trigeſima quarta & trigeſima ſeptima primi. At quartam & quintam huius cum trigeſimaquinta & trigeſima ſexta illius. Nec in alio differunt hæ quæſtiones ab illis, niſi quod iſtæ vniuerſalius proponuntur, in illis verò numerorum quæſitorum ratio præſcribitur, ſed operandi modus idem eſt. Itaque vt quod ſentio, liberè dicam, vix adducor vt credam hæc ſcripſiſſe Diophantum, & in re facili tam inani vſum eſſe repetitione. Iudicent alij.

QVÆSTIO II.

INvenire duos numeros, vt interuallum ipſorum, ad interuallum quadratorum ab ipſis ortorum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit interuallum ipſorum, interualli quadratorum ab ipſis, eſſe ſextantem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. & fit interuallum ipſorum 1 N. At interuallum quadratorum ab ipſis ortorum eſt 3 Q. Oportet igitur 1 N. ſextantem eſſe de 3 Q. Quamobrem 6 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχῆς εἶναι μέρος ἕκτον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ος ἑνὸς, ὁ δὲ μείζων ςς^ῶν β. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀριθμὸς εἷς, ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ δυνάμεις γ. δεήσει ἄρα ς^ον ἕνα ἕκτον μέρος εἶναι δυνάμεων γ. ςς^οι ἄρα ς ἴσοι δυνάμεσι τρισί. καὶ

γίνεται ὁ ς° μ° β. ἴσαι ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδος β. ὁ δὲ μείζων μ° δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

æquantur 3 Q. & fit 1 N. 2. Eſt ergo minor 2. maior 4. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς συναμφότερον ἢ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ πρότερον τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τοῦ συναμφοτέρου εἶναι ἐξαπλασίονα. τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ς° ἑνὸς καὶ ςς° β. δύναται δὲ ἔτι προβάλλεσθαι καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν δυνάμεις β. ὁ δὲ συναμφότερος ςς° γ. δεήσει ἄρα δυνάμεις β ἐξαπλασίους εἶναι ςς γ. ἀριθμοὶ ἄρα ιη ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° θ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° θ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ιη. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Ἐὰν δὲ ἐπιταχθῇ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὑπεροχῆς εἶναι ἐξαπλασίονα. ἔσται πάλιν ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεις β. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, ἀριθμοὶ πάλιν ϛ. ἴσοι δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° γ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ϛ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ad ſummam vtriuſque, vel ad interuallum ipſorum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit primo productum multiplicationis, ſummæ ſeſcuplum eſſe. Ponantur quæſiti numeri 1 N. & 2 N. (Cæterùm poſſent etiam in qualibet data ratione poni.) Erit igitur productus ex eorum multiplicatione 2 Q. ſumma verò vtriuſque 3 N. Oportet ergo 2 Q. ſeſcuplos eſſe ad 3 N. Proinde 18. N. æquantur 2 Q. & fit 1 N. 9. Erit ergo primus 9. ſecundus 18. & ſoluunt quæſtionem.

Quod ſi imperatum ſit productum multiplicationis interualli eſſe ſeſcuplum. Erit rurſus productum multiplicationis 2 Q. At interuallum 1 N. Proinde rurſus 6 N. æquabuntur 2 Q. & fiet 1 N. 3. Erit ergo primus 3. ſecundus 6. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM III.

HÆC quæſtio cùm nulla primi libri conuenit, quicquid dicat Scholiaſtes, qui eam reuocat ad trigeſimam & trigeſimam tertiam. Sed quàm meritò, ſola collatione fiet manifeſtum. Cæterùm ſicut hic Diophantus comparat productum ex multiplicatione duorum numerorum, cum eorum ſumma, & eum eorum interuallo, ſic & idem productum comparari poteſt interuallo quadratorum, & ſummæ eorundem. vnde duæ huiuſmodi formabuntur quæſtiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt à quadrato ſemiſſis denominatoris rationis, auferendo vnitatem ſuperſit quadratus.

Eſto ſumma quadratorum ad productum vt 5. ad 2. Ponatur alter numerorum 1 N. alter 1. erit ſumma quadratorum 1 Q. + 1. productum 1 N. Quare 1 Q. + 1. æquatur $\frac{5}{2}$. N. & fit 1 N. vel 2. vel $\frac{1}{2}$. Itaque duo quilibet numeri in ratione dupla ſatisfacient propoſito. Hinc fit Canon.

A quadrato ſemiſſis denominatoris rationis data, aufer vnitatem, reſidui latus adde vel adime eidem ſemiſſi, orietur vtroque modo denominator rationis, in qua duo quilibet ſumpti numeri ſoluunt quæſtionem.

Ceterùm notatu dignum eſt ſummam quadratorum ad productum, eandem ſemper habere rationem, quam habet ad vnitatem ſumma quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuiſione. Quod etiam ſic oſtendetur. Sint latera A B. quorum quadrati E F, productum G. & diuiſo A & B. ſit quotiens C. diuiſoque B per A ſit quotiens D. Dico ambos E F. ſimul ad G. eſſe ſicut ambos C D ſimul ad vnitatem. Etenim quia ducto D in A. & producto B in B fit F, idem F. fiet ducto A in B, & producto G in D. Eodem argumento oſtendemus E fieri ex G in C. Cùm ergo G ductus in ſingulos C D producat ſingulos E F. patet ex ſumma ipſorum C D. in G fieri ſummam ipſorum E F. Quare ex definitione multiplicationis eſt ſumma ipſorum E F. ad G. ſicut ſumma ipſorum C D. ad vnitatem. Quod demonſtrandum erat.

A 2. B. 6.
C $\frac{1}{3}$. D 3.
3. 1. poriſm. E 4. F 36.
G 12.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt quadrato ſemiſſis denominatoris rationis datæ addendo vnitatem, fiat quadratus.

Eſto interuallum quadratorum ad productum, vt 8. ad 3. Ponatur alter Numerorum 1 N. alter 1. erit interuallum quadratorum 1 Q. − 1. At productum 1 N. Quare 1 Q. æquabitur 1 + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. 3. vel ſi 1 N. ſupponatur minor quàm 1. erit interuallum quadratorum 1 − 1 Q. Quare 1. æquabitur 1 Q. + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$ Quare manifeſtum eſt quoslibet numeros in proportione tripla ſoluere quæſtionem, hinc fiet Canon.

Quadrato ſemiſſis denominatoris ratione data adde vnitatem, lateri ſummæ adde vel adime eundem ſemiſſem, vtroque modo innoteſcet denominator rationis, in qua duo quilibet numeri ſumpti ſatisfacient propoſito.

Hic etiam accidit interuallum quadratorum ad productum multiplicationis eandem habere rationem, quam habet ad vnitatem interuallum quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuiſione. Quod ex demonſtratis in præcedente, manifeſtè colligitur.

QVÆSTIO IV.

INvenire duos numeros vt compoſitus ex quadratis ipſorum ad ipſorum numerorum interuallum, datam habeat rationem. Conſtitutum eſto compoſitum ex quadratis ipſorum interualli eſſe decuplum. Ponatur rurſus primus 1 N. ſecundus 2 N. erit igitur compoſitus ex quadratis ipſorum 5 Q. interuallum autem ipſorum eſt 1 N. Oportet ergo 5 Q. decuplos eſſe ad 1 N. Proinde 5. Q. æquantur 10. N. & fit 1 N. 2. erit ergo primus 2. ſecundus 4. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν πρῶτος μὲν ςοῦ ἑνός, ὁ δὲ δεύτερος ςς β̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις ε. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςὸ εἷς. δεήσει ἄρα δυνάμεις ε̄ δεκαπλασίονας εἶναι ςοῦ ἑνός. δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ῑ. καὶ γίνεται ὁ ςὸ μο β̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο β̄. ὁ δὲ δεύτερος μο δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO V.

INvenire duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, ad ſummam ipſorum numerorum, datam habeat rationem. Imperetur vt interuallum quadratorum, ſummæ numerorum ſit ſeſcuplum. Ponantur rurſus quæſiti numeri, hic quidem 1 N. ille vero 2 N. & fit interuallum quadratorum ab ipſis ortorum 3. Q. ſumma verò numerorum 3 N. Proinde 3 Q. æquantur 18. N. & fit 1 N. 6. & euidens eſt demonſtratio.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. καὶ πάλιν τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ὃς μὲν ςοῦ ἑνὸς, ὃς δὲ ςς β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις γ̄. συναμφότερος δὲ ςςοὶ γ̄. δεήσει ἄρα δυνάμεις γ̄. ἑξαπλασίονας εἶναι ςς γ̄. δυνάμεις ἄρα τρεῖς ἴσαι εἰσὶ ἀριθμοῖς ιη̄. καὶ γίνεται ὁ ςὸ μο ς̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

QVÆSTIO VI.

INvenire duos numeros, dato eorum interuallo, vt interuallum qua-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ δοθείσῃ, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν

τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι, συναμφοτέρου αὐτῆς τε τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τοῦ διδομένου. τῆς ἀπ' αὐτῶν πρὸς τὴν αὐτῶν ὑπεροχήν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδων β̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ϛ° ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ° ἑνὸς μ° β̄. καὶ μένει ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β̄. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ ϛοὶ δ̄ μ° δ̄. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ̄ μ° δ̄. ὑπερέχειν μονάδων β̄ μονάσιν κ̄. ὥστε ἀριθμοὶ δ̄ μονάδες δ̄ ἴσοι εἰσὶ μονάσι κβ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ° μ° δ̄ καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ° δ̄ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μείζων ϛ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

dratorum ab ipſis ortorum, interuallum ipſorum ſuperet dato numero. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem eſſe compoſito tum ex ipſomet interuallo, tum ex dato numero quo quadratorum interuallum ſuperat ipſum numerorum interuallum. Imperetur vt interuallum numerorum ſit 2. Interuallum autem quadratorum ſuperet interuallum numerorum vnitatibus 20. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 1 N. + 2. & manet interuallum ipſorum 2. interuallum autem quadratorum eſt 4 N. + 4. Oportet igitur 4 N. + 4. ſuperare vnitates 2. vnitatibus 20. Quamobrem 4 N. + 4. æquantur 22. & fit 1 N. 4 $\frac{1}{2}$. Erit igitur minor 4 $\frac{1}{2}$. maior 6 $\frac{1}{2}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM VI.

HÆc quæſtio verbis paulum immutatis eadem eſt cum tertia illarum, quas ad trigeſimam tertiam primi ſumus commenti. Nam verbi gratia quærere duos numeros quorum interuallum ſit 2. & interuallum quadratorum ſuperet ipſum 2. numero 20. nil aliud eſt quàm velle vt interuallum numerorum ſit 2. interuallum verò quadratorum 22. Itaque conditio ibi appoſita eadem eſt cum illa quam hîc præſcribit Diophantus, nimirum. *Quadratus interualli numerorum debet eſſe minor interuallo quadratorum*, cuius Theorematis ſi quis peculiarem requirat demonſtrationem, eam afferre non pigebit. Sint dati numeri A B. B C. quorum interuallum A D. ita vt D B. B C. ſint æquales. Dico quadratum ipſius A D minorem eſſe interuallo quadratorum ab ipſis A B. B C. etenim

4. ſecundi. A . . D . . . B . . . C [a] Quadratus A B eſt æqualis quadratis partium A D. D B. & duplo plani ſub ipſis. Igitur interuallum quo quadratus ab A B ſuperat quadratum abs D B ſeu abs B C eſt æquale quadrato ipſius A D. & duplo producti ex A D. in D B. Quare interuallum quadratorum ſuperat quadratum interualli numerorum, duplo producti ex minore numero in ipſum interuallum numerorum. Quod erat propoſitum. Sic contra ſi interuallo quadratorum addatur quadratus interualli numerorum, fiet duplum producti ex maiore numero in idem interuallum numerorum. Nam ſi quadrato ipſius A D. & duplo producti ex A D in D B. addatur rurſus quadratus ipſius A D. erit totum compoſitum æquale duplo quadrati ex A D, & duplo producti ex A D in D B, hoc eſt duplo producti ex A B. maiore numero in A D interuallum numerorum. Quod erat propoſitum. Quamuis itaque Canones allati ad tertiam illarum quas attulimus ad trigeſimam tertiam primi, ſint faciles & expediti, ex hoc tamen Theoremate alium colligemus Canonem, ſane non inelegantem.

Interuallo quadratorum adde vel adime quadratum interualli numerorum, ſummam & reſiduum diuide per interuallum numerorum, quotientes erunt dupli quæſitorum numerorum.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν δοθέντι ἀριθμῷ μείζων ᾖ καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. τετάχθω τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι τριπλασίονα, καὶ ἔτι ὑπερέχειν μονάδας ῑ. δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου τοῦ τε τριπλασίονος τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τῶν δοθεισῶν μονάδων ῑ. τετάχθω ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β̄. ὁ δὲ ἐλάσσων

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipſis, dato numero ſuperet interuallum numerorum, & ſic ad illum in data ratione. Conſtitutum ſit interuallum quadratorum, interualli numerorum eſſe triplum, & ſuperaddere adhuc vnitates 10. Oportet autem quadratum interualli numerorum, minorem eſſe compoſito ex triplo ſui ipſius, & ex datis vnitatibus 10. Ponatur

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos eſſe ad 2. & adhuc ſuperaddere 10. Ter igitur 2. adſcitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς ἑνὸς μο β. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μονάδας δ τριπλασίονας εἶναι μο β. καὶ ἔτι ὑπερέχειν μο ι. τρὶς ἄρα μονάδες β μετὰ μο ι. ἴσαι εἰσὶν ςς δ μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο γ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο γ. ὁ δὲ μείζων μο ε. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appoſitæ eadem ratio eſt quæ & appoſitæ præcedenti quæſtioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum ſit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifeſtum eſt.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum ſit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales eſſe quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipſius 16. eſto à 2 N. − 4. ipſe igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à ſimilibus auferantur ſimilia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriuſque ſumma eſt $\frac{400}{25}$ ſeu 16. & vterque quadratus eſt.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ις μο πλευρά. ἔστω ςς β λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ις λείψει ςς ις. ταῦτα ἴσα μονάσι ις λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνς εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum poteſtatem in duos eiuſdem nominis fas eſt diuidere cuius rei demonſtrationem mirabilem ſane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rurſus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot conſtat latus diuidendi. Eſto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque ſimul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ς ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ςς ὅσων δήποτε λείψει μο ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ςς β λείψει μο δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ μο ις λείψει ςς ις. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μο ις. δυνάμεις ἄρα ε μο ις λείψει ςς ις ἴσαι μο ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πέμπτων.

ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ιϛ πέμπτων. αὐτὸς ἄρα σνϛ εἰκοστοπέμπτων. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰ ιβ πέμπτων· αὐτὸς ἄρα ἔσται ρμδ εἰκ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ergo primi latus $\frac{16}{5}$ Atque ipſe quadratus $\frac{256}{25}$. ſecundi latus vero erit $\frac{12}{5}$. Atque ipſe quadratus $\frac{144}{25}$. & manifeſta eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM VIII. & IX.

PARVM aut nil differunt hæ duæ quæſtiones, cùm idem quærant, & eodem prorſus operandi modo. Quare vnica indigent explicatione. Operatio eſt ſubtilis & Diophanti propria, qua in ſequentibus pulcherrima & difficillima perficit problemata, & ab alio ante ipſum nunquam excogitata. Proinde tyronibus hic omni ope laborandum eſt, vt methodum iſtam fingendorum laterum perfectè comprehendant, illique aſſueſcant. Cùm igitur Diophantus æquare velit quadrato 16 − 1 Q. id tali artificio peragit vt æquatione ritè præparata, tandem inter duas ſpecies proximas æqualitas conſiſtat, ſic enim cum nulla opus ſit radicis extractione, ſed ſola diuiſione inueniatur valor Numeri, patet ſolutionem contingere rationalem. Et hoc vnum voluiſſe Diophantum præter quàm quod res ipſa clamat, ipſemet diſertis verbis teſtatur quæſtione vndecima infra, vbi cum de fingendo latere quadrati præceptum dediſſet, ſubiicit, *Sic enim vna ſpecie vni ſpeciei æquali remanente, expedietur quæſtio.* Quod rurſus iiſdem ferè verbis repetit quæſtione duodecima & decima tertia. Hic itaque vt æquatio ritè procedat, tria ſunt obſeruanda.

Primò vt in latere fictitij quadrati ponatur vnitatum numerus æqualis lateri quadrati diuidendi in duos quadratos, ita Diophantus fingit hoc latus 2 N. − 4. Quod fit idcirco, quia ſic neceſſe eſt in quadrato fictitio reperiri vnitates æquales ipſi quadrato diuidendo, nimirum 16. cùm lex multiplicationis requirat vt ex − 4. in − 4. fiant 16. Quare cùm idem vnitatum numerus ſit etiam in altera æquationis parte, puta in 16 − Q. euidens eſt auferendo ſimilia à ſimilibus, vnitates omnino tolli ab vtraque parte, & æqualitatem conſiſtere inter proximas duas ſpecies, Quadratos ſcilicet & Numeros.

Secundò neceſſe eſt vt vnitates quæ ponuntur in fictitio latere, adiunctum habeant ſignum defectus, ſic Diophantus ponit huiuſmodi latus 2 N. − 4. & ratio eſt quia ſi poneretur 2 N. + 4. nulla quadrati pars adiunctum haberet ſignum defectus, eſſet enim quadratus 4 Q. + 16 N. + 16. Quare cùm in altera æquationis parte ſint vnitates cum defectu quadratorum, nempe 16 − 1 Q. ablatis vtrimque vnitatibus 16. vt ſupra dictum eſt, & addendo defectum vtrinque, nempe 1 Q. remanerent 5 Q. + 16. N. æquales nihilo. Vt igitur Numeri deficiant neceſſe fuit ponere latus quadrati cum defectu vnitatum, puta 2 N. − 4. ſic enim fit quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. Quare ablatis vtrimque vnitatibus 16. & addendo vtrimque 1 Q. tum 16 N. remanent hinc 5. Q. inde 16. N. inter ſe æquales. Denique multitudo Numerorum qui ponuntur in latere fictitio, debet eſſe maior vel minor vnitate. Nam ſi ponatur vnitas, orietur valor Numeri æqualis lateri ipſius quadrati diuidendi, & reſoluendo hypoſtaſes, ipſum latus fictitium, reperietur nihil. Ita ſi ponas in exemplo Diophanti, latus fictitium 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q − 8 N. + 16 æquandus 16 − 1 Q. Quare auferendo ſimilia à ſimilibus, & ſupplendo defectus, remanent 2 Q. æquales 8 N. & fit 1 N. 4. Quare latus quod poſitum erat 1 N. − 4. erit 4 − 4. ſeu nihilum. Cur autem id contingat, ratio eſt euidens. Nam numerus quadratorum qui in æquatione remanet, ſemper æqualis eſt quadrato Numerorum qui ponuntur in latere ficto, adſcita vnitate, quare cùm in latere ficto ponetur 1 N. numerus quadratorum qui manent in æquatione, erit 2. Q. At multitudo Numerorum cui æquantur 2 Q. eſt duplum lateris quadrati diuidendi, quia ſcilicet fit ex ductu 1 N. in dictum latus bis. Verbi gratia in dato exemplo 2 Q. æquantur 8 N. Quare cùm duplum lateris, puta 8. diuidetur per 2. neceſſe erit oriri ipſum latus 4 pro valore Numeri. Quod erat propoſitum.

His ſanè probè intellectis totum Diophanti artificium percipietur. Sed abundantioris doctrinæ gratia libet aduertere, eandem ſolutionem contingere, quamuis dupliciter inſtituatur poſitio ſecundi lateris, nimirum, ſiue ponatur in eo quælibet multitudo Numerorum maior ea quæ poſita eſt in primo latere, ſiue alia minor, ita tamen vt inter harum vtramque, illa ſit media proportionalis. Verbi gratia in exemplo Diophanti, ſiue ponas latus fictitium 2 N. − 4. ſiue $\frac{1}{2}$ N. − 4. eadem continget ſolutio, fiet enim vtrobique 1 N. $\frac{16}{5}$ Quia ſcilicet 1 N. eſt medius proportionalis inter 2 N. & $\frac{1}{2}$ N. & ſic de aliis. Cuius ſymptomatis cauſa pendet ab huiuſmodi Theoremate.

Si fuerint tres numeri proportionales, vt ſe habet aggregatum quadratorum à duobus primis ad primum, ita & aggregatum quadratorum à duobus poſtremis ad poſtremum.

D 16. E 36. G. 81.
A 4. B 6. C 9.

Sint tres proportionales A. B. C. quorum quadrati D E G. Dico eſſe D E ſimul ad A, ſicut E G ſimul ad C. [1] Quia enim D ad E eſt in duplicata ratione lateris A. ad latus B [2] ſed & A ad C eſt duplicata ratio rationis A ad B, erit D ad E ſicut A ad C. eodem argumento oſtendetur eſſe E ad G vt A ad C. Quare eſt D ad E vt E ad G. & conuertendo G ad E vt E ad D. Quia verò eſt D ad E vt A ad C [1] eſt & viciſſim D ad A vt E

11 octaui.
10. defin. 5.
13. ſeptimi.

C. Itaque cùm ſit E ad D vt G. ad E erunt componendo D E ſimul ad D, ſicut E G ſimul ad E, ſed vt D ad A, ſic E ad C. vt oſtenſum eſt iam. [a] Igitur ex æquo vt D E ſimul ad A, ſic E G ſimul ad C. Quod erat propoſitum. 14. ſeptimi.

Hoc poſito eſto B numerus Numerorum primi lateris, medius proportionalis inter A & C. dico A $\frac{1}{4}$ N − D 4. B 1 N. C 2 N − D 4. ſiue A ponatur numerus Numerorum ſecundi lateris, ſiue C. eandem contingere ſolutionem. Sit enim D latus quadrati diuidendi in duos quadratos. Igitur A − D erit ſecundum latus, [b] cuius quadratus conſtabit ex quadratis ipſorum A & D. minus duplo producti ex A in D. cui addendo quadratum ex B. totum compoſitum æquabitur quadrato diuidendo abs D. Quare auferendo vtrimque quadratum abs D, & transferendo defectum in alteram æquationis partem, manent quadrati ex A & B ſimul æquales duplo producti ex A in D. vnde fit valor Numeri diuidendo duplum producti ex A in D per aggregatum quadratorum ab, A & B. ſimiliter oſtendemus ſi ſecundum latus ſtatuatur C − D valorem Numeri haberi diuidendo duplum producti ex C in D per aggregatum quadratorum abs B & C. Cum ergo per præcedens Theorema ſit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad A. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad C. ac proinde per eundem duplum ipſius D multiplicando conſequentes, [c] ſit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad duplum producti ex A in D. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad duplum producti ex C in D. patet diuiſo ſeorſim duplo producti ex A in D per aggregatum quadratorum abs A & B, & duplo producti ex B in C per aggregatum quadratorum abs B & C. fieri ob æqualitatem proportionis, eundem quotientem vtrobique, atque ideo eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quod demonſtrandum erat. 4. ſecundi. Schol. 22. ſ

Aduertendum præterea primi quadrati latus poni poſſe quemlibet Numerorum numerum, dum in ſecundi latere ponatur maior vel minor Numerorum numerus, verbi gratia ponatur primi latus 3 N. erit quadratus 9 Q. Igitur ſecundus quadratus erit 16 − 9 Q. cuius latus fingatur 2 N. − 4. fiet quadratus 4 Q. − 16 N. + 16, æqualis 16 − 9 Q. & tandem 13 Q. æquabuntur 16 N. & fiet 1 N. $\frac{16}{13}$ erit igitur primum latus $\frac{48}{13}$ ſecundum $\frac{20}{13}$ quorum quadrati $\frac{2304}{169}$ & $\frac{400}{169}$ quorum ſumma $\frac{2704}{169}$ ſeu 16. vbi accidit (quod animaduerſione dignum eſt) reſoluendo hypoſtaſim ſecundi lateris illud reperiri non 2 N. − 4. ſed 4 − 2 N. Manet tamen eadem æquatio, & res æquè bene ſuccedit, quia quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. cum quo æqualitas inſtituitur, habere poteſt duplex latus, nimirum 2 N. − 4. vel 4 − 2 N. nec intereſt à quo illorum effingi concipiatur. Quod ſemel monuiſſe ſufficiat, ne cui ſcrupulum moueat quotieſcunque deinceps ſimile quid continget. Sanè Franciſcus Vieta in tali caſu defectum ſub ambiguitate relinquens tali nota vteretur ad eum ſignificandum 2 N. − 4. Indicans ſcilicet ob indeterminationem Numeri qui talis eſſe poteſt vt 2 N. nunc maiores ſint quàm 4. nunc minores, latus illud poni vel 2 N − 4. vel 4 − 2 N. prout valor Numeri commodiùs poſitionibus applicari poterit.

Cæterùm ex operatione Diophanti nullo negotio Canon erui poteſt. Sed omnium facillimus ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas, elicitur ex propoſitione tertia libri tertii poriſmatum. nimirum Canon.

Dati quadrati latus diuide in duos numeros planos ſimiles, horum interuallum, & duplum medij proportionalis inter eos cadentis, latera exhibent quæſitorum quadratorum.

Vt ſi datus ſit quadratus 16. diuide latus eius 4. in planos duos ſimiles, habentes ſcilicet rationem quam 4 ad 1. quod fiet per Canonem ſecundæ primi, eruntque $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$ quorum interuallum $\frac{12}{5}$ Quare latera quæſitorum quadratorum ſunt $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Si autem 4. diuidatur rurſus in alios duos planos ſimiles ſeruantes aliam proportionem, alia reperietur ſolutio, vt ſi diuidatur in duas partes ſeruantes rationem quam habent 4. ad 9. erunt hæ $\frac{16}{13}$ & $\frac{36}{13}$ quarum interuallum, & duplum medij proportionalis ſunt $\frac{20}{13}$ & $\frac{48}{13}$ latera ſcilicet quæſitorum quadratorum. Attamen, ne quid tyrones fallat, aduertendum eſt fieri poſſe, vt idem numerus bis diuidatur in duos planos ſimiles, nec tamen per geminam illam diuiſionem quadratus illius bis componatur ex duobus quadratis. Quod accidit quotieſcunque partium prioris diuiſionis interuallum æquatur duplo medij proportionalis cadentis inter partes poſterioris diuiſionis, & è conuerſo. Vnde neceſſe eſt per vtranque diuiſionem eadem quadratorum latera reperiri, non autem diuerſa. Verbi gratia, ſi idem 4. diuidatur in planos ſimiles $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ quorum ratio eſt quæ 1 ad 9. ſunt hi diuerſi à iam expoſitis $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Attamen quia eorum interuallum $\frac{16}{5}$ idem eſt cum duplo medij qui cadit inter $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. & è conuerſo interuallum ipſorum $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$ idem eſt cum duplo medij qui cadit inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ nimirum $\frac{12}{5}$ patet per vtramque diuiſionem eadem reperiri latera $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Vt autem hæc ex altiori principio repetantur, id huiuſmodi planis ſimilibus accidit, quia illi ſunt in ratione quadratorum 1 & 9. iſti verò in ratione quadratorum 1. & 4. at priorum latera æquantur ſummæ laterum poſteriorum & eorum interuallo, etenim poſteriorum latera ſunt 1. & 2. quorum ſumma & interuallum, nimirum 3. & 1. conficiunt latera priorum. Hanc porrò eſſe veram ſymptomatis huius cauſam more noſtro libet demonſtrare.

Sunto quadrati A C. quorum latera G H. itemque quadrati D F quorum latera K L, ita vt ipſorum K L ſumma ſit æqualis ipſi G, & eorumdem K L interuallum ſit æquale ipſi H. Tunc ducatur

idem numerus M in ipſos A C, vt fiant plani ſimiles Q S. itemque ducatur idem N. in ipſos D F. vt fiant plani ſimiles T X. ita tamen vt amborum Q. S. ſumma ſit æqualis ſummæ amborum T. X. & ipſorum Q. S. medius proportionalis eſto R, interuallum verò Y. Ipſorum quoque T X medius proportionalis eſto V, interuallum Z. dico tam Z ipſius R. quàm viciſſim Y ipſius V duplum eſſe.
3. 2. poriſm. Sumantur enim & ipſorum A C. & D F medij proportionales B E, & eorumdem interualla O P. [1] Quo-
21. octaui. niam igitur quadratorum D F interuallum P fit ex ſum-
7. 2. poriſm. ma laterum K L in eorundem interuallum, fiet P ex G in H ex hypotheſi, at [2] ex G in H fit etiam B. igitur B P. ſunt æquales. [3] At verò quadrati A C, ſimul quadratorum D F. ſimul dupli ſunt, & ex M
19. ſeptimi. in ipſos A C fiunt Q S. ex N autem in ipſos D F fiunt T X, cùm ergo ſumma duorum Q S. ſit æqualis ſummæ amborum T X. patet ex M in ſummam ipſorum A C fieri eundem numerum qui fit ex N. in ſummam ipſorum D F. Igitur [4] eſt vt ſumma ipſorum A C ad ſummam ipſorum D F, ita N. ad M.
17. ſeptimi. Quare & N. duplus eſt ipſius M. Rurſus cum ex M in ipſos A C. fiant Q S. patet etiam ex M. in ipſos B. O. fieri R Y. ſimiliterque ex N in ipſos E P. fieri V. Z. Quoniam itaque ex N in P fit Z, & ex
23. 2. poriſ. M in B fit R. & B. P. oſtenſi ſunt æquales, patet ex eodem numero in ipſos N M. fieri ipſos Z R. [5] Quamobrem eſt Z ad R ſicut N ad M. ac proinde Z eſt duplus ipſius R. Quod erat oſtendendum.

		M 5.	O 8.		Y 40.		
G 3.	H 1.	A 9. B 3.	C 1.	Q 45.	R 15.	S 5.	
K 2.	L 1.	D 4. E 2.	F 1.	T 40.	V 20,	X 10.	
		N 10.	P 3.		Z 30.		

23. 1. poriſ. Deinde cum ſumma ipſorum G H conſtet ex ſumma ipſorum K L & eorum interuallo, [6] erit ſum-
3. 2. poriſm. ma ipſorum G H dupla ipſius K. & quia interuallum eorundem G H fit ex ſumma ipſorum K L multata eorundem interuallo. [7] erit interuallum ipſorum G H duplum ipſius L. Quare productus ex ſumma ipſorum G H in eorundem interuallum, [8] nimirum O æquabitur producto ex duplo K in duplum L, ſeu quadruplo producti ex K in L. Igitur O quadruplus eſt ipſius E. Proinde productus ex N in O quadruplus erit producti ex N in E ſeu ipſius V. ſed quia N eſt duplus ipſius M. idem productus ex N in O duplus eſt producti ex M in O ſeu ipſius Y. Igitur Y. duplus eſt ipſius V. Quod demonſtrandum erat. Itaque ex omni parte conſtat propoſitum.

Hinc euidens eſt cur etiam cum Diophanto poſitionibus diuerſimodè inſtitutis, eadem tamen nonnunquam ſolutio contingat, ſi enim primò ſtatuantur numeri Numerorum vtriuſque lateris quales ſunt K L. & ſecundò ſtatuantur iidem numeri Numerorum quales ſunt G H. eadem per vtramque poſitionem inuenietur ſolutio. Nam ſi ponas cum Diophanto latus vnum 1 N, aliud verò 2 N − 4. fiunt latera quæſitorum quadratorum $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ſi autem rurſus ponas latum vnum 1 N. aliud verò 3 N − 4. fient rurſus eadem quadratorum latera $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ Eadem de cauſa ſi prima vice ponas numeros Numerorum 2. & 3. ſecunda vice 1 & 5. non contingit ſolutio diuerſa, quia ſcilicet ipſorum 2 & 3. ſumma & interuallum conficiunt ipſos 5 & 1. & ſic de aliis. Denique ex dictis melius & vniverſalius quàm modo à Xilandro tradito, licebit cognoſcere an propoſitus quadratus componatur ex duobus quadratis integris, immò & quoties in duos integros quadratos diuidi poſſit, reſpiciendo ſcilicet an latus eius è duobus planis ſimilibus integris componatur, & quoties ex planis ſimilibus integris & diuerſis componatur, adhibita tamen cautione ne duorum ex iis planis ſimilibus interuallum æquale ſit duplo medij proportionalis inter alios duos cadentis. Hac arte inuenies quadratum lateris 65. quater componi ex duobus quadratis integris, quia ſcilicet ipſe 65. quater componitur è duobus planis ſimilibus integris, nimirum ex 1 & 64. & 13. & 52. ex 16. & 49. & denique ex 20. & 45. Itaque per Canonem ſuprà traditum inuenies latera quadratorum, ex quibus quadratus ipſius 65. componitur, videlicet 63. & 16. vel 39. & 52. vel 33. & 56. vel demum 25. & 60. Sed de his ſatis.

QVÆSTIO X.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ὃς σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, μεταδιελεῖν εἰς δύο ἑτέρους τετραγώνους. ἔστω τὸν ιγ̄ συγκείμενον ἔκ τε τοῦ δ̄. καὶ θ̄ τετραγώνων. μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους. εἰλήφθωσαν τῶν προειρημένων τετραγώνων αἱ πλευραὶ μονάδες β̄ μονάδες γ̄. καὶ τετάχθωσαν αἱ τῶν ἐπιζητουμένων τετραγώνων πλευραί, ἡ μὲν ς̄ ἑνὸς μ̊ β̄. ἡ δὲ ς̄ ὅσων δήποτε, λεῖψει μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ λοιποῦ πλευρὰ γ̄. ἔστω ς̄ β̄ λεῖψει μ̊ γ̄. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς ς̄ δ̄. μ̊ δ̄. ὃς δὲ δυνάμεων δ̄ μ̊, θ̄. λοιπὸν ἐστὶ τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μο-.

Datvm numerum qui ex duobus componitur quadratis, in alios quadratos partiri. Numerum 13. compoſitum ex quadratis 4. & 9. diuidere oporteat in alios duos quadratos. Sumantur latera prædictorum quadratorum 2. & 3. & ponantur quæſitorum quadratorum latera: hoc quidem 1 N. + 2. Illud verò numerorum quotcunque, cum defectu tot vnitatum quot continet latus alterius quadrati, puta 3. & eſto 2 N. − 3. & fiunt quadrati, ille quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Hic verò 4 Q. + 9. − 12 N.

Reſtat

Reſtat vt ambo ſimul iuncti conficiant vnitates 13. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 5 Q. + 13. − 8 N. Hoc ergo æquatur 13. & fit 1 N. $\frac{8}{5}$. Ad Poſitiones. Poſueram prioris latus 1 N. + 2. erit ergo $\frac{18}{5}$. ſtatueram autem poſterioris latus 2 N. − 3. erit vtique $\frac{1}{5}$. Ipſi ergo quadrati erunt, ille quidem $\frac{324}{25}$. Hinc autem $\frac{1}{25}$. Et ambo ſimul faciunt $\frac{325}{25}$ ſeu imperatas vnitates 13.

νάδας ιγ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι δυνάμεις ε̄ μονάδας ιγ̄ λείψει ἀριθμῶν η̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ιγ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος η ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔταξα τὴν τοῦ πρώτου πλευρὰν ς^ου ἑνὸς μ^ο β̄ ἔσται, ιη ε. τὴν δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰν ςς β̄ λείψει μ^ο γ̄ ἔσται ἑνὸς πέμπτου. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται. ὃς μὲν τκδ κε. ὃς δὲ ἑνὸς εἰκοστοπέμπτου, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι τκε κε ἃ συνάγει τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας δεκατρεῖς.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm verò numerum ex duobus cubis compoſitum diuidere poterimus in alios duos cubos? Hac quæſtio difficilis ſanè nec Bacheto aut Vieta cognita fortaſſe nec ipſi Diophanto; eius tamen ſolutionem dedimus infra in notatis ad quæſtionem ſecundam lib. 4.

IN QVAESTIONEM X.

PVLCHERRIMVM eſt hoc problema, & eiuſdem naturæ cum præcedente, cuius magnus eſt vſus in ſequentibus, præſertim libro quinto. Sed circa operationem Diophanti multa ſunt obſeruanda, quæ Scholiaſtes & Xilander, vel non viderunt omnino, vel imperfectè tractarunt.

Primò obſeruandum ne in vtroque latere fictitio idem ſtatuatur Numerorum numerus, alioquin non inuenientur diuerſa quadratorum quæſitorum latera à datis iam lateribus, ſed eadem prorſus, & inutilis erit operatio. Ita in exemplo Diophanti ſi ponas fictitia latera 1 N. − 2. & 1 N. − 3. vel rurſus 1 N. + 2. & 1 N. − 3. inuenies per vtramque poſitionem eadem latera 2. & 3. quæ iam data ſunt, & nihil actum erit. Quod vt ſua demonſtratione fulciatur ſunto B C. latera data quadratorum, quorum ſumma K. & ponatur A certus Numerorum numerus in vtroque latere fictitio, ita vt alterum ſit A − B, alterum A − C. duplum autem quadrati abs A eſto D. & duplum producti ex K in A eſto E. patet diuiſo E per D. oriri valorem Numeri. Nam ducere B in A, & C in A idem eſt atque ducere ſummam ipſorum B C. nempe K in A. Quare duplum productum ex B in A, & ex C in A, æquatur duplo producti ex K in A, puta ipſi E. Quamobrem E eſt numerus Numerorum qui reperiuntur in aggregato quadratorum à fictitiis lateribus A − B & A − C. Atqui D eſt numerus Quadratorum qui ſunt in eodem aggregato. Proinde diuiſo E per D fit valor Numeri. Itaque quia duplum A in ipſum A ductum facit D, & duplum A in K facit E, erit D ad E ſicut A ad K. Quare diuiſo K per A prodibit idem valor Numeri qui oſtenſus eſt prodire diuiſo E per D. Proinde cùm reſoluendo hypoſtaſes, ducetur valor Numeri in A, fiet K, à quo auferendo B reſtabit vtique C, & auferendo C, reſtabit B. Igitur latus A − B idem erit quod ipſe C, & latus A − C idem erit quod B. Quod erat demonſtrandum.

K 5.
A 6 N. − B 2. A 6 N. − C 3.
D 72 Q. E 60 N.

Deinde ponatur vnum latus A + B. alterum A − C. & ſit K interuallum ipſorum B C ſit autem D vt prius duplum quadrati A. ſed E. ſit duplum producti ex A in K. Patet ob ſigni diuerſitatem, haberi numerum Numerorum contentorum in aggregato quadratorum qui fiunt à fictitiis lateribus, ſi à duplo producti ex A in C, auferatur duplum producti ex A in B. hoc autem idem eſt atque ducere duplum A in interuallum ipſorum B C. ſeu in K. Igitur E eſt ille numerus Numerorum. Itaque cùm D ſit numerus quadratorum in eodem aggregato contentorum, diuiſo E per D. orietur valor numeri. Quia ergo ducendo duplum A in A fit D, & ducendo idem duplum A in K fit E, erit A ad K vt D ad E. Proinde diuiſo K per A orietur item valor Numeri, & reſoluendo hypoſtaſes cùm A ducetur in valorem Numeri fiet K Quamobrem A + B æquabitur ipſi C. & A − C hoc eſt C − A æquabitur ipſi B. Quod erat propoſitum.

K 1
A 6 N. + B 2 A 6 N. − C 3.
D 72 Q. E 12 N.

Aduertendum ſecundò ad hoc vt æquatio procedat, in lateribus fictitiis ponendum eſſe latus vtrumque datorum cum ſigno defectus, vel ſaltem alterum, ita vt in aggregato quadratorum fictitiorum numerus Numerorum reperiatur cum ſigno defectus, ac proinde tranſeat in alteram æquationis partem, & maneant Numeri æquales quadratis. Quare tutiſſimus omnium modus fingendi latera quadratorum eſt, cùm in vtroque ponuntur data latera cum ſigno defectus, & tunc nulla

cautio adhibenda eſt, præter eam qua tradita eſt aduertendo primo vt ſcilicet numeri Numerorum ſint diuerſi , & eam de qua agetur aduertendo vltimo. Ita ſi ponas latera 1. N. — & 2. N. — 3. fiet 1 N. $\frac{14}{1}$ & latera quæſita erunt $\frac{11}{3}$ & $\frac{12}{3}$. & ſic aliis infinitis modis variari poſitiones poterunt, & variæ contingent ſolutiones, prout varij ponentur Numerorum numeri, qui tamen non ſint prius poſitis proportionales , alioquin ſi proportionales ſint eandem exhibebunt ſolutionem, vt facile eſt demonſtrare. Quod ſi alterum tantum datorum laterum ſtatuatur cum ſigno minoris , alterum verò cum ſigno pluris, dupliciter id accedere poteſt, quia vel minus latus afficitur ſigno — vel maius latus. Itaque.

Aduertendum tertiò , cùm minus datorum laterum afficitur ſigno — maius verò ſigno +. Neceſſe eſſe vt numerus Numerorum appoſitus minori ad numerum Numerorum appoſitum maiori maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Quare in hoc caſu ſi ponatur verbi gratia alterum latus 1 N. + 3. ponendum erit alterum 2 N. — 2 vel 3 N. — 2. & ſic in infinitum , ita vt numerus Numerorum ſecundi lateris excedat 1 $\frac{1}{2}$ qui ad vnitatem ſeu ad numerum Numerorum primi lateris eandem habet rationem quàm 3. ad 2. Huius rei cauſa euidens eſt , quia oportet , vt dictum eſt, in aggregato quadratorum fictitiorum numerum Numerorum eſſe cum ſigno —. Quare in hoc caſu oportet duplum producti ex minore datorum laterum in Numeros ſibi appoſitos , ſuperare duplum producti ex maiore in Numeros ſibi adiunctos , quod patet fieri non poſſe niſi obſeruetur quod traditum eſt.

Aduertendum quartò cùm maius latus datorum afficitur ſigno , — minus verò ſigno + tunc neceſſe eſſe vt numerus Numerorum appoſitus maiori ad appoſitum minori lateri , maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Ita ſi ponatur alterum latus 1 N. — 3. ſtatuendum erit alterum 1$\frac{1}{3}$ N. + 2. vel 1$\frac{1}{4}$ N. + 2. & ſic in infinitum , ponendo in ſecundo latere quemlibet numerum Numerorum minorem quàm 1$\frac{1}{2}$. vel ſi ſecundum latus ſtatuatur 1 N. + 2. ſtatuendum erit primum 2. N. — 3. vel 4. N. — 3. & ſic in infinitum ponendo in primo latere quemlibet numerum Numerorum maiorem quàm 1$\frac{1}{2}$. Quod obſeruari oportet ob cauſam in præcedente aduertendo allatam. Ita poſſunt hæc duo præcepta in vnicum contrahi , nimirum. Cùm in vno latere fictitio ponitur alterum laterum datorum cum ſigno, — alterum verò ponitur in altero latere fictitio cum ſigno. — Oportet vt numerus Numerorum qui afficitur ſigno — ad eum qui afficitur ſigno + maiorem rationem habeat , ratione datorum laterum.

Aduertendum poſtremò , cùm maius datorum laterum afficitur ſigno — & minus ſigno + tunc cauendum eſſe , ne numerus Numerorum maiori appoſitus , ad appoſitum minori eandem rationem habeat , quam habet ſumma datorum laterum ad eorundem interuallum ; alioquin idem ſequetur abſurdum quod in primo aduertendo ſequi oſtenſum eſt , reperientur ſcilicet eadem latera quæ data ſunt , & nihil effectum erit. Verbi gratia ſi ponas alterum latus 5 N. — 3. alterum 1 N. + 2. quia 5 N. ad 1 N. ſe habet ſicut ſumma ipſorum 3. & 2. ad eorundem interuallum inuenies tandem 5 N. — 3. nil aliud eſſe quàm 2. & 1 N. + 2 eſſe idem quod 3. Huius ſymptomatis cauſa ex huiuſmodi Theoremate pendet.

Datis quatuor numeris , quorum primus ad ſecundum ſit vt ſumma tertij & quarti , ad exceſſum tertij ſuprà quartum : erit aggregatum quadratorum primi & ſecundi , ad productum ex primo in tertium multatum producto ex ſecundo in quartum : Sicut primus ad ſemiſſem ſumma tertij & quarti , vel ſicut ſecundus ad ſemiſſem interualli eorundem.

		F 5.
A 15.	C 6.	
		E 2.
B 3.	D 4.	G 1.
H 234.		K 78.
L 225.		R 75.
M 9.		P 3.

Sint dati quatuor numeri A B C D. & ipſorum C D interuallum ſit E cuius ſemiſſis G. & eorundem C D ſummæ ſemiſſis ſit F. & aggregatum quadratorum ab A & B ſit H. productum autem ex A in C multatum producto ex B in D eſto K. & ponatur eſſe A ad B ſicut ſumma duorum C D ad eorundem interuallum E, hoc eſt ſicut F ad G. dico eſſe ſicut H ad K. ſic A ad F vel B ad G. Quia enim eſt A ad B ſicut F ad G, erit viciſſim A ad F ſicut B ad G. Itaque ſumantur L M quadrati ipſorum A B. quorum aggregatum poſitum eſt H. & ex F in A fiat R. & ex G in B fiat P. Quia igitur F eſt ſemiſſis ſummæ ipſorum C D, & G ſemiſſis interualli eorundem ; D G ſimul ' æquantur ipſi F, & G F ſimul æquantur ipſi C.
coroll. 25. 1. poriſ. Quare ducere C in A idem eſt, atque ducere G & F in A, * productum autem ex G in A æquatur producto ex F in B (quia eſt A ad B vt F ad G) Igitur productum ex C in A æquatur productis ex
15. ſeptimi. F in A , & ex F in B. Quoniam verò F æquatur ipſis D G. productum ex F in B æquatur productis ex D in B, & ex G in B. Quamobrem productum ex C in A æquatur productis ex F in A. & ex D in B, & ex G in B. Itaque ſi hinc auferatur productus ex D in B, vtique productus ex C in A multatus producto ex D in B, hoc eſt K manebit æqualis productis ex F in A & ex G in B, hoc eſt ipſis R P. Iam verò quia idem A ductus in ſeipſum , & in F producit L & R. erit L ad R ſicut A ad F ſeu ſicut B ad G. Similiter quia idem B ductus in ſeipſum & in G producit M & P. erit M ad P ſicut B ad G. Igitur eſt L ad R ſicut M ad P. & duo antecedentes ſimul , nempe H ad conſequentes ſimul, nempe ad K ; ſunt vt A ad F ſeu B ad G. Quod demonſtrandum erat.

His præmiſſis, ſi ponantur data latera C D. & ſint A. B. numeri Numerorum, ſitque vnum latus fictitium A − C, alterum B + D. fiet æquatio inter aggregatum quadratorum ab A & B, & inter duplum producti ex A in C multatum duplo producti ex B in D. nempe inter H & duplum ipſius K.

A 15 N. − C 6 F 5.
E 2.
B 3 N + D 4 G 1.
H 234 Q. K 78 N.

Quare orietur valor Numeri diuidendo duplum ipſius K per H, Quia autem vt H ad K, ſic eſt A ad F. erit & H ad duplum K, ſicut A ad duplum F. hoc eſt ad ſummam ipſorum C D. Quare hae ſumma diuiſa per A orietur quoque valor Numeri. Proinde reſoluendo hypoſtaſes cum vnitates ipſius A ducentur in valorem Numeri, fiet A æqualis ſummæ ipſorum C D, vnde patet A − C fore æqualem ipſi D. Similiter quia vt H ad duplum K. ſic eſt B ad duplum G. nempe ad E, diuiſo E per B orietur rurſus valor Numeri. Vnde reſoluendo hypoſtaſes cùm vnitates ipſius B. ducentur in valorem Numeri, fiet B æqualis ipſi E. Quamobrem B + D neceſſe erit æquari ipſi C. Quare ex omni parte patet propoſitum.

Idem quoque abſurdum ſequitur, cùm in vtroque latere fictitio ponuntur data latera cum ſigno defectus, ſi Numerorum numerus minori appoſitus, ad appoſitum maiori eandem rurſus habeat rationem quam habet ſumma datorum laterum ad eorundem interuallum, vt ſi in hypotheſi Diophanti ponatur alterum latus 5 N. − 2 alterum 1 N. − 3. Quod eadem facilitate demonſtratur, hoc præmiſſo Theoremate.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad ſecundum ſit vt ſumma tertij & quarti ad exceſſum quarti ſupra tertium, erit aggregatum quadratorum primi & ſecundi, ad aggregatum productorum ex primo in tertium, & ex ſecundo in quartum, ſicut primus ad ſemiſſem ſummæ tertij & quarti, vel ſicut ſecundus ad ſemiſſem interualli eorundem.

Demonſtratur autem hoc theorema eadem ferè ratione qua & præcedens, imò ex illo facilè infertur, probando ſcilicet eundem K fieri ſiue à producto ex A in C. auferatur productus ex B in D; ſiue producto ex A in D. addatur productus ex B in C. Quod tibi relinquo conſiderandum exercitationis ergo.

Varij Canones ex varia poſitionum inſtitutione formari poſſent, ſed quia parum in eis eſſet compendij, huic labori ſuperſedeo. Verùm Canonis loco libet explicare modum perficiendi hoc problema à Franciſco Vieta traditum zetetico 3. libri quarti, qui talis eſt.

Conſtituantur latera data, hypotenuſæ duorum triangulorum rectangulorum ſimilium. Summa baſeos primi & perpendiculi ſecundi; itemque interuallum perpendiculi primi & baſeos ſecundi: vel interuallum baſeos primi & perpendiculi ſecundi; itemque ſumma perpendiculi primi, & baſeos ſecundi conſtituent quæſitorum quadratorum latera.

Porrò quilibet numerus fit hypotenuſa trianguli rectanguli per præcedentem, diuidendo ſcilicet eius quadratum in duos quadratos. Verbi gratia, ſint data latera 2. & 3. ſi per Canonem præcedentis diuida 2. in duos planos ſimiles, videlicet qui ſint in ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{2}{5}$ & $\frac{8}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{6}{5}$ & $\frac{8}{5}$. Rurſus diuide 3. in duos planos ſimiles, quique ſint in eadem ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Habemus itaque latera circa rectum triangulorum ſimilium, nimirum $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{5}$ & $\frac{9}{5}$ $\frac{12}{5}$. ſumma baſeos primi & perpendiculi ſecundi eſt $\frac{18}{5}$ interuallum autem perpendiculi primi & baſeos ſecundi eſt $\frac{1}{5}$. Sunt ergo latera quæſitorum quadratorum $\frac{18}{5}$ & $\frac{1}{5}$. vel ſumma perpendiculi primi & baſeos ſecundi eſt $\frac{17}{5}$ interuallum autem baſeos primi & perpendiculi ſecundi eſt $\frac{6}{5}$. Rurſus ergo quæſitorum latera eſſe poſſunt $\frac{17}{5}$ & $\frac{6}{5}$. Huius rei demonſtratio in promptu eſt. Sunto data latera A. B. & inuenienda ſint alia latera, quorum quadrati æquentur quadratis ipſorum A B. fiat A hypotenuſa trianguli rectanguli per præcedentem, ſintque latera circa rectum C D. fiat item B hypotenuſa ſimilis trianguli, cuius latera circa rectum ſint E F. Ita vt quadrati ipſorum C D ſint æquales quadrato abs A & quadrati ab E & F. ſint æquales quadrato abs B. & ſit C ad D vt E ad F. Denique ipſorum C F ſumma eſto G interuallum L. Item ipſorum E D ſumma eſto K interuallum H. Dico latera quæſita eſſe G H. vel etiam K L. Quia enim eſt C ad D vt E ad F. Erunt tam quadrati duorum G H. quàm quadrati duorum K L æquales quadratis omnium C D. E F. At quadrati ipſorum C D. E F æquantur quadratis duorum A B ex hypotheſi, igitur quadrati ipſorum A B æquantur quadratis ipſorum G H. vel etiam ipſorum K L. Quod erat demonſtrandum. 6. 3. poriſm.

A 10. B 15.
C 8. E 12.
D 6. F 9.
G 17. H 6.
K 18. L 1.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE duos quadratos numeros in dato interuallo. Conſtitutum ſit interuallum ipſorum eſſe 60. Ponatur alterius latus 1 N. alterius verò 1 N. & quot-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μο ξ. τετάχθω ὁ μὲν πλευρὰ ς ἑνός. ὁ δὲ ἡ πλευρὰ ς ἑνὸς καὶ μο

ὅσων δή ποτε, μόνον ἵνα μὴ ὁ ἀπὸ τ̃ μ° τετράγωνος ὑπεράρῃ τ̃ ὑπεροχὴν τ̃ δοθεῖσαν, οὕτω γὰρ ἑνὸς εἴδους ἑνὶ εἴδει ἴσου καταλειπομένου συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. ἔστω ςˢ ἑνὸς μ° γ̄. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι ἔσονται δ^υ μία, καὶ δ^υ μία, ςς^οι ς̄. μ° θ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς^οι ς̄ μ° θ̄ ταῦτα ἴσα μονάσιν ξ̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ὸ μ° η̄ καὶ ἥμισυ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ μ° η̄ καὶ ἥμισυ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ° ιᾱ καὶ ἥμισυ. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται ὃς μὲν μ° οβ̄ α. δ^χ ὃς δὲ ρλβ̄ α. δ^χ καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

libet vnitatum, dummodo harum quadratus non ſuperet interuallum datum. Sic enim vna ſpecie vni ſpeciei æquali remanente expedietur quæſtio. Eſto igitur 1 N. + 3. Ipſi igitur quadrati erunt 1 Q. & 1 Q. + 6 N. + 9. Interuallum ipſorum eſt 6 N. + 9. Hoc æquatur vnitatibus 60. & fit 1 N. 8 $\frac{1}{2}$. Erit igitur prioris latus 8 $\frac{1}{2}$. Poſterioris verò $\frac{1}{2}$. Ipſi autem quadrati erunt, 72. $\frac{1}{4}$ & 132. $\frac{1}{4}$ & manifeſtum eſt ſatisfactum eſſe quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XI.

VERBA illa, *Dummodo harum quadratus non ſuperet interuallum datum*, cautè accipienda ſunt. Nam in exemplo Diophanti, vbi interuallum datum 60. non eſt quadratus numerus, res bene habet, nam cùm non poſſit dari quadratus æqualis numero non quadrato qualis eſt 60. quicunque quadratus accipiatur non maior quàm 60. is neceſſariò minor erit, quod requiritur vt æquatio ritè procedat. Sed ſi datum interuallum eſſet quadratus numerùs, tunc non ſufficeret ponere in latere ſecundi quadrati vnitates, quarum quadratus non ſuperaret datum interuallum, ſed ponendæ eſſent vnitates, quarum quadratus deficeret à dato interuallo. Verbi gratia ſit datum interuallum 25. Ponatur latus alterius quadrati 1 N. alterius verò 1 N. + 5. fient 10 N. + 25. æquales 25. Quare 10 N. æquabuntur nihilo. Itaque oportet fingi latus ſecundi quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 25. vt 1 N. + 1. & fient 2 N. + 1 æquales 25. eritque 1 N. 12. ſunt ergo quæſita latera 12. & 13. & ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem melius & vniuerſalius præſcribetur conditio hoc pacto. *Dummodo harum quadratus ſit minor dato interuallo.* Cæterùm ex operatione Diophanti elicietur huiuſmodi Canon.

Sume quemuis quadratum minorem dato interuallo, eumque ſubtrahe à dato interuallo, reſiduum diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, cui ſi addas latus ſumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter etiam inſtitui poteſt operatio, nimirum. Ponatur minor quæſitorum quadratorum 1 Q. ergo maior erit 1 Q. + 60. fingatur eius latus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 60. & fiet operatio eadem cum operatione Diophanti. Vel fingatur quadrati eiuſdem latus ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſit maior quàm 60. verbi gratia fingatur ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. + 60. & fiet 1 N. 2. eruntque quæſita latera 2. & 8. Hinc rurſus formabitur iſte Canon.

Sume quemuis quadratum maiorem dato interuallo, & ab eo ſubtrahe datum interuallum, reſiduum diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, quod ſubtrahe à latere ſumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter rurſus Ponatur maior Quadratus 1 Q. erit ergo minor 1 Q. − 60. cuius latus fingatur ab 1 N. − quotlibet vnitatibus, puta ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. − 60. & fiet 1 N. 8. eruntque quæſita latera 8. & 2. Hinc etiam formatur huiuſmodi Canon.

Sume quemlibet quadratum quem adde dato interuallo, ſummam diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, à quo aufer latus ſumpti quadrati, vel contrà; fiet alterum latus.

Porrò Canon omnium elegantiſſimus, & quo ſequenti quæſtione vtitur Diophantus, & alibi ſæpe elicitur ex tertia ſecundi poriſmatum, adiuuante vigeſima tertia primi, vel Canone primæ primi Diophanti, nimirum.

Cape duos numeros quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, horum ſumma ſemiſſis, & ſemiſſis interualli eorundem, quæſitorum quadratorum exhibebunt latera.

A 60.
B 10. C 6.
D 8. E 2.

Sit enim A datum interuallum, & ex B in C fiat A. ſummæ autem ipſorum B C ſemiſſis eſto D, ſemiſſis verò interualli eorundem B C. eſto E. Quia ergo conſtat per vigeſimam tertiam primi poriſmatum, vel per Canonem primæ primi Diophanti ſummam ipſorum D E æquari ipſi B, & interuallum eorundem D E æquari ipſi C patet A fieri ex ſumma ipſorum D E in eorundem interuallum. Quamobrem A eſt interuallum quadratorum ab ipſis D E. Quod erat propoſitum.

Hinc autem melius & vniuerſalius quàm modo à Xilandro tradito cognoſci poterit, an in in-

tegris quæſtio ſolui poſſit, immò & an pluribus modis in integris ſolutio contingat: ſi enim ipſi B C tales deligi poſſint, vt vterque ſit par vel vterque impar, patet iam eorum ſummæ, quàm interualli ſemiſſem in integris haberi. Quare ipſi D E integri erunt vt iam docuimus ad primam primi. Si autem ipſorum B C. alter ſit par, alter impar, non poterunt ipſi D E haberi niſi diuiſa vnitate. Quamobrem quot modis reperiri poterunt duo numeri mutuo ductu conficientes datum interuallum, quorum vterque ſit par, vel vterque impar, tot modis per integros ſoluetur quæſtio. Vt dato interuallo eodem 60. quia id fit tum ex 10 in 6. tum ex 30. in 2. quorum vterque par eſt duobus modis in integris continget ſolui quæſtionem, eruntque quæſita latera 8 & 2 vel 16 & 14. ſimiliter dato interuallo 15. quia id fit tum ex 15 in 1. tum ex 5 in 3: duobus modis in integris ſoluetur quæſtio, eruntque quæſita latera 8 & 7. vel 4 & 1. Rurſus dato interuallo 48. quia id fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. tribus modis ſoluetur quæſtio per integros, & erunt quæſita latera 13. & 11. vel 8 & 4. vel denique 7 & 1. Vnde ſequitur quod iam aliter demonſtrauimus in Corollario vigeſimæ ſecundæ primi poriſm. ſi datum interuallum ſit pariter impar tantum, non poſſe ſolui quæſtionem in integris, nam non metietur illud numerus par per parem, alioquin eſſet pariter par contra hypotheſim, non metietur etiam idem interuallum numerus impar per imparem, alioquin eſſet impar, quod eſt etiam contra hypotheſim. Quamobrem relinquitur vt metiatur tantùm illud numerus par per imparem, ac proinde, vt oſtenſum eſt, non continget ſolutio in integris. Si autem datum interuallum ſit impar, vel quilibet numerus pariter par ſupra quaternarium, ſoluetur quæſtio ſemper in integris. Quia quemlibet imparem vnitas metitur per ipſummet imparem. At quemlibet pariter parem metitur binarius per eiuſdem pariter paris ſemiſſem qui ſemper eſt par. Excluditur autem quaternarius, quia metitur eum tantum binarius per binarium non poteſt autem idem binarius eſſe ſumma & interuallum duorum eorundem numerorum, niſi pars ponatur æqualis toti. 8. 1. poriſ.

QVÆSTIO XII.

Datis duobus numeris addere eundē numerum, & vtrumque quadratum efficere. Sint dati numeri 2 & 3. & eſto addendus 1 N. erit ergo tum 1 N. + 2. tum 1 N. + 3. æqualis quadrato. Et hoc genus vocatur duplicata æqualitas, æquatur autem ſic. Interuallo conſpecto, quære duos numeros quorum vnius in alterum multiplicatio producat iſtud interuallum. Sunt autem hi 4. & $\frac{1}{4}$. Horum vel interualli ſemiſſis in ſe ductus æquatur minori, vel ſummæ ſemiſſis in ſe ductus æquatur maiori. Sed interualli ſemiſſis in ſe ductus facit $\frac{225}{64}$ hoc æquatur 1 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{97}{64}$. Summæ verò ſemiſſis in ſe ductus facit $\frac{289}{64}$ hoc æquatur maiori, nimirum 1 N. + 3. & fit 1. N. rurſus $\frac{97}{64}$. Erit igitur addendus numerus $\frac{97}{64}$ & manifeſtum propoſitum.

Ne autem in duplicatam æqualitatem incidamus, ſic agendum. Inuenire numerum qui & ad 2. & ad 3. additus, vtrumque quadratum efficiat. Quæro prius numerum aliquem qui adſumens binarium faciat quadratum, vel quis numerus adiecto ternario fiat quadratus. Porro à quocunque quadrato ſubtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur. Agamus de 2. is aufe-

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἔστω τῷ β̄ καὶ τῷ γ̄ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ς^{ο} ἑνός. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ς^{ο} ἑνὸς μ^{ο} β̄. ὁ δὲ ς^{ο} ἑνὸς μ^{ο} γ̄ ἴσοι τετραγώνοις. καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοϊσότης, ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰδὼν τὴν ὑπεροχὴν ζήτει δύο ἀριθμοὺς, ἵνα τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τὴν ὑπεροχήν. εἰσὶ δὲ μ^{ο} δ̄ καὶ μονάδος τέταρτον. τούτων ἤτοι τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι. ἀλλὰ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι σκε^{ξδ}. ταῦτα ἴσα ς^{ο} ἑνὶ μονάσι δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} ϟζ^{ξδ}. τὸ δὲ συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι σπθ^{ξδ}. ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστι ς^{ο} ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} πάλιν ϟζ^{ξδ}. ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος ϟζ^{ξδ}. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐμπέσῃ δεικτέον οὕτως. τῷ δύο καὶ τῷ τρία προσευρεῖν τινα ς^{ον} ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμὸν ὃς προσλαβὼν μονάδας δύο ποιεῖ τετράγωνον, ἢ καὶ τὶς ἀριθμὸς προσλαβὼν μονάδας τρεῖς ποιεῖ τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀφέλω τὰς μονάδας [illegible] ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ ἀπὸ τῶν μονάδων δύο, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ δυνά-

μένως μιᾶς, λοιπὸν ἔσται δύναμις μία λεῖψει μο β. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν προσλάβῃ μονάδας β ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν προσλάβῃ μονάδας τρεῖς, γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛ^ου ἑνὸς λεῖψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προϋποτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας, εἰσὶ δὲ ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰς μονάδας β. οὕτως γὰρ ἐν ἑκατέρῳ αὐτῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω ἀπὸ ϛ^ου ἑνὸς λεῖψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δύναμις μία, μο ιϛ λεῖψει ϛϛ η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάδι μιᾷ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ η ἴσοι μονάσι ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε η^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ προστιθέμενος λγ ξδ^ων.

ratur ab 1 Q. ſupereſt 1 Q. − 2 & eſt euidens hunc ſi abſumat 2. fore quadratũ. Sed ſi adſumat 3. fit 1 Q. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum vt reſolutis hypoſtaſibus 1 Q. ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 2. Sic enim ex vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto ergo ab 1 N. − 4 ipſe quadratus erit 1 Q. + 16 − 8 N. Hoc æquatur 1 Q. + 1. Communis addatur defectus, & auferantur a ſimilibus ſimilia, relinquuntur 8 N. æquales 15. & fit 1 N. $\frac{15}{8}$ Ad poſitiones. Erit addendus numerus $\frac{33}{64}$.

IN QVAESTIONEM XII.

DVPLICI operatione quæſtionem hanc eleganter abſoluit Diophantus, ſed neutram Scholiaſtes, Xilanderve ſatisfeliciter explicauit. Sanè quod ad primam attinet, in qua duplicata æqualitate vtitur author, benè monet vterque eam niti primæ ſecundi. Sed id ſolùm non ſufficit vt eius adæquata ratio perfectè comprehendatur, nam licet inuenerimus duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri ea lege vt maior maiorem datorum ſuperet, & minor minorem, non ſtatim conſtat per hanc duplicatam æqualitatem vtrobique reperiri eundem valorem Numeri, quod vnum curandum eſt vt quæſtio perfectè ſoluta ſit. Hoc ergo ſic demonſtrabimus. Sint dati Numeri A B. quorum interuallum C. Ponendo ergo quæſitum numerum 1 N. erunt quadrato æquandi 1 N. + A & 1 N. + B. ſumantur duo quadrati D E eodem interuallo C diſtantes, ita vt D ſit maior quàm A, & E ſit maior quàm B. Dico ſiue D æquetur 1 N. + A. ſiue E æquatur 1 N + B. eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quia

A		B
1 N. + 30.		1 N. + 6.
	C 24.	
D 49.	F 19.	E 25.

7. 2. poriſm. enim ex conſtructione eſt in arithmetica medietate A ad B vt D. ad E. erit & permutando in eadem medietate A ad D, ſicut B ad E. Igitur ſi ſumatur F exceſſus D ſuper A, erit idem F exceſſus E ſuper B. Cùm ergo æquando D cum 1 N + A. detrahentur ſimilia à ſimilibus, nimirum cùm A vtrimque auferetur, remanebit F æqualis 1 N. ſed etiam æquando E cum 1 N + B auferetur vtrimque. B & remanebit idem F æqualis 1 N. Quare conſtat propoſitum.

Hoc demonſtrato, patet totum duplicatæ æqualitatis negotium in eo verſari, vt inueniantur duo quadrati eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri, quod ſanè fit per Canonem poſtremum ad præcedentem allatum, qui vt oſtenſum eſt, totus pendet à tertia ſecundi poriſmarum, quæ eadem eſt cum quinta ſecundi elementorum. Verùm quilibet quadrati quorum ſit idem interuallum qui & datorum numerorum, non ſtatim apti ſunt duplicatæ æqualitati reſoluendæ, ſed tales deligendi ſunt, vt maior ſuperet maiorem datorum numerorum, & minor minorem.

Hoc quidem vidit Scholiaſtes, ſed in eo allucinatus eſt, vt benè monet Xilander, quod arte certa tales quadratos reperiri poſſe negauit. Ipſe quoque Xilander in affinem eius quem reprehendit errorem lapſus meliora non affert, ſed indicata tantum neceſſitate tales quadratos reperiendi, quo pacto id fieri oporteat, minimè docet. Res tamen facilis eſt, nam tales numeri ſumendi ſunt quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, vt ſummæ illorum ſemiſſis quadratus excedat maiorem datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti, vbi interuallum eſt 1. maior numerorum 3. oportet inuenire duos numeros quorum mutuo ductu fiat 1. & quorum ſummæ ſemiſſis quadratus ſit maior quàm 3. Quare cùm ſummæ ipſius quadratus ſit quadruplus quadrati ſemiſſis, oportet ſummæ quadratum excedere 12. Proinde cùm latus proximè maius ipſius 12. ſit 3. $\frac{1}{2}$. neceſſe eſt ſummam quæſitorum numerorum quorum mutuo ductu fiat 1. excedere 3 $\frac{1}{2}$. vel ſanè non eſſe minorem. Hinc eſt cur abiectis 2. & $\frac{1}{2}$. Itemque 3. & $\frac{1}{3}$. ſe legerit Diophantus 4. & $\frac{1}{4}$. potueritque eorum loco ſumere 5. & $\frac{1}{5}$. vel 6. & $\frac{1}{6}$ alioſque infinitos, quorum ſumma maior eſt quàm 3 $\frac{1}{2}$. Ita ſi dati numeri ſint 30. & 6. cùm eorum interuallum ſit 24. maior vero ipſorum 30. cuius quadruplum 120. quærendi erunt duo numeri quorum mutuo ductu fiat 24. ita vt eorum ſummæ quadratus excedat 120.

Quare cùm radix proximè maior ipſius 120. ſit 11. oportebit quæſitorum numerorum ſummam eſſe maiorem quàm 11. vel certè non minorem. Quarè ritè ſumi poterunt 2. & 12. vel 3. & 8. aliique infiniti quorum ſumma maior, vel non minor quàm 11. ſed eandem ob cauſam reucientur 4. & 6. aliique infiniti quorum ſumma minor quam 11.

Quod attinet ad ſecundam operationem verba, illa *ὥστε τὴν τ̃ δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰ, τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας*, alio mendo non laborant, quicquid dicat Xilander, niſi quod vox *τετάρτης* temerè inculcata erat, nam legebatur in codice manuſcripto, *αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς τετάρτης λείψεως μονάδας*. Cæterum hac voce ſublata, reliqua bene habent, nec vllam pariunt difficultatem, niſi ex praua Xilandri interpretatione, qui ea ſic conuertit. *vt ſubſtantia quadrati earum ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cùm tamen vox Hypoſtaſis hoc loco & alibi ſemper apud Diophantum ſignificet, non ipſas vnitates quæ ponuntur in latere fictitio, ſed ipſum valorem numeri vel quadrati poſitionibus applicatum, vt iam docuimus ad primam primi. Hinc etiam erroris cauſam præbuit Xilander Chriſtophoro Clauio cap. 29. ænigmate 98. ſed & Raphaël Bombellius in eodem lapſus eſt lib. 3. ſuæ Algebræ Problemate 66. Quare relictis illorum inutilibus commentis, genuinus horum verborum ſenſus hic eſt. *vt quadrati hypoſtaſis ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates*, vel vt clarioris doctrinæ gratia interpretati ſumus, *vt reſoluto hypoſtaſibus 1 Q. ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cum enim quæſitus numerus poſitus ſit 1 Q − 2. manifeſtum eſt valorem quadrati talem reperiri debere vt ſuperet 2. Id autem arte certa qui conſequi poſſis non docuit hîc Diophantus. Sed profectò in ſequentibus ſæpe tali vtitur artificio quoties ſimile quid accidit. Quia numerus æquandus quadrato eſt 1 Q. + 1. patet ſi eius latus fingatur 1 N − aliquot vnitatibus valorem Numeri oriri diuidendo quadratum ipſarum vnitate multatum per duplum earundem vnitatum. Quia vero 1 Q. vt dictum eſt debet eſſe maior quàm 2. ſumpto latere proximè maiore ipſius 2. nimirum 1 ½. oportet valorem numeri maiorem eſſe, vel certe non minorem quàm 1 ½. Igitur eò redacti ſumus vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate multatus & diuiſus per duplum ipſius numeri, det quotientem maiorem vel certè non minorem quàm 1 ½. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1Q - 1}{2N}$ maior eſt vel certè non minor quàm 1 ½. & omnia multiplicando per 2 N. fit 1 Q − 1. non minor quàm 3 N, ac proinde 1 Q. non minor quàm 3 N. + 1. qua æquatione reſoluta, fit 1 N. non minor quàm ℞ 3 ¼ + 1 ½. ſumptoque latere ipſius 3 ¼. nimirum 1 ⅘ ſi ei addas 1 ½. fit 1. N. non minor quàm 3 $\frac{3}{10}$. Quamobrem æquantes quadrato 1 Q. + 1. fingemus eius latus 1 N. − quotlibet vnitatibus quæ ſuperent 3 $\frac{3}{10}$. ſic Diophantus finxit hoc latus 1 N. − 4. Poſſetque etiam fingi 1 N. − 5. vel 1 N − 6. & ſic in infinitum. Itaque vt iſta tyronum memoriæ firmius inhæreant, placet paulò aliter poſitiones inſtituere, quod fieri poſſe indicauit Diophantus his verbis. *Porrò à quocunque quadrato ſubtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur.* Ponatur quæſitus numerus 1 Q. − 3. is enim adſumpto 3. quadratum facit: At idem adſumpto 2. facit 1 Q − 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt hypoſtaſis quadrati ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 3. vt ergo determinemus de hoc vnitatum de numero, quia fiet valor Numeri diuidendo quadratum quæſitarum vnitatum auctum vnitate per duplum earundem vnitatum; At oportet 1 Q. maiorem eſſe quàm 3. atque adeo 1 N. maiorem eſſe vel certè non minorem latere proximè maiore ipſius 3. quod eſt 2. Patet eò nos adduci vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate auctus, & diuiſus per duplum ipſius numeri det quotientem non minorem quàm 2. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1Q}{2N}$ + $\frac{1}{2N}$ maior eſt, vel certè non minor quàm 2. & omnia in 2 N. Igitur 1 Q. + 1. maior eſt vel certè non minor quàm 4 N. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. vel 2 + ℞ 3. vel 2 − ℞ 3. & loco ℞ 3 ſumendo latus proximè minus ipſius 3. nempe 1 ⅔. fit 1 N. vel maior quàm 3. ⅔. vel minor quàm ⅓. Hic enim ob valorem Numeri duplicem, duplex inuenitur terminus alter ſupra quem, alter verò infrà quem, ſumi poteſt valor Numeri. Poſſumus ergo quadrato æquantes 1 Q. − 1. eius latus fingere ab 1. N. − quotlibet vnitatibus quæ ſint maiores quàm 3 ⅔. vel minores quàm ⅓. fingatur 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q − 1. & tandem 1 N. eſt $\frac{17}{8}$ vnde fit quæſitus numerus $\frac{97}{64}$. idem qui repertus eſt per operationem Diophanti. Fingatur rurſus latus Quadrati 1 N. − ⅕ fiet quadratus 1 Q − ⅖ N. + $\frac{1}{25}$ æqualis 1 Q − 1. vnde fit 1 N. $\frac{13}{5}$ & eſt quæſitus numerus $\frac{94}{25}$. cui addendo 3. & 2. fiunt quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{144}{25}$.

Si cui porrò laborioſior videbitur hæc operatio, licebit etiam aliam inſtituere magis expeditam, & quæ tantas difficultates minimè patiatur. Fingatur in eodem exemplo, quadratus aliquis ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet maiorem datorum numerorum 3. puta ab 1. N. + 2. fiet quadratus 1. Q. + 4 N. + 4. Hinc ergo auferendo 3. ſtatuatur reſiduum quæſitus numerus, nempe 1 Q. + 4 N. + 1. is enim adſumens 3. facit quadratum. Reſtat vt & adſumpto 2. quadratum faciat. Facit autem 1 Q + 4 N. + 3. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 3. vnitates numeri quadrato æquandi, eſto latus illud 1 N. − 3. fiet quadratus 1 Q − 6 N. + 9. æqualis 1 Q. + 4 N. + 3. & fit 1 N. ⅗ eſtque quæſitus numerus

$\frac{64}{25}$ vt ſuprà. Ex his omnibus operationibus varij Canones elici poſſunt, ſed omnium facillimus à prima fit, nimirum.

Cape duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo & dati numeri diſtant, ſed illis maiores, & à maiore quadrato aufer maiorem numerum, vel à minore minorem, reſiduum quod erit idem vtrobique, quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIII.

ΑΠΟ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ θ. καὶ τοῦ κα. ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. οἷον δ' ἂν τετράγωνον ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπὸν λείψει τούτου, οὗτος γὰρ ἀφαιρούμενος καταλείπει τετράγωνον. ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τῶν μ° θ ἀφαιρούμενος τετράγωνος δύναμις μία, λοιπαὶ ἄρα μονάδες θ λείψει δυνάμεως α. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ μ° κα ἀφελεῖν μ° θ λείψει δυνάμεως μιᾶς καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ μ° κα ἀφέλω μ° θ λείψει δυνάμεως α, λοιπὴ δύναμις α μ° ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ· πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςοῦ ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τῶν μ° ιβ. οὕτω γὰρ πάλιν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ μ° δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς, μ° ις λείψει ςς η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάσι ιβ. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ςςοὶ η ἴσοι μονάσι δ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δων η. αἱ μὲν θ μονάδες συνάγουσιν οβ η. τουτέστι φος ξδ. ἡ δὲ λεῖψις δυνάμεως μιᾶς ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῶν ις ξδ. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

A DATIS duobus numeris auferre eundem numerum, & facere reſiduum vtrumque quadratum. Iniunctum ſit vt à 9. & à 21. auferatur idem numerus, & vtrumque reſiduum ſit quadratus numerus. Qualemcunque verò quadratum aufero de altero ipſorum; ſtatuam reliquum cum hujus defectu, is enim detractus relinquet quadratum. Eſto igitur quadratus à 9. detractus 1 Q. relinquentur ergo 9 − 1 Q. Oportet igitur etiam à 21. auferre 9 − 1 Q. & facere quadratum. Sed ſi à 21. abſtulero 9. − 1. Q. relinquitur 1 Q. + 12. Hoc ergo æquatur quadrato, Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt quadratum earum amplius ſit quàm 12. Sic enim rurſus ab vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto itaque vnitatum 4. ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 16. − 8. N. qui æquabitur 1 Q. + 12. Auferantur à ſimilibus ſimilia: relinquuntur 8 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$ Atqui 9. faciunt $\frac{72}{8}$ ſeu $\frac{576}{64}$, vnde defectus 1 Q. auferatur, ſcilicet $\frac{16}{64}$. & ſatisfit propoſito.

IN QVÆSTIONEM XIII.

LIMITATIO quam præſcribit Diophantus circa latus fictitium, omnino inſufficiens eſt. Quod ſi libet experiri finge illud 1 N. − 8. quandoquidem quadratus ipſius 8. excedit 12. fiet quadratus 1 Q. − 16 N. + 64. æqualis 1 Q. + 12. & fiet 1 N. 3 $\frac{1}{4}$. Quare quæſitus numerus qui poſitus erat 9. − 1 Q. haberi non poterit, quia 1 Q. eſt maior quàm 9. Itaque cùm duo præſcribendi eſſent termini intra quos cadere debet numerus vnitatum ponendus in latere fictitio, vnum duntaxat præfiniuit Diophantus, nimirum 12. ſeu potius latus ipſius 12. Quod cùm ſit paulò minus quàm 3 $\frac{1}{2}$. rectè dicemus cum Diophanto numerum illum vnitatum debere ſuperare 3 $\frac{1}{2}$. vel certè non eſſe minorem. Sed hoc non ſufficit, nam præterea neceſſe eſt, talem fieri valorem Numeri vt reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. ſit minor quam 9. quia ſcilicet quæſitus numerus poſitus eſt 9 − 1 Q. Quare oportet 1 N. minorem eſſe quàm 3. Quia ergo æquando quadrato 1 Q. + 12. & fingendo latus 1 N. − aliquot vnitatibus, fit valor Numeri ex quadrato vnitatum illarum multato numero 12. & diuiſo per duplum ſui lateris, eo redigimur vt inueniamus talem vnitatum numerum, cuius quadratus multatus numero 12. & diuiſus per duplum ſui lateris, det quotientem minorem quàm 3. Eſto talis numerus 1 N. Ergo $\frac{1 Q. - 12}{2 N.}$ minor eſt quàm 3. & omnia in 2 N. fit 1 Q. − 12. minor quàm 6 N. & tandem fit 1 Q. minor quàm 6. N. + 12. qua reſoluta occaſione 1 Q. minor quàm ℞ 21. + 3. ſeu minor quàm 7 $\frac{1}{2}$ ferè quamobrem neceſſe eſt omnino numerum vnitatum ponendarum in latere fictitio cadere inter 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{1}{2}$ quales ſunt 4. 5. 6. 7. & alij infiniti admittendo fractiones.

Cæterum,

Cæterum, vt benè monet Xilander, hæc quæſtio non ſecus ac præcedens per duplicatam æqualitatem titè ſolui poteſt. Verbi gratia ſi dati ſint numeri 9. & 21. Ponatur quæſitus ab vtroque auferendus 1 N. ergo tam 9. — 1 N. quam 21 — 1 N. æquatur quadrato. Horum interuallum eſt 12. Quare tales ſeligendi ſunt numeri, quorum mutuo ductu fiat 12. vt ſemiſſis ſummæ illorum quadratus ſit minor quàm 21. vel quod idem eſt, vt ſemiſſis interualli quadratus ſit minor quàm 9. ob contrariam ſcilicet rationem eius, ob quam in præcedente requirebatur contrarium. Memores igitur eorum quæ docuimus in præcedente, quia quadruplum ipſius 21. eſt 84. dicemus numerorum quorum mutuo ductu fiet 12. ſummæ quadratum minorem eſſe debere quàm 84. Quare cum proximum latus de 84. ſit 9. $\frac{1}{5}$. oportebit ſummam talium numerorum minorem eſſe quàm 9 $\frac{1}{5}$. qualis eſt ſumma ipſorum 2. & 6. vel ipſorum 3. & 4. & aliorum infinitorum. Quod ſi ſumamus 2. & 6. erit quadratus ſemiſſis ſummæ illorum 16. at quadratus ſemiſſis interualli fiet 4. Siue igitur 4 æquetur 9. — 1 N. ſiue 16. æquetur 21. — 1 N. fiet vtrobique idem valor numeri 5. Quare 5. eſt quæſitus numerus, qui ab vtroque datorum detractus relinquit quadratos 4. & 16. Hinc etiam cum Xilandro eliciemus Canonem.

Sume duos quadratos eodem diſtantes interuallo, quo dati numeri diſtant, ſed minores illis. Tum à maiore numero aufer maiorem quadratum, vel à minore minorem. Reſiduum quod erit idem vtrobique, quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIV.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, ita vt reſiduum vtrumque ſit quadratus numerus. Conſtitutum ſit ab eodem numero auferre 6. & 7. & vtrumque reſiduum facere quadratum. Ponatur quæſitus numerus 1 N. & ſi ab eo abſtulero 6. relinquitur 1 N. — 6. æqualis quadrato. Si autem abſtulero 7. relinquitur 1 N. — 7. & rurſus in hoc caſu duplicata æqualitas exiſtit. Et quoniam horum interuallum, puta 1. continetur ſub 2. & $\frac{1}{2}$ fiet tandem 1 N. $\frac{121}{16}$ & ſatisfacit propoſito.

Ne verò in duplicatam æqualitatem deueniatur, ſic indagabimus. Quæremus primò a quo numero 6. ſubtractus, relinquat quadratum. Cæterùm cuicunque quadrato adiiciamus 6. is erit qui quæritur. Eſto igitur quadrato 1 Q. erit ergo qui quæritur 1 Q. + 6. & patet ſi ab eo auferantur 6. relinqui quadratum. Oportet igitur auferre quoque 7. ab 1 Q. + 6. & facere quadratum. Quamobrem 1. Q. — 1. æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. — 2. Ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 4. — 4 N. Hoc æquatur 1 Q. — 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Erit ergo qui quæritur $\frac{121}{16}$ & ſoluit quæſtionem.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφελεῖν τὸν ϛ̄ καὶ τὸν ζ̄. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ ζητούμενος ςο ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μονάδας ϛ̄ λοιπὸς ςο ᾱ λείψει μο ϛ̄ ἴσος τετραγώνῳ, ἐὰν δὲ μονάδας ζ̄. λοιπὸς ςο εἷς λείψει μο ζ̄. καὶ πάλιν ὁμοίως ἐπὶ τούτου ἐστὶν ἡ διπλοϊσότης. ἐπειδή περ ἡ ὑπεροχὴ μονὰς οὖσα μία περιέχεται ὑπὸ μο β̄. καὶ μονάδος ἡμίσεος. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ρκα ιϛ. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἴσωσιν ἐξέρχηται. ζητητέον οὕτως. ζητῶ πρότερον ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφέλω μο ϛ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ᾧ δ᾽ ἂν τετραγώνῳ δηλονότι προσθῶ τὰς μο ϛ̄. ἐκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ δυνάμεως μιᾶς. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος δύναμις ᾱ μονάδες ϛ̄. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μο ϛ̄ ὁ λοιπὸς ἔσται τετράγωνος. δεήσει ἄρα καὶ μονάδας ζ̄. ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς δυνάμεως μιᾶς μο ϛ̄. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δύναμις ἄρα μία λείψει μονάδος μιᾶς ἴση τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςο ᾱ λείψει μο β̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις μία, μονάδες δ̄ λείψει ςς δ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ λείψει μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄ δ. ἔσται ὁ ζητούμενος ρκα. ιϛ καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIV.

PRIMÆ operationi, in qua vtitur duplicata æqualitate Diophantus, nullam adiicit conditionem, nec adiicienda eſt aliqua, vt malè arbitratur Xilander. Cùm enim quadrati qui capiun-

tur eodem diſtantes interuallo quo & dati numeri, addendi ſint ipſis datis numeris , minor ſcilicet maiori , & maior minori , patet vt additio perfici poſſit non referre vtrum tales quadrati maiores, ſint datis numeris vel , minores. Quod in duabus præcedentibus circumſpiciendum erat , quia in illis ſubſtractione vtendum fuit non additione ; allucinatus ergo eſt Xilander exiſtimans vtendum hîc eadem cautione in huiuſmodi quadratis deligendis , qua fuit vtendum in duodecima. quod & exemplo ab ipſomet allato confirmare facile eſt. Sint dati numeri 41. & 65. quorum interuallum 24. quod fit ex 4. in 6 vel ex 3. in 8. hos tamen binos rem expedire poſſe negat Xilander , idque conſtare experientia ait. Sed ſanè conſtat experientia falli Xilandrum. Nam ipſorum 4. & 6. ſummæ & interualli ſemiſſes ſunt 5. & 1. quorum quadrati 25. & 1. Quare ſi addas 1. ad 65. vel 25. ad 41. fiet vtroque modo quæſitus numerus 66. vt patet. Ruſus ipſorum 3. & 8. ſummæ & interualli ſemiſſes ſunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{5}{2}$ quorum quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{25}{4}$ & ſi addas ad 65. vel $\frac{121}{4}$ ad 41. fit vtroque modo quæſitus numerus 71 $\frac{1}{4}$ qui ſatisfacit propoſito.

Porrò vt modus hîc vtendi duplicata æqualitate perfectè demonſtratus maneat, ſint dati numeri A maior & B minor , horumque interuallum C. & ponatur quæſitus numerus 1 N. Igitur æquandi quadrato erunt 1 N. − A. & 1 N. − B. Sumantur itaque duo quilibet quadrati, D maior & E minor, quorum interuallum ſit idem C. Quia ergo ob maiorem defectum totus 1 N. − A minor eſt toto 1 N. − B. æquabimus illi minorem quadratum E, maiorem verò D huic.

1 N. − A 30. 1 N. − B 6.
C 24.
E 25. D 49.

Et in prima æquatione ſupplendo defectum, fiet 1 N, æqualis ſummæ ipſorum A E. At in ſecunda fiet 1 N. æqualis B D. ſumma autem ipſorum A E æqualis eſt prorſus ſummæ ipſorum B D, quia, cùm
4. 1. poriſm. ſint arithmeticè proportionales A ad B vt D ad E, eſt ſumma extremorum A E æqualis ſummæ mediorum B D. Quamobrem in vtraque æquatione fit idem valor Numeri. Quod demonſtrandum erat. Hinc elicitur Canon à Xilandro traditus.

Cape duos quadratos eodem diſtantes interuallo , quo & dati numeri , horum minorem adde maiori numero , & maiorem minori , vtroque modo fiet idem quæſitus numerus.

Secundæ verò operationi vt perficitur à Diophanto, limitatio quædam adiicienda erat ; nam cùm numerus quadrato æquandus ſit 1 Q. − 1. debet eius latus fingi ab 1 N. − tot vnitatibus, vt tandem valor quadrati inueniatur excedens 1. Quare ſi eodem vtaris artificio, quo vſi ſumus in præcedentibus , inuenies latus illud fingendum eſſe ab 1 N − aliquo vnitatum numero maiore quàm 1. vel minore quàm 1. alioquin ſi ponatur latus illud 1 N. − 1. reperietur 1 Q. − 1 nihil eſſe. Ita ſi propoſiti numeri ſint 30. & 6. ponatur quæſitus 1 Q. + 6. vnde auferendo 30. remanet 1 Q. − 24. æquandus quadrato. Cuius latus fingendum ab 1 N. − tot vnitatibus vt tandem 1 Q. ſit maior quàm 24. Quare cùm latus proximè maius ipſius 24. ſit 5. oportet 1 N. non minorem eſſe quàm 5. ſit autem 1 N. ex quadrato vnitatum quæ ponuntur in latere fictitio, adſumente numerum 24. diuiſoque per duplum ſui lateris. Ponatur ergo hic vnitatum numerus 1 N. Igitur $\frac{1 Q.}{2 N.} + \frac{24}{2 N.}$ maior eſt vel ſaltem non minor quàm 5. & omnia in 2 N. fit 1 Q. + 24. non minor quàm 10 N. Qua æquatione reſoluta ſit 1 N. vel 6. vel 4. Quare oportet talem poni in latere fictitio vnitatum numerum, vt ſit non minor quàm 6. vel non maior quàm 4. Qua ratione excluduntur tantùm omnes numeri inter 4. & 6. fingatur ergo latus 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 24. Vnde fiet 1 N. 5. erit ergo quæſitus numerus 31. & ſatisfacit propoſito. Vel fingatur idem latus 1 N. − 6 fiet ruſus 1 N. 5. & quotieſcunque ſumentur duo numeri vnus maior quàm 6. alter minor quàm 4. ita vt maior ad ipſum 6. eandem habeat rationem quam habet 4. ad minorem, eadem per vtramque æquationem continget ſolutio. Ita ſi eiuſdem numeri 1 Q. − 24. latus fingas 1 N. − 2. vel 1 N. − 12. fiet idem valor Numeri 7. Itemque ſiue fingas idem latus 1 N. − 3. ſiue 1 N. − 8. fiet idem valor Numeri 5 $\frac{1}{2}$. & ſic de alijs. Quod adnotaſſe fuit operæ pretium.

Poteſt tamen operatione paulum immutata, tam laborioſæ conditionis neceſſitas euaneſcere. Si videlicet, ponatur quæſitus numerus 1 Q. + maiore datorum numerorum , vt in exemplo Diophanti ponatur quæſitus numerus 1 Q. + 7. hinc ergo detracto 6. remanet 1 Q. + 1. æquandus quadrato , cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus , quarum quadratus ſuperet 1. & manifeſta eſt ſolutionis ratio. Ita ſi dati ſint numeri 30. & 6. Pono quæſitum 1 Q. + 30. vnde auferendo 6. remanet 1 Q. + 24. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 24. Hinc etiam licebit elegantem formare Canonem.

Datorum numerorum interuallum aufer ab aliquo quadrato , reſiduum diuide per duplum lateris eiuſdem quadrati , quotientis quadratus additus maiori datorum numerorum , quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XV.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετρά-

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum,

qui vtramque partem adſumens faciat quadratum. Sit diuidendus 20. in duos numeros. Exponantur duo numeri, vt quadrati eorum ſimul minores ſint quàm 20. puta 2. & 3. & ſi vtrique adiiciatur 1 N. erunt quadrati ab ipſis, hic quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Ille verò 1 Q. + 6 N. + 9. Si ergo ab vtroque abſtulero 1 Q. qui vtique quadratus eſt, habebo quæſitos numeros, qui adſumentes videlicet quadratum, facient quadratum. Sed ſi abſtulero 1 Q. relinquuntur, hinc quidem 4 N. + 4. Inde vero 6 N. + 9. Oportet ergo ſummam iſtorum, nimirum 10. N. + 13. æquari 20. & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. Eſt igitur hic quidem $\frac{68}{10}$. ille verò $\frac{132}{10}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

γωνον ὃς προσλαβὼν ἑκάτερος τὸ ὁριζόμενον ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω τὸν κ. διῃρεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. ἔκθου δύο ἀριθμούς. ὥστε τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους ἐλάσσονας εἶναι μο κ. ἔστω δὴ ὁ δύο καὶ ὁ τρία. καὶ προστεθέντος ἑκατέρῳ ς ἑνὸς, ἔσονται οἱ ἀπὸ τούτων τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ςς δ μο δ. ὃς δὲ δυνάμεως μιᾶς ςς ς μο θ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τὴν δύναμιν, τουτέστι τὸν τετράγωνον ἕξομαι τοὺς ἐπιζητουμένους, οἱ προσλαμβάνοντες δηλονότι τετράγωνον ποιοῦσι τετράγωνον ἀλλ' ἐὰν ἀφέλω δύναμιν μίαν λοιποὶ ἔσονται. ὁ μὲν ςς δ μο δ. ὁ δὲ ςς ς μο θ. δεήσει ἄρα τὴν σύνθεσιν αὐτῶν, τουτέστι ςς ι. μο ιγ. ἴσους εἶναι μονάσι κ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ι. ἔσται ὁ μὲν ξη ι. ὁ δὲ ρλβ ι. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XV.

IN hac quæſtione nulla eſt difficultas. Cur velit Diophantus ſumi duos numeros, quorum quadrati ſimul minores ſint numeró diuidendo nemo eſt qui non videat. Itaque ex operatione ipſa hunc formamus Canonem.

Sume duos numeros quorum quadrati ſimul minores ſint numero diuidendo; horum quadratorum ſummam aufer à numero diuidendo, reſiduum diuide per duplum ſummæ ſumptorum numerorum, orietur latus quæſiti quadrati, cuius duplum ſi ducas ſeorſim in ſumptos numeros, & productis addas ſeorſim quadratos ſumptorum numerorum, fient quæſitæ partes numeri diuidendi.

Vt ſi datus ſit numerus 33. ſume duos numeros 2. & 3. quorum quadrati ſimul faciunt 13. quo detracto de 33. ſuperſunt 20. quæ diuiſa per duplum ipſorum 2. & 3. nimirum per 10. dant 2. latus quadrati quæſiti, cuius duplum 4. ductum ſigillatim in ipſos 2. & 3. facit 8. & 12. quibus ſi addas ſeorſim quadratos eorundem 2. & 3. nempe ipſi 8. quadratum 4. & ipſi 12. quadratum 9. fient 12. & 21. quæſitæ partes numeri 33. quibus addendo eundem quadratum 4. fiunt quadrati 16. & 25.

QVÆSTIO XVI.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, à quo vterque detractus, relinquat quadratum. Numerus diuidendus iterum eſto 20. Ponatur is qui quæritur quadratus à latere 1 N. cum tot vnitatibus, vt harum quadratus non ſuperet 20. Eſto ab 1 N. + 2. Quadratus ergo erit 1 Q. + 4 N. + 4. & patet ſi hinc auferantur 4 N. + 4. relinqui quadratum, & ſimiliter ſi hinc auferantur 2 N. + 3. relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. + 2 N. + 1. Statuo igitur, hac de cauſa, primum quidem 4 N. + 4. Secundum verò 2 N. + 3. Quæſitum autem 1 Q. + 4 N. + 4. & hic dempto vtroque illorum, facit quadratum. Supereſt vt ambo ſimul æquentur numero diuidendo. Sed

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λειπὸν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω πάλιν τὸν κ διῃρεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς ἑνὸς καὶ μο τοσούτων, ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ. ἔστω δὴ ς ἑνὸς μο β. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς δ. καὶ δῆλον ὡς λοιπῶν ἀριθμοὺς δ μονάδας δ καταλείπει τετράγωνον, καὶ ὁμοίως λοιπῶν ςς β μο γ. καταλείπει τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς, ςς β μο α. τάσσω οὖν διὰ ταῦτα τὸν μὲν πρῶτον ςς δ μο δ. τὸν δὲ δεύτερον ςς β μο γ. τὸν δὲ ζητούμενον δύναμιν μίαν, ςς δ μο δ. καὶ λείψει ἑκατέρου ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς δύο ἴσους εἶναι τῷ διαιρουμένῳ. ἀλλ' οἱ δύο ποιοῦσι ςς ς μο ζ.

ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄ ς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ος̄ ς. ὁ δὲ δεύτερος μδ̄ ς. ὁ δὲ τετράγωνος χκᾱ λς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ambo ſimul faciunt 6 N. + 7. Hoc ergo æquatur 20. Auferantur à ſimilibus ſimilia, & fit 1 N. $\frac{13}{6}$. erit ergo primus $\frac{76}{6}$ ſecundus $\frac{44}{6}$. Quadratus autem $\frac{621}{36}$. & faciunt poſtulata.

IN QVAESTIONEM XVI.

FRVSTRA laborat Scholiaſtes, vt implicatum Theorema nobis obtrudat quaſi neceſſarium ad intelligendam operationem Diophanti, cùm illo carere poſſimus abſque vllo artis diſpendio. Etenim cùm ponat Diophantus quadratum quæſitum 1 Q. + 4 N. + 4. quem finxit à latere 1 N. + 2 Primò euidens eſt eum alteram partem numeri diuidendi ponat 4 N. + 4. quia ſcilicet, his ablatis à quadrato expoſito, relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. Deinde vt aliam partem numeri diuidendi reperiat, fingit alium quadratum ab 1 N. + certo vnitatum numero minore quàm 2. qui poſitus eſt in latere quæſiti quadrati, puta ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo detracto à quæſito quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. remanet alia pars numeri diuidendi, nimirum 2 N. + 3. vnde etiam colligitur aliter atque aliter ſumi poſſe partes numeri diuidendi, eodem etiam quadrato expoſito manente, prout ab eo detrahentur alij atque alij minores quadrati.

Quod autem attinet ad limitationem quam præſcribit Diophantus circa latus quæſiti quadrati, illud ſcilicet fingendum eſſe ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus non ſuperet numerum diuidendum, hanc ego nec ſufficientem puto, nec omnino neceſſariam. Sufficiens quidem non eſt, quia etſi obſeruetur deueniri poterit ad abſurdum. Nam ponatur latus quæſiti quadrati 1 N. + 4. erit ipſe quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. cuius vnitates minores ſunt numero diuidendo 20. vnde conſtat obſeruatam eſſe limitationem præſcriptam. Si tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 8 N. + 16. altera verò 2. N. + 7. quæ habetur ſi ab expoſito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 3. nimirum 1 Q. + 6 N. + 9. erit ſumma duarum partium 10 N. + 23. æqualis 20. Quod eſt impoſſibile. Non eſt etiam neceſſaria huiuſmodi conditio, quia quamuis non ſeruetur, ritè tamen perfici poterit æquatio. Etenim fingatur quadratus quæſitus à latere 1 N. + 5. erit is 1 Q. + 10. N. + 25. cuius vnitates excedunt numerum diuidendum 20. contrà id quod præcipit Diophantus. Tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 2 N. + 9. quæ habetur ſi ab expoſito quadrato auferatur quadratus à lateri 1 N. + 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 16. Rurſus ponatur pars altera 1 N. + $4\frac{3}{4}$. quæ habetur ſi à quadrato expoſito auferatur quadratus à latere 1 N. + $4\frac{1}{2}$. nimirum 1 Q. + $20\frac{1}{4}$. Erit partium ſumma 3 N. + $13\frac{3}{4}$. æqualis 20. Vnde fiet 1 N. $\frac{25}{12}$. Ad hypoſtaſes erunt quæſitæ partes $\frac{82}{12}$ & $\frac{158}{12}$. Quadratus quæſitus $\frac{7225}{144}$. à latere $\frac{85}{12}$. A quo quadrato ſi auferas ſigillatim partes inuentas, remanent quadrati $\frac{6241}{144}$. & $\frac{5329}{144}$. quorum latera $\frac{79}{12}$. & $\frac{73}{12}$. Aliter igitur præſcribenda eſt conditio huic operationi, nimirum. Ponatur quadratus quæſitus à latere 1 N. + quotlibet vnitatibus. Tum fingantur alij duo minores quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, vt harum quadratis ſigillatim detractis à quadrato vnitatum primi quadrati, duo reſidua ſimul minora ſint numero diuidendo. Hoc autem facillimum factu eſt, quia dato quolibet quadrato, licet inuenire infinitos minores quadratos, diſtantes à dato quadrato, interuallo minore quàm quilibet præſcriptus numerus. Verbi gratia dato quadrato 25. ſi velim minores quadratos quibus ſigillatim à 25. detractis, ſuperſit minùs quàm 10. quia detrahendo 10. à 25. ſupereſt 15. oportet quæſitos quadratos minores quidem eſſe, quàm 25. ſed maiores quàm 15. Quare cùm latus 25. ſit 5. At latus proximè maius ipſius 15. ſit 4. Patet quadratos omnes à lateribus inter 4. & 5. quales ſunt à lateribus 4. $4\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{4}$ &c. ſatisfacere propoſito. Hinc eſt cur poſito quadrato quæſito 1 Q. + 10. N. + 25. quærendi erant duo quadrati, quibus ſigillatim detractis à 25. reſidua ſimul minora eſſent quàm 20. Quia verò quolibet reſiduo exiſtente minore quàm 10. ſequebatur vtrumque ſimul minorem eſſe quàm 20. finxi latera quæſitorum quadratorum 1 N. + 4 & 1 N. + $4\frac{1}{2}$. quia ſinguli quadrati ipſorum 4. & $4\frac{1}{2}$ minores ſunt quàm 10. vt oſtenſum eſt. Simili artificio rectificari poterit operatio illa qua deductione ad abſurdum oſtendimus inſufficientiam Diophanteæ limitationis. Etenim ponendo eundem quadratum quæſitum 1 Q. + 8 N. + 16. eſto pars vna vt prius 8 N. + 16. Cùm ergo ex conditione præſcripta conſtet vnitates vtriuſque partis ſimul minores eſſe debere numero diuidendo 20. ſi in vna parte ſint 16. vnitates, patet in alia debere eſſe minùs quàm 4. Oportet igitur fingere quadratum ab 1 N. + tot vnitatibus, vt earum quadratus detractus de 16. relinquat minus quàm 4. Oportet ergo quadratum illarum vnitatum maiorem eſſe quàm 12. minorem quàm 16. Quare cùm latus ipſius 16. ſit 4. & latus proximè maius ipſius 12. ſit $3\frac{1}{2}$. ſumendus erit quilibet vnitatum numerus à $3\frac{1}{2}$ incluſiuè vſque ad 4. excluſiuè, quales ſunt $3\frac{5}{8}$. $3\frac{2}{3}$. $3\frac{3}{4}$. & alij infiniti. Ita ſi fingas quadratum ab 1 N. + $3\frac{1}{2}$. erit quadratus 1 Q. + 7 N. + $12\frac{1}{4}$. quo detracto à quæſito quadrato 1 Q. + 8 N. + 16. ſupereſt ſecunda pars numeri diuidendi, nimirum 1 N. + $3\frac{3}{4}$. Quare ſumma partium fit 9 N + $19\frac{3}{4}$ æqualis 20. Qua æquatione reſoluta, optimè ſatisfit propoſito.

Ex dictis apparet quàm infinitis variis modis poſitiones inſtitui poſſint, & ſolutiones diuerſæ reperiri, nam primò quæſitus quadratus variè fingi poteſt. Deinde eodem manente quadrato quæſito, partes numeri diuidendi diuerſimodè fingi poſſunt. Sed & Diophantus rurſus lib. 3. quæſt. 23. hanc ipſam retractans quæſtionem alia operatione negotium abſoluit, quam ibi explicabimus.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt vterque cum quadrato qui proponetur faciat quadratum. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum, vtrumque autem adſcito 9. facere quadratum. Hîc a quocunque quadrato cuius latus ſit multitudo quælibet numerorum + vnitatum 3. detraxero 9. reſiduum erit alter quæſitorum. Eſto igitur minor 1 Q. + 6 N. erit ergo maior 3 Q. + 18 N. Oportet itaque & hunc adſumpto 9. facere quadratum. Sed facit 3 Q. + 18. N. + 9. Hoc ergo quadrato æquale eſt. Fingo quadratum a 2 N. − 3. & fit 1 N. 30. Erit igitur minor 1080. maior verò 3240. & vterque adiecto 9. facit quod poſtulatur.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ἐπιταχθέντος τετραγώνου ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, ἑκάτερον δὲ αὐτῶν μετὰ μο θ ποιεῖν τετράγωνον. ἀφ᾽ οὗ δ᾽ ἂν τετραγώνου ἀπὸ πλήθους ςς καὶ μο γ ἀφέλω μο θ ἔσται εἷς τῶν ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάσσων δυνάμεως α ςς ς. ὁ ἄρα μείζων ἔσται δυνάμεων γ ςς ιη. δεήσει ἄρα καὶ τοῦτον προσλαβόντα μο θ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ γίνονται δυνάμεις γ ςς ιη μο θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς δύο λείψει μο τριῶν, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ͵απ. ὁ δὲ μείζων ͵γσμ. καὶ ποιοῦσι μετὰ μονάδων θ τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & ei qui ſuperiorum omnium quæſtionum artificium perfectè comprehenderit, nihil hîc obſcurum videbitur. Vnum moneo numeri 3 Q. + 18 N. + 9. latus non ſolùm fingi poſſe à quolibet Numerorum numero cuius quadratus ſuperet 3 Q. cùm defectu vnitatum 3. lateris ſcilicet ipſius 9. vt faciat Diophantus qui ponit hoc latus 2 N. − 3. ſed etiam fingi poſſe à numero Numerorum cuius quadratus ſuperet 3. & cuius ſextuplum ſit minus quàm 18. adiectis tot vnitatibus quot ſunt in latere quadrati dati 9. nimirum 3. Idcirco fingi poteſt hoc latus 2 N. + 3. vel $2\frac{1}{2}$ N. + 3. & ſic ad + 3. adiungi poteſt quilibet numerus Numerorum qui cadat inter 2. & 3. Hac ratione fingendo huiuſmodi latus 2 N. + 3. fit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 3 Q. + 18 N. + 9. & fit 1 N. 6. ſuntque numeri quæſiti 72. & 216. qui ſatisfaciunt poſtulatis.

Sed & ſine magna perplexitate, quicquid dicat Xilander, per duplicatam æqualitatem ſolui quæſtio poteſt. Nam ponatur minor numerus 1 N. eſt ergo maior 3 N. Quare vtrique adiiciendo 9. ſunt quadrato æquandi 1 N. + 9. & 3 N. + 9. Horum interuallum eſt 2 N. Sumendi ergo ſunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita tamen vt tam in ſemiſſe ſummæ quàm in ſemiſſe interualli eorum reperiatur 3. latus quadrati adiecti 9. vt ſcilicet in æquationis vtraque parte reperiantur 9. vnitates, quibus vtrumque ablatis, maneat æquatio inter numeros & quadratos. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita vt in eorum ſumma, & in eorum interuallo reperiantur vnitates 6. Quare ſunt huiuſmodi numeri 6. & $\frac{1}{3}$ quorum interualli ſemiſſis $3 - \frac{1}{6}$ N. cuius quadratus $9 - 1$ N. + $\frac{1}{36}$ Q. æquatur 1 N. + 9. & fit 1 N. 72. ſuntque quæſiti numeri vt ſupra 72. & 216. Sed ſanè hac ratione operando vnica tantum reperiri poteſt ſolutio, cùm alii numeri præter 6. & $\frac{1}{3}$ N. ſumi non poſſint, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ob cauſam allatam. Quare maluit Diophantus aliam inire viam, qua infinitæ ſolutiones contingunt. Cæterùm ex hac vltima operatione formari poteſt Canon ſatis expeditus.

Denominatorem rationis vnitate multatum diuide per quadruplum lateris propoſiti quadrati, per quotientis quadratum diuide rurſus ſemiſſem denominatoris vnitate aucti, orietur minor quæſitorum numerorum.

Quoniam verò hîc deſiderari videntur aliquot quæſtiones non inelegantes, & ad hanc tractationem pertinentes, placet illas ſubnectere.

cautio adhibenda eſt, præter eam qua tradita eſt aduertendo primo vt ſcilicet numeri Numerorum ſint diuerſi, & eam de qua agetur aduertendo vltimo. Ita ſi ponas latera 1. N. − & 2. N. −3. fiet 1 N. $\frac{14}{5}$ & latera quæſita erunt $\frac{4}{5}$ & $\frac{12}{5}$. & ſic aliis infinitis modis variari poſitiones poterunt, & variæ contingent ſolutiones, prout varij ponentur Numerorum numeri, qui tamen non ſint prius poſitis proportionales, alioquin ſi proportionales ſint eandem exhibebunt ſolutionem, vt facile eſt demonſtrare. Quod ſi alterum tantum datorum laterum ſtatuatur cum ſigno minoris, alterum verò cum ſigno pluris, dupliciter id accedere poteſt, quia vel minus latus afficitur ſigno − vel maius latus. Itaque.

Aduertendum tertiò, cùm minus datorum laterum afficitur ſigno − maius verò ſigno +. Neceſſe eſſe vt numerus Numerorum appoſitus minori ad numerum Numerorum appoſitum maiori maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Quare in hoc caſu ſi ponatur verbi gratia alterum latus 1 N. + 3. ponendum erit alterum 2 N. − 2 vel 3 N. − 2. & ſic in infinitum, ita vt numerus Numerorum ſecundi lateris excedat $1\frac{1}{2}$ qui ad vnitatem ſeu ad numerum Numerorum primi lateris eandem habet rationem quàm 3. ad 2. Huius rei cauſa euidens eſt, quia oportet, vt dictum eſt, in aggregato quadratorum fictitiorum numerum Numerorum eſſe cum ſigno −. Quare in hoc caſu oportet duplum producti ex minore datorum laterum in Numeros ſibi appoſitos, ſuperare duplum producti ex maiore in Numeros ſibi adiunctos, quod patet fieri non poſſe niſi obſeruetur quod traditum eſt.

Aduertendum quartò cùm maius latus datorum afficitur ſigno, − minus verò ſigno + tunc neceſſe eſſe vt numerus Numerorum appoſitus maiori ad appoſitum minori lateri, maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Ita ſi ponatur alterum latus 1 N. − 3. ſtatuendum erit alterum $1\frac{1}{3}$ N. + 2. vel $1\frac{1}{4}$ N. + 2. & ſic in infinitum, ponendo in ſecundo latere quemlibet numerum Numerorum minorem quàm $1\frac{1}{2}$. vel ſi ſecundum latus ſtatuatur 1 N. + 2. ſtatuendum erit primum 2. N. − 3. vel 4. N. − 3. & ſic in infinitum ponendo in primo latere quemlibet numerum Numerorum maiorem quàm $1\frac{1}{2}$. Quod obſeruari oportet ob cauſam in præcedente aduertendo allatam. Ita poſſunt hæc duo præcepta in vnicum contrahi, nimirum. Cùm in vno latere fictitio ponitur alterum laterum datorum cum ſigno, − alterum verò ponitur in altero latere fictitio cum ſigno. − Oportet vt numerus Numerorum qui afficitur ſigno − ad eum qui afficitur ſigno + maiorem rationem habeat, ratione datorum laterum.

Aduertendum poſtremò, cùm maius datorum laterum afficitur ſigno − & minus ſigno + tunc cauendum eſſe, ne numerus Numerorum maiori appoſitus, ad appoſitum minori eandem rationem habeat, quam habet ſumma datorum laterum ad eorundem interuallum; alioquin idem ſequetur abſurdum quod in primo aduertendo ſequi oſtenſum eſt, repetientur ſcilicet eadem latera quæ data ſunt, & nihil effectum erit. Verbi gratia ſi ponas alterum latus 5 N. − 3. alterum 1 N. + 2. quia 5 N. ad 1 N. ſe habet ſicut ſumma ipſorum 3. & 2. ad eorundem interuallum inuenies tandem 5 N. − 3. nil aliud eſſe quàm 2. & 1 N. + 2 eſſe idem quod 3. Huius ſymptomatis cauſa ex huiuſmodi Theoremate pendet.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad ſecundum ſit vt ſumma tertij & quarti, ad exceſſum tertij ſuprà quartum: erit aggregatum quadratorum primi & ſecundi, ad productum ex primo in tertium multatum producto ex ſecundo in quartum: Sicut primus ad ſemiſſem ſumma tertij & quarti, vel ſicut ſecundus ad ſemiſſem interualli eorundem.

F 5.
A 15. C 6.
E 2.
B 3. D 4. G 1.
H 234. K 78.
L 225. R 75.
M 9. P 3.

Sint dati quatuor numeri A B C D. & ipſorum C D interuallum ſit E cuius ſemiſſis G. & eorundem C D ſummæ ſemiſſis ſit F. & aggregatum quadratorum ab A & B ſit H. productum autem ex A in C multatum producto ex B in D eſto K. & ponatur eſſe A ad B ſicut ſumma duorum C D ad eorundem interuallum E, hoc eſt ſicut F ad G. dico eſſe ſicut H ad K. ſic A ad F vel B ad G. Quia enim eſt A ad B ſicut F ad G, erit viciſſim A ad F ſicut B ad G. Itaque ſumantur L M quadrati ipſorum A B. quorum aggregatum poſitum eſt H. & ex F in A fiat R. & ex G in B fiat P. Quia igitur F eſt ſemiſſis ſummæ ipſorum C D, & G ſemiſſis interualli eorundem; D G ſimul ' æquantur ipſi F, & G F ſimul æquantur ipſi C.
coroll. 25. Quare ducere C in A idem eſt, atque ducere G & F in A, * productum autem ex G in A æquatur
1. poriſ. producto ex F in B (quia eſt A ad B vt F ad G) Igitur productum ex C in A æquatur productis ex
19. ſeptimi. F in A, & ex F in B. Quoniam verò F æquatur ipſis D G. productum ex F in B æquatur productis ex D in B, & ex G in B. Quamobrem productum ex C in A æquatur. productis ex F in A. & ex D in B, & ex G in B. Itaque ſi hinc auferatur productus ex D in B, vtique productus ex C in A multatus producto ex D in B, hoc eſt K manebit æqualis productis ex F in A & ex G in B, hoc eſt ipſis R P. Iam verò quia idem A ductus in ſeipſum, & in F producit L & R. erit L ad R ſicut A ad F ſeu ſicut B ad G. Similiter quia idem B ductus in ſeipſum & in G producit M & P. erit M ad P ſicut B ad G. Igitur eſt L ad R ſicut M ad P. & duo antecedentes ſimul, nempe H ad conſequentes ſimul, nempe ad K; ſunt vt A ad F ſeu B ad G. Quod demonſtrandum erat.

His præmiſſis, ſi ponantur data latera C D. & ſint A. B. numeri Numerorum, ſitque vnum latus fictitium A − C, alterum B + D. fiet æquatio inter aggregatum quadratorum ab A & B, & inter duplum producti ex A in C multatum duplo producti ex B in D. nempe inter H & duplum ipſius K.

A 15 N. − C 6 F 5.
L 2.
B 3 N + D 4 G 1.
H 234 Q. K 78 N.

Quare orietur valor Numeri diuidendo duplum ipſius K per H, Quia autem vt H ad K, ſic eſt A ad F. erit & H ad duplum K, ſicut A ad duplum F. hoc eſt ad ſummam ipſorum C D. Quare hac ſumma diuiſa per A orietur quoque valor Numeri. Proinde reſoluendo hypoſtaſes cum vnitates ipſius A ducentur in valorem Numeri, fiet A æqualis ſummæ ipſorum C D, vnde patet A − C fore æqualem ipſi D. Similiter quia vt H ad duplum K. ſic eſt B ad duplum G. nempe ad E, diuiſo E per B orietur rurſus valor Numeri. Vnde reſoluendo hypoſtaſes cùm vnitates ipſius B. ducentur in valorem Numeri, fiet B æqualis ipſi E. Quamobrem B + D neceſſe erit æquari ipſi C. Quare ex omni parte patet propoſitum.

Idem quoque abſurdum ſequitur, cùm in vtroque latere fictitio ponuntur data latera cum ſigno defectus, ſi Numerorum numerus minori appoſitus, ad appoſitum maiori eandem rurſus habeat rationem quam habet ſumma datorum laterum ad eorundem interuallum, vt ſi in hypotheſi Diophanti ponatur alterum latus 5 N. − 2 alterum 1 N. − 3. Quod eadem facilitate demonſtratur, hoc præmiſſo Theoremate.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad ſecundum ſit vt ſumma tertij & quarti ad exceſſum quarti ſupra tertium, erit aggregatum quadratorum primi & ſecundi, ad aggregatum productorum ex primo in tertium, & ex ſecundo in quartum, ſicut primus ad ſemiſſem ſummæ tertij & quarti, vel ſicut ſecundus ad ſemiſſem interualli eorundem.

Demonſtratur autem hoc theorema eadem ferè ratione qua & præcedens, imò ex illo facilè infertur, probando ſcilicet eundem K fieri ſiue à producto ex A in C. auferatur productus ex B in D; ſiue producto ex A in D. addatur productus ex B in C. Quod tibi relinquo conſiderandum exercitationis ergo.

Varij Canones ex varia poſitionum inſtitutione formari poſſent, ſed quia parum in eis eſſet compendij, huic labori ſuperſedeo. Verùm Canonis loco libet explicare modum perficiendi hoc problema à Franciſco Vieta traditum zetetico 3. libri quarti, qui talis eſt.

Conſtituantur latera data, hypotenuſæ duorum triangulorum rectangulorum ſimilium. Summa baſeos primi & perpendiculi ſecundi; itemque interuallum perpendiculi primi & baſeos ſecundi: vel interuallum baſeos primi & perpendiculi ſecundi; itemque ſumma perpendiculi primi, & baſeos ſecundi conſtituent quæſitorum quadratorum latera.

Porrò quilibet numerus fit hypotenuſa trianguli rectanguli per præcedentem, diuidendo ſcilicet eius quadratum in duos quadratos. Verbi gratia, ſint data latera 2. & 3. ſi per Canonem præcedentis diuida 2. in duos planos ſimiles, videlicet qui ſint in ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{2}{5}$ & $\frac{8}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{6}{5}$ & $\frac{8}{5}$. Rurſus diuide 3. in duos planos ſimiles, quique ſint in eadem ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Habemus itaque latera circa rectum triangulorum ſimilium, nimirum $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{5}$ & $\frac{9}{5}$ $\frac{12}{5}$. ſumma baſeos primi & perpendiculi ſecundi eſt $\frac{18}{5}$ interuallum autem perpendiculi primi & baſeos ſecundi eſt $\frac{1}{5}$. Sunt ergo latera quæſitorum quadratorum $\frac{18}{5}$ & $\frac{1}{5}$. vel ſumma perpendiculi primi & baſeos ſecundi eſt $\frac{17}{5}$ interuallum autem baſeos primi & perpendiculi ſecundi eſt $\frac{6}{5}$. Rurſus ergo quæſitorum latera eſſe poſſunt $\frac{17}{5}$ & $\frac{6}{5}$. Huius rei demonſtratio in promptu eſt. Sunto data latera A. B. & inuenienda ſint alia latera, quorum quadrati æquentur quadratis ipſorum A B. fiat A hypotenuſa trianguli rectanguli per præcedentem, ſintque latera circa rectum C D. fiat item B hypotenuſa ſimilis trianguli, euius latera circa rectum ſint E F. Ita vt quadrati ipſorum C D ſint æquales quadrato abs A & quadrati ab E & F. ſint æquales quadrato abs B. & ſit C ad D vt E ad F. Denique ipſorum C F ſumma eſto G interuallum L. Item ipſorum E D ſumma eſto K interuallum H. Dico latera quæſita eſſe G H. vel etiam K L. Quia enim eſt C ad D vt E ad F. Erunt tam quadrati duorum G H. quàm quadrati duorum K L æquales quadratis omnium C D. E F. At quadrati ipſorum C D. E F æquantur quadratis duorum A B ex hypotheſi, igitur quadrati ipſorum A B æquantur quadratis ipſorum G H. vel etiam ipſorum K L. Quod erat demonſtrandum. *6. 3. poriſm.*

A 10. B 15.
C 8. E 12.
D 6. F 9.
G 17. H 6.
K 18. L 1.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE duos quadratos numeros in dato interuallo. Conſtitutum ſit interuallum ipſorum eſſe 60. Ponatur alterius latus 1 N. alterius verò 1 N. & quot-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μο ξ. τετάχθω ὁ μὲν πλευρὰ ς ἑνός. ὁ δὲ ἡ πλευρὰ ς ἑνὸς καὶ μο

ὅσων δή ποτε, μόνον ἵνα μὴ ὁ ἀπὸ τῶν μ° τετράγωνος ὑπεράρῃ τὴν ὑπεροχὴν τὴν δοθεῖσαν, οὕτω γὰρ ἑνὸς εἴδους ἑνὶ εἴδει ἴσου καταλειπομένου συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. ἔστω ὁ ς° ἑνὸς μ° γ. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι ἔσονται δ^υ μία, καὶ δ^υ μία, ςς^οι ς. μ° θ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς^οι ς μ° θ ταῦτα ἴσα μονάσιν ξ. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° η καὶ ἥμισυ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ μ° η καὶ ἥμισυ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ° ια καὶ ἥμισυ. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται ὁ μὲν μ° οβ α. δ^ξ ὁ δὲ ρλβ α. δ^ξ καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

libet vnitatum, dummodo harum quadratus non ſuperet interuallum datum. Sic enim vna ſpecie vni ſpeciei æquali remanente expedietur quæſtio. Eſto igitur 1 N. + 3. Ipſi igitur quadrati erunt 1 Q. & 1 Q. + 6 N. + 9. Interuallum ipſorum eſt 6 N. + 9. Hoc æquatur vnitatibus 60. & fit 1 N. 8 ½. Erit igitur prioris latus 8 ½. Poſterioris verò ½. Ipſi autem quadrati erunt, 72. ¼ & 132. ¼ & manifeſtum eſt ſatisfactum eſſe quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XI.

VERBA illa, *Dummodo harum quadratus non ſuperet interuallum datum*, cautè accipienda ſunt. Nam in exemplo Diophanti, vbi interuallum datum 60. non eſt quadratus numerus, res bene habet, nam cùm non poſſit dari quadratus æqualis numero non quadrato qualis eſt 60. quicunque quadratus accipiatur non maior quàm 60. is neceſſariò minor erit, quod requiritur vt æquatio ritè procedat. Sed ſi datum interuallum eſſet quadratus numerùs, tunc non ſufficeret ponere in latere ſecundi quadrati vnitates, quarum quadratus non ſuperaret datum interuallum, ſed ponendæ eſſent vnitates, quarum quadratus deficeret à dato interuallo. Verbi gratia ſit datum interuallum 25. Ponatur latus alterius quadrati 1 N. alterius verò 1 N. + 5. fient 10 N. + 25. æquales 25. Quare 10 N. æquabuntur nihilo. Itaque oportet fingi latus ſecundi quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 25. vt 1 N. + 1. & fient 2 N. + 1 æquales 25. eritque 1 N. 12. ſunt ergo quæſita latera 12. & 13. & ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem melius & vniuerſalius præſcribetur conditio hoc pacto. *Dummodo harum quadratus ſit minor dato interuallo.* Cæterùm ex operatione Diophanti elicietur huiuſmodi Canon.

Sume quemuis quadratum minorem dato interuallo, eumque ſubtrahe à dato interuallo, reſiduum diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, cui ſi addas latus ſumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter etiam inſtitui poteſt operatio, nimirum. Ponatur minor quæſitorum quadratorum 1 Q. ergo maior erit 1 Q. + 60. fingatur eius latus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 60. & fiet operatio eadem cum operatione Diophanti. Vel fingatur quadrati eiuſdem latus ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſit maior quàm 60. verbi gratia fingatur ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. + 60. & fiet 1 N. 2. eruntque quæſita latera 2. & 8. Hinc rurſus formabitur iſte Canon.

Sume quemuis quadratum maiorem dato interuallo, & ab eo ſubtrahe datum interuallum, reſiduum diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, quod ſubtrahe à latere ſumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter rurſus Ponatur maior Quadratus 1 Q. erit ergo minor 1 Q. − 60. cuius latus fingatur ab 1 N. − quotlibet vnitatibus, puta ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. − 60. & fiet 1 N. 8. eruntque quæſita latera 8. & 2. Hinc etiam formatur huiuſmodi Canon.

Sume quemlibet quadratum quem adde dato interuallo, ſummam diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, à quo aufer latus ſumpti quadrati, vel contrà; fiet alterum latus.

Porrò Canon omnium elegantiſſimus, & quo ſequenti quæſtione vtitur Diophantus, & alibi ſæpe elicitur ex tertia ſecundi poriſmatum, adiuuante vigeſima tertia primi, vel Canone primæ primi Diophanti, nimirum.

Cape duos numeros quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, horum ſummæ ſemiſſis, & ſemiſſis interualli eorundem, quæſitorum quadratorum exhibebunt latera.

A 60.
B 10. C 6.
D 8. E 2.

Sit enim A datum interuallum, & ex B in C fiat A. ſummæ autem ipſorum B C ſemiſſis eſto D, ſemiſſis verò interualli eorundem B C. eſto E. Quia ergo conſtat per vigeſimam tertiam primi poriſmatum, vel per Canonem primæ primi Diophanti ſummam ipſorum D E æquari ipſi B, & interuallum eorundem D E æquari ipſi C patet A fieri ex ſumma ipſorum D E in eorundem interuallum. Quamobrem A eſt interuallum quadratorum ab ipſis D E. Quod erat propoſitum.

Hinc autem melius & vniuerſalius quàm modo à Xilandro tradito cognoſci poterit, an in in-

tegris quæſtio ſolui poſſit, immò & an pluribus modis in integris ſolutio contingat: ſi enim ipſi B C tales deligi poſſint, vt vterque ſit par vel vterque impar, patet tam eorum ſummæ, quàm interualli ſemiſſem in integris haberi. Quare ipſi D E integri erunt vt iam docuimus ad primam primi. Si autem ipſorum B C. alter ſit par, alter impar, non poterunt ipſi D E haberi niſi diuiſa vnitate. Quamobrem quot modis reperiri poterunt duo numeri mutuo ductu conficientes datum interuallum, quorum vterque ſit par, vel vterque impar, tot modis per integros ſoluetur quæſtio. Vt dato interuallo eodem 60. quia id fit tum ex 10 in 6. tum ex 30. in 2. quorum vterque par eſt duobus modis in integris continget ſolui quæſtionem, eruntque quæſita latera 8 & 2 vel 16 & 14. ſimiliter dato interuallo 15. quia id fit tum ex 15 in 1. tum ex 5 in 3. duobus modis in integris ſoluetur quæſtio, eruntque quæſita latera 8 & 7. vel 4 & 1. Rurſus dato interuallo 48. quia id fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. tribus modis ſoluetur quæſtio per integros, & erunt quæſita latera 13. & 11. vel 8 & 4. vel denique 7 & 1. Vnde ſequitur quod iam aliter demonſtrauimus in Corollario vigeſimæ ſecundæ primi poriſm. ſi datum interuallum ſit pariter impar tantum, non poſſe ſolui quæſtionem in integris, nam non metietur illud numerus par per parem, alioquin eſſet pariter par contra hypotheſim, non metietur etiam idem interuallum numerus impar per imparem, alioquin eſſet impar, quod eſt etiam contra hypotheſim. Quamobrem relinquitur vt metiatur tantùm illud numerus par per imparem, ac proinde, vt oſtenſum eſt, non continget ſolutio in integris. Si autem datum interuallum ſit impar, vel quilibet numerus pariter par ſupra quaternarium, ſoluetur quæſtio ſemper in integris. Quia quemlibet imparem vnitas metitur per ipſummet imparem. At quemlibet pariter parem metitur binarius per eiuſdem pariter paris ſemiſſem qui ſemper eſt par. Excluditur autem quaternarius, quia metitur eum tantum binarius per binarium non poteſt autem idem binarius eſſe ſumma & interuallum duorum eorundem numerorum, niſi pars ponatur æqualis toti. 8. 1. poriſ.

QVÆSTIO XII.

DATIS duobus numeris addere eundẽ numerum, & vtrumque quadratum efficere. Sint dati numeri 2 & 3. & eſto addendus 1 N. erit ergo tum 1 N. + 2. tum 1 N. + 3. æqualis quadrato. Et hoc genus vocatur duplicata æqualitas, æquatur autem ſic. Interuallo conſpecto, quære duos numeros quorum vnius in alterum multiplicatio producat iſtud interuallum. Sunt autem hi 4. & $\frac{1}{4}$. Horum vel interualli ſemiſſis in ſe ductus æquatur minori, vel ſummæ ſemiſſis in ſe ductus æquatur maiori. Sed interualli ſemiſſis in ſe ductus facit $\frac{225}{64}$ hoc æquatur 1 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{97}{64}$. Summæ verò ſemiſſis in ſe ductus facit $\frac{289}{64}$ hoc æquatur maiori, nimirum 1 N. + 3. & fit 1. N. rurſus $\frac{97}{64}$. Erit igitur addendus numerus $\frac{97}{64}$ & manifeſtum propoſitum.

Ne autem in duplicatam æqualitatem incidamus, ſic agendum. Inuenire numerum qui & ad 2. & ad 3. additus, vtrumque quadratum efficiat. Quæro prius numerum aliquem qui adſumens binarium faciat quadratum, vel quis numerus adiecto ternario fiat quadratus. Porro à quocunque quadrato ſubtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur. Agamus de 2. is auſe-

ΔΟΘΕΙΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἔστω τῷ β̄ καὶ τῷ γ̄ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ϛ^ο ἑνός. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ϛ^ο ἑνὸς μ^ο β̄. ὁ δὲ ϛ^ο ἑνὸς μ^ο γ̄ ἴσοι τετραγώνοις. καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοϊσότης, ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰδὼν τὴν ὑπεροχὴν ζήτει δύο ἀριθμοὺς, ἵνα τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ποιῇ τὴν ὑπεροχήν. εἰσὶ δὲ μ^ο δ̄ καὶ μονάδος τέταρτον. τούτων ἤτοι τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι. ἀλλὰ τὸ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτό ἐστι σκε ξδ^α. ταῦτα ἴσα ϛ^ο ἑνὶ μονάσι δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο ϟζ ξδ^α. τὸ δὲ συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτό ἐστι σπθ ξδ^α. ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστι ϛ^ο ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο πάλιν ϟζ ξδ^α. ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος ϟζ ξδ^α. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐμπέσῃ δεικτέον οὕτως. τῷ δύο καὶ τῷ τρία προσευρεῖν τινὰ ἀριθμὸν ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιεῖ τετράγωνον ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμὸν ὃς προσλαβὼν μονάδας δύο ποιεῖ τετράγωνον, ἢ καὶ τὶς ἀριθμὸς προσλαβὼν μονάδας τρεῖς ποιεῖ τετράγωνον. ἀφ᾽ οὗ δ᾽ ἂν τετραγώνου ἀφέλω τὰς μονάδας β̄ ἢ γ̄ ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ ἐπὶ τῶν μονάδων δύο, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ δυνά-

μενος μιᾶς, λοιπὸν ἔσται δύναμις μία λείψει μο β. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν προσλάβῃ μονάδας β̄ ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν προσλάβῃ μονάδας τρεῖς, γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛ ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προϋποτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας, εἰσὶ δὲ ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰς μονάδας β̄. οὕτως γὰρ ἐν ἑκατέρῳ αὐτῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω ἀπὸ ϛ ἑνὸς λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δύναμις μία, μο ιϛ λείψει ϛϛ η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάδι μιᾷ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ η ἴσοι μονάσι ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε η. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ προστιθέμενος ϟζ ξδ.

rarur ab 1 Q. ſupereſt 1 Q. − 2 & eſt euidens hunc ſi abſumat 2. fore quadratũ. Sed ſi adſumat 3. fit 1 Q. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum vt reſolutis hypoſtaſibus 1 Q. ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 2. Sic enim ex vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto ergo ab 1 N. − 4 ipſe quadratus erit 1 Q. + 16 − 8 N. Hoc æquatur 1 Q. + 1. Communis addatur defectus, & auferantur a ſimilibus ſimilia, relinquuntur 8 N. æquales 15. & fit 1 N. $\frac{15}{8}$ Ad poſitiones. Erit addendus numerus $\frac{97}{64}$.

IN QVAESTIONEM XII.

DVPLICI operatione quæſtionem hanc eleganter abſoluit Diophantus, ſed neutram Scholiaſtes, Xilanderve ſatisfeliciter explicauit. Sanè quod ad primam attinet, in qua duplicata æqualitate vtitur author, benè monet vterque eam oiti primæ ſecundi. Sed id ſolùm non ſufficit vt eius adæquata ratio perfectè comprehendatur, nam licet inuenerimus duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri ea lege vt maior maiorem datorum ſuperet, & minor minorem, non ſtatim conſtat per hanc duplicatam æqualitatem vtrobique reperiri eundem valorem Numeri, quod vnum curandum eſt vt quæſtio perfectè ſoluta ſit. Hoc ergo ſic demonſtrabimus. Sint dati Numeri A B. quorum interuallum C. Ponendo ergo quæſitum numerum 1 N. erunt quadrato æquandi 1 N. + A & 1 N. + B. ſumantur duo quadrati D E eodem interuallo C diſtantes, ita vt D ſit maior quàm A, & E ſit maior quàm B. Dico ſiue D æquetur 1 N. + A. ſiue E æquatur 1 N + B. eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quia enim ex conſtructione eſt in arithmetica medietate A ad B vt D. ad E. erit & permutando in eadem medietate A ad D, ſicut B ad E. Igitur ſi ſumatur F exceſſus D ſuper A, erit idem F exceſſus E ſuper B. Cùm ergo æquando D cum 1 N + A. detrahentur ſimilia à ſimilibus, nimirum cùm A vtrimque auferetur, remanebit F æqualis 1 N. ſed etiam æquando E cum 1 N + B auferetur vtrimque. B & remanebit idem F æqualis 1 N. Quare conſtat propoſitum.

A		B
1 N. + 30.		1 N. + 6.
	C 24.	
D 49.	F 19.	E 25.

7. 2. poriſm.

Hoc demonſtrato, patet totum duplicatæ æqualitatis negotium in eo verſari, vt inueniantur duo quadrati eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri, quod ſanè fit per Canonem poſtremum ad præcedentem allatum, qui vt oſtenſum eſt, totus pendet à tertia ſecundi poriſmatum, quæ eadem eſt cum quinta ſecundi elementorum. Verùm quilibet quadrati quorum ſit idem interuallum qui & datorum numerorum, non ſtatim apti ſunt duplicatæ æqualitati reſoluendæ, ſed tales deligendi ſunt, vt maior ſuperet maiorem datorum numerorum, & minor minorem.

Hoc quidem vidit Scholiaſtes, ſed in eo allucinatus eſt, vt benè monet Xilander, quod arte certa tales quadratos reperiri poſſe negauit. Ipſe quoque Xilander in affinem eius quem reprehendit errorem lapſus meliora non affert, ſed indicata tantum neceſſitate tales quadratos repetiendi, quo pacto id fieri oporteat, minimè docet. Res tamen facilis eſt, nam tales numeri ſumendi ſunt quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, vt ſummæ illorum ſemiſſis quadratus excedat maiorem datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti; vbi interuallum eſt 1. maior numerorum 3. oportet inuenire duos numeros quorum mutuo ductu fiat 1. & quorum ſummæ ſemiſſis quadratus ſit maior quàm 3. Quare cùm ſummæ ipſius quadratus ſit quadruplus quadrati ſemiſſis, oportet ſummæ quadratum excedere 12. Proinde cùm latus proximè maius ipſius 12. ſit 3. $\frac{1}{2}$. neceſſe eſt ſummam quæſitorum numerorum quorum mutuo ductu fiat 1. excedere 3 $\frac{1}{2}$. vel ſanè non eſſe minorem. Hinc eſt cur abiectis 2. & $\frac{1}{2}$. Itemque 3. & $\frac{1}{3}$. ſe legerit Diophantus 4. & $\frac{1}{4}$. potueritque eorum loco ſumere 5. & $\frac{1}{5}$. vel 6. & $\frac{1}{6}$ alioſque infinitos, quorum ſumma maior eſt quàm 3 $\frac{1}{2}$. Ita ſi dati numeri ſint 30. & 6. cùm eorum interuallum ſit 24. maior vero ipſorum 30. cuius quadruplum 120. quærendi erunt duo numeri quorum mutuo ductu fiat 24. ita vt eorum ſummæ quadratus excedat 120.

Quare cùm radix proximè maior ipſius 120. ſit 11. oportebit quæſitorum numerorum ſummam eſſe minorem quam 11. vel certè non minorem. Quarè ritè ſumi potuerunt 2. & 12. vel 3. & 8. aliique infiniti quorum ſumma maior, vel non minor quam 11. ſed eandem ob cauſam reiicientur 4. & 6. aliique infiniti quorum ſumma minor quam 11.

Quod attinet ad ſecundam operationem verba, illa ὥστε τὴν τ̃ δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰ, τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας, alio mendo non laborant, quicquid dicat Xilander, niſi quod vox τετάρτης temerè inculcata erat, nam legebatur in codice manuſcripto, αὐτὸς τὰς προεκτεθειμένας τῆς τετάρτης λείψεως μονάδας. Cæterum hac voce ſublata, reliqua bene habent, nec vllam pariunt difficultatem, niſi ex praua Xilandri interpretatione, qui ea ſic conuertit. *vt ſubſtantia quadrati earum ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cùm tamen vox Hypoſtaſis hoc loco & alibi ſemper apud Diophantum ſignificet, non ipſas vnitates quæ ponuntur in latere fictitio, ſed ipſum valorem numeri vel quadrati poſitionibus applicatum, vt iam docuimus ad primam primi. Hinc etiam erroris cauſam præbuit Xilander Chriſtophoro Clauio cap. 29. ænigmate 98. ſed & Raphaël Bombellius in eodem lapſus eſt lib. 3. ſuæ Algebræ Problemate 66. Quare relictis illorum inutilibus commentis, genuinus horum verborum ſenſus hic eſt. *vt quadrati hypoſtaſis ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates*, vel vt clarioris doctrinæ gratia interpretati ſumus, *vt reſoluti hypoſtaſibus 1 Q ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cum enim quæſitus numerus poſitus ſit 1 Q − 2. manifeſtum eſt valorem quadrati talem reperiri debere vt ſuperet 2. Id autem arte certa qui conſequi poſſis non docuit hîc Diophantus. Sed profectò in ſequentibus ſæpe tali vtitur artificio quoties ſimile quid accidit. Quia numerus æquandus quadrato eſt 1 Q + 1. patet ſi eius latus fingatur 1 N − aliquot vnitatibus valorem Numeri oriri diuidendo quadratum ipſarum vnitate multatum per duplum earundem vnitatum. Quia vero 1 Q. vt dictum eſt debet eſſe maior quàm 2. ſumpto latere proximè maiore ipſius 2. nimirum 1 ½. oportet valorem numeri maiorem eſſe, vel certè non minorem quàm 1 ½. Igitur eò redacti ſumus vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate multatus & diuiſus per duplum ipſius numeri, det quotientem maiorem vel certè non minorem quàm 1 ½. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1Q-1}{2N}$ maior eſt vel certè non minor quàm 1 ½. & omnia multiplicando per 2 N. fit 1 Q − 1. non minor quàm 3 N, ac proinde 1 Q. non minor quàm 3 N. + 1. qua æquatione reſoluta, fit 1 N. non minor quàm R 3¼ + 1 ½. ſumptoque latere ipſius 3 ¼. nimirum 2 ſi ei addas 1 ½. fit 1. N. non minor quàm 3 ½. Quamobrem æquantes quadrato 1 Q. + 1. fingemus eius latus 1 N. − quotlibet vnitatibus quæ ſuperent 3 ½. ſic Diophantus finxit hoc latus 1 N. − 4. Poſſetque etiam fingi 1 N. − 5. vel 1 N − 6. & ſic in infinitum. Itaque vt iſta tyronum memoriæ firmius inhæreant, placet paulò aliter poſitiones inſtituere, quod fieri poſſe inoteauit Diophantus his verbis. *Porrò à quocunque quadrato ſubtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur.* Ponatur quæſitus numerus 1 Q. − 3. is enim adſumpto 3. quadratum facit: At idem abſumpto 2. facit 1 Q − 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt hypoſtaſis quadrati ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 3. vt ergo determinemus de hoc vnitatum de numero, quia fiet valor Numeri diuidendo quadratum quæſitarum vnitatum auctum vnitate per duplum earundem vnitatum; At oportet 1 Q. maiorem eſſe quàm 3. atque adeo 1 N. maiorem eſſe vel certè non minorem latere proximè maiore ipſius 3. quod eſt 2. Patet eò nos adduci vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate auctus, & diuiſus per duplum ipſius numeri det quotientem non minorem quàm 2. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1Q}{2N}$ + $\frac{1}{2N}$ maior eſt, vel certè non minor quàm 2. & omnia in 2 N. Igitur 1 Q. + 1. maior eſt vel certè non minor quàm 4 N. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. vel 2 + R 3. vel 2 − R 3. & loco R 3 ſumendo latus proximè minus ipſius 3. nempe 1 ⅔. fit 1 N. vel maior quàm 3. ⅔ vel minor quàm ⅓. Hic enim ob valorem Numeri duplicem, duplex inuenitur terminus alter ſupra quem, alter verò infrà quem, ſuni poteſt valor Numeti. Poſſumus ergo quadrato æquantes 1 Q. − 1. eius latus fingere ab 1. N. − quotlibet vnitatibus quæ ſint maiores quàm 3 ⅔. vel minores quàm ⅓. fingatur 1 N. − 4 fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q − 1. & tandem 1 N. eſt 17/8 vnde fit quæſitus numerus 97/64. idem qui repertus eſt per operationem Diophanti. Fingatur rurſus latus Quadrati 1 N. − ⅕ fiet quadratus 1 Q − ⅖ N. + 1/25 æqualis 1 Q − 1. vnde fit 1 N. 13/5 & eſt quæſitus numerus 94/25. cui addendo 3. & 2. fiunt quadrati 169/25 & 144/25.

Si cui porrò laborioſior videbitur hæc operatio, licebit etiam aliam inſtituere magis expeditam, & quæ tantas difficultates minimè patiatur. Fingatur in eodem exemplo, quadratus aliquis ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet maiorem datorum numerorum 3. puta ab 1. N. + 2. fiet quadratus 1. Q. + 4 N. + 4. Hinc ergo auferendo 3. ſtatuatur reſiduum quæſitus numerus, nempe 1 Q. + 4 N. + 1. is enim adſumens 3. facit quadratum. Reſtat vt & adſumpto 2. quadratum faciat. Facit autem 1 Q + 4 N. + 3. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 3. vnitates numeri quadrato æquandi, eſto latus illud 1 N. − 3. fiet quadratus 1 Q − 6 N. + 9. æqualis 1 Q. + 4 N. + 3. & fit 1 N. ⅗ eſtque quæſitus numerus

$\frac{24}{35}$ vt ſuprà. Ex his omnibus operationibus varij Canones elici poſſunt, ſed omnium facillimus à prima fit, nimirum.

Cape duos quadrates eodem interuallo diſtantes quo & dati numeri diſtant, ſed illis maiores, & à maiore quadrato aufer maiorem numerum, vel à minore minorem, reſiduum quod erit idem vtrobique, quæſitum exhibebis numerum.

QVÆSTIO XIII.

Ἀπὸ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ θ. καὶ τοῦ κα. ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐὰν δ' αὖ τετράγωνον ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπὸν λείψει τούτου, ὃς ἐστι γὰρ ἀφαιρούμενος καταλείπει τετράγωνον. ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τῶν μο θ ἀφαιρούμενος τετράγωνος δύναμις μία, λοιπαὶ ἄρα μονάδες θ λείψει δυνάμεως α. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ μο κα ἀφελεῖν μο θ λείψει δυνάμεως μιᾶς καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ μο κα ἀφέλω μο θ. λείψει δυνάμεως α λοιπὸν δύναμις α μο ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςου ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τῶν μο ιβ. οὕτω γὰρ πάλιν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς, μο ις λείψει ςς η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάσι ιβ. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ςςοὶ η ἴσοι μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ η. αἱ μὲν θ μονάδες συνάγουσιν οβ η. τουτέστι φος ξδ. ἡ δὲ λεῖψις δυνάμεως μιᾶς ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῶν ις ξδ. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

A Datis duobus numeris auferre eundem numerum, & facere reſiduum vtrumque quadratum. Iniunctum ſit vt à 9. & à 21. auferatur idem numerus, & vtrumque reſiduum ſit quadratus numerus. Qualemcunque verò quadratum aufero de altero ipſorum; ſtatuam reliquum cum hujus defectu, is enim detractus relinquet quadratum. Eſto igitur quadratus à 9. detractus 1 Q. relinquentur ergo 9 − 1 Q. Oportet igitur etiam à 21. auferre 9 − 1 Q. & facere quadratum. Sed ſi à 21. abſtulero 9. − 1. Q. relinquitur 1 Q. + 12. Hoc ergo æquatur quadrato, Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt quadratum earum amplius ſit quàm 12. Sic enim rurſus ab vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto itaque vnitatum 4. ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 16. − 8. N. qui æquabitur 1 Q. + 12. Auferantur à ſimilibus ſimilia: relinquuntur 8 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$ Atqui 9. faciunt $\frac{72}{8}$ ſeu $\frac{576}{64}$, vnde defectus 1 Q. auferatur, ſcilicet $\frac{16}{64}$. & ſatisfit propoſito.

IN QVÆSTIONEM XIII.

LIMITATIO quam præſcribit Diophantus circa latus fictitium, omnino inſufficiens eſt. Quod ſi liber experiri finge illud 1 N. − 8. quandoquidem quadratus ipſius 8. excedit 12. fiet quadratus 1 Q. − 16 N. + 64. æqualis 1 Q. + 12. & fiet 1 N. 3 $\frac{1}{4}$. Quare quæſitus numerus qui poſitus erat 9. − 1 Q. haberi non poterit, quia 1 Q. eſt maior quàm 9. Itaque cùm duo præſcribendi eſſent termini intra quos cadere debet numerus vnitatum ponendus in latere fictitio, vnum duntaxat præfiniuit Diophantus, nimirum 12. ſeu potius latus ipſius 12. Quod cùm ſit paulò minus quàm 3 $\frac{1}{2}$. rectè dicemus cum Diophanto numerum illum vnitatum debere ſuperare 3 $\frac{1}{2}$. vel certè non eſſe minorem. Sed hoc non ſufficit, nam præterea neceſſe eſt, talem fieri valorem Numeri vt reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. ſit minor quam 9. quia ſcilicet quæſitus numerus poſitus eſt 9 − 1 Q. Quare oportet 1 N. minorem eſſe quàm 3. Quia ergo æquando quadrato 1 Q. + 12. & fingendo latus 1 N. − aliquot vnitatibus, fit valor Numeri ex quadrato vnitatum illarum multato numero 12. & diuiſo per duplum ſui lateris, eo redigimur vt inueniamus talem vnitatum numerum, cuius quadratus multatus numero 12. & diuiſus per duplum ſui lateris, det quotientem minorem quàm 3. Eſto talis numerus 1 N. Ergo $\frac{1Q - 12}{2N}$ minor eſt quàm 3. & omnia in 2 N. fit 1 Q. − 12. minor quàm 6 N. & tandem fit 1 Q. minor quàm 6. N. + 12. qua reſoluta occaſione 1 Q. minor quàm R 21. + 3. ſeu minor quàm 7 $\frac{3}{5}$ ferè quamobrem neceſſe eſt omnino numerum vnitatum ponendarum in latere fictitio cadere inter 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{3}{5}$ quales ſunt 4. 5. 6. 7. & alij infiniti admittendo fractiones.

Cæterum,

Cæterum, vt benè monet Xilander, hæc quæſtio non ſecus ac præcedens per duplicatam æqualitatem ritè ſolui poteſt. Verbi gratia ſi dati ſint numeri 9. & 21. Ponatur quæſitus ab vtroque auferendus 1 N. ergo tam 9. − 1 N. quam 21 − 1 N. æquatur quadrato. Horum interuallum eſt 12. Quare tales ſeligendi ſunt numeri, quorum mutuo ductu fiat 12. vt ſemiſſis ſummæ illorum quadratus ſit minor quàm 21. vel quod idem eſt, vt ſemiſſis interualli quadratus ſit minor quàm 9. ob contrariam ſcilicet rationem eius, ob quam in præcedente requirebatur contrarium. Memores igitur eorum quæ docuimus in præcedente, quia quadruplum ipſius 21. eſt 84. dicemus numerorum quorum mutuo ductu fiet 12. ſummæ quadratum minorem eſſe debere quàm 84. Quare cùm proximum latus de 84. ſit 9. $\frac{1}{6}$. oportebit ſummam talium numerorum minorem eſſe quàm 9 $\frac{1}{6}$. qualis eſt ſumma ipſorum 2. & 6. vel ipſorum 3. & 4. & aliorum infinitorum. Quod ſi ſumamus 2. & 6. erit quadratus ſemiſſis ſummæ illorum 16. at quadratus ſemiſſis interualli fiet 4. Siue igitur 4 æquetur 9. − 1 N. ſiue 16. æquetur 21. − 1 N. fiet vtrobique idem valor numeri 5. Quare 5. eſt quæſitus numerus, qui ab vtroque datorum detractus relinquit quadratos 4. & 16. Hinc etiam cum Xilandro eliciemus Canonem.

Sume duos quadratos eodem diſtantes interuallo, quo dati numeri diſtant, ſed minores illis. Tum à maiore numero aufer maiorem quadratum, vel à minore minorem. Reſiduum quod erit idem vtrobique, quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIV.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, ita vt reſiduum vtrumque ſit quadratus numerus. Conſtitutum ſit ab eodem numero auferre 6. & 7. & vtrumque reſiduum facere quadratum. Ponatur quæſitus numerus 1 N. & ſi ab eo abſtulero 6. relinquitur 1 N. − 6. æqualis quadrato. Si autem abſtulero 7. relinquitur 1 N. − 7. & rurſus in hoc caſu duplicata æqualitas exiſtit. Et quoniam horum interuallum, puta 1. continetur ſub 2. & $\frac{1}{2}$ fiet tandem 1 N. $\frac{121}{16}$ & ſatisfacit propoſito.

Ne verò in duplicatam æqualitatem deueniatur, ſic indagabimus. Quæremus primò a quo numero 6. ſubtractus, relinquat quadratum. Cæterùm cuicunque quadrato adiiciamus 6. is erit qui quæritur. Eſto igitur quadrato 1 Q. erit ergo qui quæritur 1 Q. + 6. & patet ſi ab eo auferantur 6. relinqui quadratum. Oportet igitur auferre quoque 7. ab 1 Q. + 6. & facere quadratum. Quamobrem 1. Q. − 1. æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. − 2. Ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 4. − 4 N. Hoc æquatur 1 Q. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Erit ergo qui quæritur $\frac{121}{16}$ & ſoluit quæſtionem.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. Ἐπιτετάχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφελεῖν τὸν ϛ̄ καὶ τὸν ζ̄. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ ζητούμενος ςº ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μονάδας ϛ̄ λοιπὸς ςº ᾱ λείψει μº ϛ̄ ἴσος τετραγώνῳ, ἐὰν δὲ μονάδας ζ̄. λοιπὸς ςº εἷς λείψει μº ζ̄. καὶ πάλιν ὁμοίως ἐπὶ τούτου ἐστὶ ἡ διπλοϊσότης. ἐπειδή περ ἡ ὑπεροχὴ μονὰς οὖσα μία περιέχεται ὑπὸ μº β̄. καὶ μονάδος ἡμίσεος. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ρκα ιϛ. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐξέρχηται. ζητητέον οὕτως. ζητῶ πρότερον ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφέλω μº ϛ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ᾧ δὲ ἂν τετραγώνῳ δηλονότι προσθῶ τὰς μº ϛ̄. ἐκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ δυνάμεως μιᾶς. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος δύναμις ᾱ μονάδες ϛ̄. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μº ϛ̄ ὁ λοιπὸς ἔσται τετράγωνος. δεήσει ἄρα καὶ μονάδας ζ̄. ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς δυνάμεως μιᾶς μº ϛ̄. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δύναμις ἄρα μία λείψει μονάδος μιᾶς ἴση τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςº ᾱ λείψει μº β̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις μία, μονάδες δ̄ λείψει ςς δ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ λείψει μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε δ. ἔσται ὁ ζητούμενος ρκα. ιϛ καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIV.

PRIMÆ operationi, in qua vtitur duplicata æqualitate Diophantus, nullam adiicit conditionem, nec adiicienda eſt aliqua, vt malè arbitratur Xilander. Cùm enim quadrati qui capiun-

tur eodem diſtantes interuallo quo & dati numeri, addendi ſint ipſis datis numeris, minor ſcilicet maiori, & maior minori, patet vt additio perfici poſſit non referre verum tales quadrati maiores ſint datis numeris vel, minores. Quod in duabus præcedentibus circumſpiciendum erat, quia in illis ſubſtractione vtendum fuit non additione; allucinatus ergo eſt Xilander exiſtimans vtendum hic eadem cautione in huiuſmodi quadratis deligendis, qua fuit vtendum in duodecima. quod & exemplo ab ipſomet allato confirmare facile eſt. Sint dati numeri 41. & 65. quorum interuallum 24. quod fit ex 4. in 6 vel ex 3. in 8. hos tamen binos rem expedire poſſe negat Xilander, idque conſtare experientia ait. Sed ſanè conſtat experientia falli Xilandrum. Nam ipſorum 4. & 6. ſummæ & interualli ſemiſſes ſunt 5. & 1. quorum quadrati 25. & 1. Quare ſi addas 1. ad 65. vel 25. ad 41. fiet vtroque modo quæſitus numerus 66. vt patet. Rurſus ipſorum 3. & 8. ſummæ & interualli ſemiſſes ſunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{5}{2}$ quorum quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{25}{4}$ & ſi addas ad 65. vel $\frac{121}{4}$ ad 41. fit vtroque modo quæſitus numerus 71 $\frac{1}{4}$ qui ſatisfacit propoſito.

Porrò vt modus hic vtendi duplicata æqualitate perfectè demonſtratus maneat, ſint dati numeri A maior & B minor, horumque interuallum C. & ponatur quæſitus numerus 1 N. Igitur æquandi quadrato erunt 1 N. — A. & 1 N. — B. Sumantur itaque duo quilibet quadrati, D maior & E minor, quorum interuallum ſit idem C. Quia ergo ob maiorem defectum totus 1 N. — A minor eſt toto 1 N. — B. æquabimus illi minorem quadratum E, maiorem verò D huic. Et in prima æquatione ſupplendo defectum, fiet 1 N, æqualis ſummæ ipſorum A E. At in ſecunda fiet 1 N. æqualis B D. ſumma autem ipſorum A E æqualis eſt prorſus ſummæ ipſorum B D, quia, cùm ſint arithmeticè proportionales A ad B vt D ad E, eſt ſumma extremorum A E æqualis ſummæ mediorum B D. Quamobrem in vtraque æquatione fit idem valor Numeri. Quod demonſtrandum erat. Hinc elicitur Canon à Xilandro traditus.

1 N. — A 30. 1 N. — B 6.
C 24.
E 25. D 49.

4. 1. poriſm.

Cape duos quadratos eodem diſtantes interuallo, quo & dati numeri, horum minorem adde maiori numero, & maiorem minori, vtroque modo fiet idem quæſitus numerus.

Secundæ verò operationi vt perficitur à Diophanto, limitatio quædam adiicienda erat; nam cùm numerus quadrato æquandus ſit 1 Q. — 1. debet eius latus fingi ab 1 N. — tot vnitatibus, vt tandem valor quadrati inueniatur excedens 1. Quare ſi eodem vtaris artificio, quo vſi ſumus in præcedentibus, inuenies latus illud fingendum eſſe ab 1 N — aliquo vnitatum numero maiore quàm 1. vel minore quàm 1. alioquin ſi ponatur latus illud 1 N. — 1. reperietur 1 Q. — 1 nihil eſſe. Ita ſi propoſiti numeri ſint 30. & 6. ponatur quæſitus 1 Q. + 6. vnde auferendo 30. remanet 1 Q. — 24. æquandus quadrato. Cuius latus fingendum ab 1 N. — tot vnitatibus vt tandem 1 Q. ſit maior quàm 24. Quare cùm latus proximè maius ipſius 24. ſit 5. oportet 1 N. non minorem eſſe quàm 5. fit autem 1 N. ex quadrato vnitatum quæ ponuntur in latere fictitio, adſumente numerum 24. diuiſoque per duplum ſui lateris. Ponatur ergo hic vnitatum numerus 1 N. Igitur $\frac{1 Q.}{2 N.}$ + $\frac{24}{2 N.}$ maior eſt vel ſaltem non minor quàm 5. & omnia in 2 N. fit 1 Q. + 24. non minor quàm 10 N. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. vel 6. vel 4. Quare oportet talem poni in latere fictitio vnitatum numerum, vt ſit non minor quàm 6. vel non maior quàm 4. Qua ratione excluduntur tantùm omnes numeri inter 4. & 6. fingatur ergo latus 1 N. — 4. fiet quadratus 1 Q. — 8 N. + 16. æqualis 1 Q. — 24. Vnde fiet 1 N. 5. erit ergo quæſitus numerus 31. & ſatisfacit propoſito. Vel fingatur idem latus 1 N. — 6 fiet rurſus 1 N. 5. & quotieſcunque ſumentur duo numeri vnus maior quàm 6. alter minor quàm 4. ita vt maior ad ipſum 6. eandem habeat rationem quam habet 4. ad minorem, eadem per vtramque æquationem continget ſolutio. Ita ſi eiuſdem numeri 1 Q. — 24. latus fingas 1 N. — 2. vel 1 N. — 12. fiet idem valor Numeri 7. Itemque ſiue fingas idem latus 1 N. — 3. ſiue 1 N. — 8. fiet idem valor Numeri 5 $\frac{1}{2}$. & ſic de alijs. Quod adnotaſſe fuit operæ pretium.

Poteſt tamen operatione paulum immutata, tam laborioſæ conditionis neceſſitas euaneſcere. Si videlicet, ponatur quæſitus numerus 1 Q. + maiore datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti ponatur quæſitus numerus 1 Q. + 7. hinc ergo detracto 6. remanet 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. — tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 1. & manifeſta eſt ſolutionis ratio. Ita ſi dati ſint numeri 30. & 6. Pono quæſitum 1 Q. + 30. vnde auferendo 6. remanet 1 Q. + 24. æquandus quadrato, cujus latus fingo ab 1 N. — tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 24. Hine etiam licebit elegantem formare Canonem.

Datorum numerorum interuallum aufer ab aliquo quadrato, reſiduum diuide per duplum lateris eiuſdem quadrati, quotientis quadratus additus maiori datorum numerorum, quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XV.

TON ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετρά-

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum,

qui vtramque partem adſumens faciat quadratum. Sit diuidendus 20. in duos numeros. Exponantur duo numeri, vt quadrati eorum ſimul minores ſint quàm 20. puta 2. & 3. & ſi vtrique adiiciatur 1 N. erunt quadrati ab ipſis, hic quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Ille verò 1 Q. + 6 N. + 9. Si ergo ab vtroque abſtulero 1 Q. qui vtrique quadratus eſt, habebo quæſitos numeros, qui adſumentes videlicet quadratum, facient quadratum. Sed ſi abſtulero 1 Q. relinquuntur, hinc quidem 4 N. + 4. Inde vero 6 N. + 9. Oportet ergo ſummam iſtorum, nimitum 10. N. + 13. æquari 20. & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. Eſt igitur hic quidem $\frac{68}{10}$ ille verò $\frac{132}{10}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

γωνον ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω τὸν κ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. ἔκθου δύο ἀριθμοὺς. ὥστε τοὺς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνους ἐλάσσονας εἶναι μο κ. ἔστω δὴ ὁ δύο καὶ ὁ τρία. καὶ προστεθέντος ἑκατέρῳ ς^ο ἑνὸς, ἔσονται οἱ ἀπὸ τούτων τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ςς δ μο δ. ὃς δὲ δυνάμεως μιᾶς ςς ς μο θ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τὴν δύναμιν, τουτέστι τὸν τετράγωνον ἕξομαι τοὺς ἐπιζητουμένους, οἱ προσλαμβάνοντες δηλονότι τετράγωνον ποιοῦσι τετράγωνον ἀλλ᾽ ἐὰν ἀφέλω δύναμιν μίαν λοιποὶ ἔσονται. ὁ μὲν ςς δ μο δ. ὁ δὲ ςς ς μο θ. δεήσει ἄρα τὴν σύνθεσιν αὐτῶν, τουτέστι ςς^οι ι. μο ιγ. ἴσους εἶναι μονάσι κ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ι. ἔσται ὁ μὲν ξη ι. ὁ δὲ ρλβ ι. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XV.

IN hac quæſtione nulla eſt difficultas. Cur velit Diophantus ſumi duos numeros, quorum quadrati ſimul minores ſint numerò diuidendo nemo eſt qui non videat. Itaque ex operatione ipſa hunc formamus Canonem.

Sume duos numeros quorum quadrati ſimul minores ſint numero diuidendo, horum quadratorum ſummam aufer à numero diuidendo, reſiduum diuide per duplum ſummæ ſumptorum numerorum, orietur latus quæſiti quadrati, cuius duplum ſi ducas ſeorſim in ſumptos numeros, & productis addas ſeorſim quadratos ſumptorum numerorum, fient quæſita partes numeri diuidendi.

Vt ſi datus ſit numerus 33. ſume duos numeros 2. & 3. quorum quadrati ſimul faciunt 13. quo detracto de 33. ſuperſunt 20. quæ diuiſa per duplum ipſorum 2. & 3. nimirum per 10. dant 2. latus quadrati quæſiti, cuius duplum 4. ductum ſigillatim in ipſos 2. & 3. facit 8. & 12. quibus ſi addas ſeorſim quadratos eorundem 2. & 3. nempe ipſi 8. quadratum 4. & ipſi 12. quadratum 9. fient 12. & 21. quæſitæ partes numeri 33. quibus addendo eundem quadratum 4. fiunt quadrati 16. & 25.

QVÆSTIO XVI.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, à quo vterque detractus, relinquat quadratum. Numerus diuidendus iterum eſto 20. Ponatur is qui quæritur quadratus à latere 1 N. cum tot vnitatibus, vt harum quadratus non ſuperet 20. Eſto ab 1 N. + 2. Quadratus ergo erit 1 Q. + 4 N. + 4. & patet ſi hinc auferantur 4 N. + 4. relinqui quadratum, & ſimiliter ſi hinc auferantur 2 N. + 3. relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. + 2 N. + 1. Statuo igitur, hac de cauſa, primum quidem 4 N. + 4. Secundum verò 2 N. + 3. Quæſitum autem 1 Q. + 4 N. + 4. & hic dempto vtroque illorum, facit quadratum. Supereſt vt ambo ſimul æquentur numero diuidendo. Sed

TON δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λιπὼν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω πάλιν τὸν κ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς^ου ἑνὸς καὶ μο τοσούτων, ὥστε τὸν ἀπ᾽ αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ. ἔστω δὴ ς^ου ἑνὸς μο β. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς. ς δ. καὶ δῆλον ὡς λιπὼν ἀριθμοὺς δ μονάδας δ καταλείπει τετράγωνον, καὶ ὁμοίως λιπὼν ςς^ους β μο γ. καταλείπει τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς, ςς β μο α. τάσσω οὖν διὰ ταῦτα τὸν μὲν πρῶτον ςς δ μο δ. τὸν δὲ δεύτερον ςς β μο γ. τὸν δὲ ζητούμενον δύναμιν μίαν, ςς^ους δ μο δ. καὶ λείπει ἑκατέρου ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς δύο ἴσους εἶναι τῷ διαιρουμένῳ. ἀλλ᾽ οἱ δύο ποιοῦσι ςς^οὺς ς μο ζ.

ταῦτα ἴσα μονάσι κ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄ ς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος οϛ̄ ς. ὁ δὲ δεύτερος μδ̄ ς̄. ὁ δὲ τετράγωνος χκε̄ λς̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ambo ſimul faciunt 6 N. + 7. Hoc ergo æquatur 20. Auferantur à ſimilibus ſimilia, & fit 1 N. $\frac{13}{6}$. erit ergo primus $\frac{76}{6}$ ſecundus $\frac{44}{6}$. Quadratus autem $\frac{625}{36}$. & faciunt poſtulata.

IN QVAESTIONEM XVI.

FRVSTRA laborat Scholiaſtes, vt implicatum Theorema nobis obtrudat quaſi neceſſarium ad intelligendam operationem Diophanti, cùm illo carere poſſimus abſque vllo artis diſpendio. Etenim cùm ponat Diophantus quadratum quæſitum 1 Q. + 4 N. + 4. quem finxit à latere 1 N. + 2 Primò euidens eſt cur alteram partem numeri diuidendi ponat 4 N. + 4. quia ſcilicet, his ablatis à quadrato expoſito, relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. Deinde vt aliam partem numeri diuidendi reperiat, fingit alium quadratum ab 1 N. + certo vnitatum numero minore quàm 2. qui poſitus eſt in latere quæſiti quadrati, puta ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo detracto à quæſito quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. remanet alia pars numeri diuidendi, nimirum 2 N. + 3. vnde etiam colligitur aliter atque aliter ſumi poſſe partes numeri diuidendi, eodem etiam quadrato expoſito manente, prout ab eo detrahentur alij atque alij minores quadrati.

Quod autem attinet ad limitationem quam præſcribit Diophantus circa latus quæſiti quadrati, illud ſcilicet fingendum eſſe ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus non ſuperet numerum diuidendum, hanc ego nec ſufficientem puto, nec omnino neceſſariam. Sufficiens quidem non eſt, quia etſi obſeruetur deueniri poterit ad abſurdum. Nam ponatur latus quæſiti quadrati 1 N. + 4. erit ipſe quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. cuius vnitates minores ſunt numero diuidendo 20. vnde conſtat obſeruatam eſſe limitationem præſcriptam. Si tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 8 N. + 16. altera verò 2. N. + 7. quæ habetur ſi ab expoſito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 3. nimirum 1 Q. + 6 N. + 9. erit ſumma duarum partium 10 N. + 23. æqualis 20. Quod eſt impoſſibile. Non eſt etiam neceſſaria huiuſmodi conditio, quia quamuis non ſeruetur, ritè tamen perfici poterit æquatio. Etenim fingatur quadratus quæſitus à latere 1 N. + 5. erit is 1 Q. + 10. N. + 25. cuius vnitates excedunt numerum diuidendum 20. contrà id quod præcipit Diophantus, Tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 2 N. + 9. quæ habetur ſi ab expoſito quadrato auferatur quadratus à lateri 1 N. + 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 16. Rurſus ponatur pars altera 1 N. + 4 $\frac{3}{4}$. quæ habetur ſi à quadrato expoſito auferatur quadratus à latere 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. nimirum 1 Q. + 20. $\frac{1}{4}$. Erit partium ſumma 3 N. + 13 $\frac{3}{4}$. æqualis 20. Vnde fiet 1 N. $\frac{25}{12}$. Ad hypoſtaſes erunt quæſitæ partes $\frac{82}{12}$ & $\frac{158}{12}$. Quadratus quæſitus $\frac{7225}{144}$. à latere $\frac{85}{12}$. A quo quadrato ſi auferas ſigillatim partes inuentas, remanent quadrati $\frac{6241}{144}$. & $\frac{5329}{144}$. quorum latera $\frac{79}{12}$. & $\frac{73}{12}$. Aliter igitur præſcribenda eſt conditio huic operationi, nimirum. Ponatur quadratus quæſitus à latere 1 N. + quotlibet vnitatibus. Tum fingantur alij duo minores quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, vt harum quadratis ſigillatim detractis à quadrato vnitatum primi quadrati, duo reſidua ſimul minora ſint numero diuidendo. Hoc autem facillimum factu eſt, quia dato quolibet quadrato, licet inuenire infinitos minores quadratos, diſtantes à dato quadrato, interuallo minore quàm quilibet præſcriptus numerus. Verbi gratia dato quadrato 25. ſi velim minores quadratos quibus ſigillatim à 25. detractis, ſuperſit minùs quàm 10. quia detrahendo 10. à 25. ſupereſt 15. oportet quæſitos quadratos minores quidem eſſe, quàm 25. ſed maiores quàm 15. Quare cùm latus 25. ſit 5. At latus proximè maius ipſius 15. ſit 4. Patet quadratos omnes à lateribus inter 4. & 5. quales ſunt à lateribus 4. 4 $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{5}{6}$ 4 $\frac{1}{2}$ &c. ſatisfacere propoſito. Hinc eſt cur poſito quadrato quæſito 1 Q. + 10. N. + 25. quærendi erant duo quadrati, quibus ſigillatim detractis à 25. reſidua ſimul minora eſſent quàm 20. Quia verò quolibet reſiduo exiſtente minore quàm 10. ſequebatur vtrumque ſimul minorem eſſe quàm 20. finxi latera quæſitorum quadratorum 1 N. + 4 & 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. quia ſinguli quadrati ipſorum 4. & 4 $\frac{1}{2}$ minores ſunt quàm 10. vt oſtenſum eſt. Simili artificio rectificari poterit operatio illa qua deductione ad abſurdum oſtendimus inſufficientiam Diophantææ limitationis. Etenim ponendo eundem quadratum quæſitum 1 Q + 8 N. + 16. eſto pars vna vt prius 8 N. + 16. Cùm ergo ex conditione præſcripta conſtet vnitates vtriuſque partis ſimul minores eſſe debere numero diuidendo 20. ſi in vna parte ſint 16. vnitates, patet in alia debere eſſe minùs quàm 4. Oportet igitur fingere quadratum ab 1 N: + tot vnitatibus, vt earum quadratus detractus de 16. relinquat minus quàm 4. Oportet ergo quadratum illarum vnitatum maiorem eſſe quàm 12. minorem quàm 16. Quare cùm latus ipſius 16. ſit 4. & latus proximè maius ipſius 12. ſit 3. $\frac{1}{2}$ ſumendus erit quilibet vnitatum numerus à 3 $\frac{1}{2}$ incluſiuè vſque ad 4. excluſiuè, quales ſunt 3 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{2}{3}$. 3 $\frac{3}{4}$. & alij infiniti. Ita ſi fingas quadratum ab 1 N. + 3 $\frac{1}{2}$. erit quadratus 1 Q. + 7 N. + 12 $\frac{1}{4}$. quo detracto à quæſito quadrato 1 Q. + 8 N. + 16. ſupereſt ſecunda pars numeri diuidendi, nimirum 1 N. + 3 $\frac{3}{4}$. Quare ſumma partium fit 9 N + 19 $\frac{3}{4}$ æqualis 20. Qua æquatione reſoluta, optimè ſatisfit propoſito.

Ex dictis apparet quàm infinitis variis modis poſitiones inſtitui poſſint, & ſolutiones diuerſæ reperiri, nam primò quæſitus quadratus variè fingi poteſt. Deinde eodem manente quadrato quæſito, partes numeri diuidendi diuerſimodè fingi poſſunt. Sed & Diophantus rurſus lib. 3. quæſt. 23. hanc ipſam tetractaus quæſtionem alia operatione negotium abſoluit, quam ibi explicabimus.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt vterque cum quadrato qui proponetur faciat quadratum. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum, vtrumque autem adſcito 9. facere quadratum. Hic a quocunque quadrato cuius latus ſit multitudo quælibet numerorum + vnitatum 3. detraxero 9. reſiduum erit alter quæſitorum. Eſto igitur minor 1 Q. + 6 N. erit ergo maior 3 Q. + 18 N. Oportet itaque & hunc adſumpto 9. facere quadratum. Sed facit 3 Q. + 18. N. + 9. Hoc ergo quadrato æquale eſt. Fingo quadratum a 2 N. − 3. & fit 1 N. 30. Erit igitur minor 1080. maior verò 3240. & vterque adiecto 9. facit quod poſtulatur.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ἐπιταχθέντος τετραγώνου ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, ἑκάτερον δ' αὐτῶν μετὰ μο θ ποιεῖν τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀπὸ πλήθους ςς καὶ μο γ ἀφέλω μο θ ἔσται εἷς τῶν ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάσσων δυνάμεως α ςς ς. ὁ ἄρα μείζων ἔσται δυνάμεων γ ςς ιη. δεήσει ἄρα καὶ τοῦτον προσλαβόντα μο θ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ γίνονται δυνάμεις γ ςς ιη. μο θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς δύο λεῖψει μο τριῶν, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ͵απ. ὁ δὲ μείζων ͵γσμ. καὶ ποιοῦσι μετὰ μονάδων θ τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & ei qui ſuperiorum omnium quæſtionum artificium perfectè comprehenderit, nihil hic obſcurum videbitur. Vnum moneo numeri 3 Q. + 18 N. + 9. latus non ſolùm fingi poſſe à quolibet Numerorum numero cuius quadratus ſuperet 3 Q. cùm defectu vnitatum 3. lateris ſcilicet ipſius 9. vt faciat Diophantus qui ponit hoc latus 2 N. − 3. ſed etiam fingi poſſe à numero Numerorum cuius quadratus ſuperet 3. & cuius ſextuplum ſit minus quàm 18. adiectis tot vnitatibus quot ſunt in latere quadrati dati 9. nimirum 3. Idcirco fingi poteſt hoc latus 2 N. + 3. vel 2 $\frac{1}{2}$ N. + 3. & ſic ad + 3. adiungi poteſt quilibet numerus Numerorum qui cadat inter 2. & 3. Hac ratione fingendo huiuſmodi latus 2 N. + 3. fit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 3 Q. + 18 N. + 9. & fit 1 N. 6. ſuntque numeri quæſiti 72. & 216. qui ſatisfaciunt poſtulatis.

Sed & ſine magna perplexitate, quicquid dicat Xilander, per duplicatam æqualitatem ſolui quæſtio poteſt. Nam ponatur minor numerus 1 N. eſt ergo maior 3 N. Quare vtrique adiiciendo 9. ſunt quadrato æquandi 1 N. + 9. & 3 N. + 9. Horum interuallum eſt 2 N. Sumendi ergo ſunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita tamen vt tam in ſemiſſe ſummæ quàm in ſemiſſe interualli eorum reperiatur 3. latus quadrati adiecti 9. vt ſcilicet in æquationis vtraque parte reperiantur 9. vnitates, quibus vtrumque ablatis, maneat æquatio inter numeros & quadratos. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita vt in eorum ſumma, & in eorum interuallo reperiantur vnitates 6. Quare ſunt huiuſmodi numeri 6. & $\frac{1}{3}$ quorum interualli ſemiſſis 3 − $\frac{1}{6}$ N. cuius quadratus 9 − 1 N. + $\frac{1}{36}$ Q. æquatur 1 N. + 9. & fit 1 N. 72. ſuntque quæſiti numeri vt ſupra 72. & 216. Sed ſanè hac ratione operando vnica tantum reperiri poteſt ſolutio, cùm alii numeri præter 6. & $\frac{1}{3}$ N. ſumi non poſſint, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ob cauſam allatam. Quare maluit Diophantus aliam inire viam, qua infinitæ ſolutiones contingunt. Cæterùm ex hac vltima operatione formari poteſt Canon ſatis expeditus.

Denominatorem rationis vnitate multatum diuide per quadruplum lateris propoſiti quadrati, per quotientis quadratum diuide rurſus ſemiſſem denominatoris vnitate aucti, orietur minor quæſitorum numerorum.

Quoniam verò hic deſiderari videntur aliquot quæſtiones non inelegantes, & ad hanc tractationem pertinentes, placet illas ſubnectere.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator ſit quadratus numerus: vt vterque cum numero qui proponetur faciat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque adſcito 10. faciat quadratum. Fingatur quadratus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 10. puta ab 1 N. + 4. fiet quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. vnde auferendo 10. reſiduum 1 Q. + 8 N. + 6. ſtatuatur pro minore quæſitorum numerorum, is enim adſcito 10. quadratum facit. Itaque maior erit 4 Q. + 32. N. + 24. qui adſcito 10. fiet 4 Q. 32. N. + 34. æquandus quadrato, quod facilè fiet, quia quadratorum numerus eſt quadratus, fingatur enim latus eius 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 34. puta 2 N. − 6. & fiet 1 N. $\frac{1}{28}$. Ad hypoſtaſes Minor numerus eſt $\frac{4929}{784}$. maior $\frac{19716}{784}$ & vtrique addendo 10 fiunt quadrati $\frac{12769}{784}$ & $\frac{27556}{784}$ quorum latera $\frac{113}{28}$ & $\frac{166}{28}$. Poſſet etiam hæc quæſtio per duplicatam æqualitatem ſolui, ſed vtendum eſſet eo modo duplicatæ æqualitatis quem tradit Diophantus quæſtione decima octaua tertij, cuius hic explicandi locus non eſt. Quare ipſam operationem hic non afferam, ſed Canonem pulcherrimum qui ab ea elicitur non diſſimulabo.

Ducito denominatorem rationis vnitate multatum in datum numerum, Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, ab horum minore ſi auferas datum numerum, relinquetur maior quæſitorum.

Vt in noſtra hypotheſi ducito 3. in datum numerum 10. fit 30. Cape duos quadratos quorum interuallum ſit 30. per Canonem vndecimæ huius; ita tamen vt minor illorum excedat 10. Infinitos tales reperies, quales ſunt $\frac{169}{4}$. & $\frac{49}{4}$. Igitur ſi à minore auferas 10. relinquitur $\frac{9}{4}$. maior quæſitorum numerorum, quare patet minorem eſſe $\frac{9}{16}$ & vtrique ſi addas 10. fiunt quadrati $\frac{49}{4}$. & $\frac{169}{16}$.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator ſit quadratus numerus; vt vterque multatus dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detracto 5. relinquat quadratum. Ponatur minor 1 Q. + 5. nam detracto 5. relinquet quadratum, erit ergo maior 4 Q. + 20. vnde auferendo 5. relinquitur 4 Q. + 15. æquandus quadrato, fingatur eius latus 2. N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 15. vel etiam 2 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 15. Fingatur ergo 2. N. + 3. erit quadratus 4 Q. + 12. N. + 9. æqualis 4 Q. + 15. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. ſunt ergo quæſiti numeri 5 $\frac{1}{4}$. & 21. qui ſatisfaciunt propoſito. Poteſt etiam ſicut & præcedens per duplicatam æqualitatem ſolui quæſtio. Sed ob eauſam allatam omiſſa ipſa operatione, canonem inde depromptum afferre ſufficiet, nimirum.

Denominatorem rationis vnitate multatum ducito in datum numerum; Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, maiori adde datum numerum, fiet maior quæſitorum;

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros in data ratione cuius denominator ſit quadratus numerus, vt vterque detractus à dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detractus à 20. relinquat quadratum. Ponatur minor 20 − 1 Q. hic enim detractus à 20. relinquit quadratum. Ergo maior erit 80 − 4 Q. quem ſi à 20. detrahas, relinquitur 4 Q. − 60. æquandus quadrato, fingatur eius latus à 2 N. − tot vnitatibus, vt hypoſtaſis quadrati reperiatur minor quàm 20. quia ſcilicet alter quæſitorum numerorum poſitus eſt 20 − 1 Q. Cum igitur in huiuſmodi æquatione valor Numeri fiat ex quodam quadrato adſciſcente 60. & diuiſo per quadruplum ſui lateris, valor autem numeri debeat eſſe minor quàm latus ipſius 20. putà quàm 4 $\frac{1}{2}$. eò redacti ſumus vt inueniamus quadratum, qui auctus numero 60. & diuiſus per quadruplum ſui lateris det quotientem minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eſto is 1 Q. ergo $\frac{1 Q. + 60}{4 N}$ minor eſt quàm 4 $\frac{1}{2}$. & omnia in 4 N. fit 1 Q. + 60. minor quàm 18 N. qua reſoluta æquatione fit 1 N. 9 + ℞. 21. vel 9 − ℞. 21. ſeu per radicis approximationem 13 $\frac{4}{7}$. vel 4 $\frac{3}{7}$. Hinc ergo patet latus quadrati qui quæritur cadere neceſſariò inter 4 $\frac{3}{7}$. & 13 $\frac{4}{7}$. Ponatur igitur 10. & fingatur quadratus à latere 2 N. − 10. erit is 4 Q. − 40. N. + 100. æqualis 4 Q. − 60. & fit 1 N. 4. ſuntque quæſiti numeri 4 & 16.

Non ſecus etiam ac præcedentes ſoluetur hæc quæſtio per duplicatam æqualitatem, & Canon huiuſmodi ex illa operatione formabitur.

Datum numerum ducito in denominatorem rationis vnitate multatum. Tunc cape duos quadratos hoc producto differentes, & minorem aufer à dato numero. Reſiduum erit maior quæſitorum.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt ſi quiſque proximè ipſum ſequenti partem ſui quæ imperatur tribuat, & præterea datum numerum, dantes & accipientes æquales fiant. Imperetur vt primus det ſecundo ſui quintantem, & adhuc vnitates 6. ſecundus tertio ſui ſextantem, & præterea 7. Tertium primo ſui ſeptantem & vnitates 8. Ponatur primus 5 N. ſecundus ſimiliter 6 N. & ſecundus accipiens à primo 1 N. + 6. fit 7 N. + 6. Dans autem tertio ſui ſextantem, puta 1 N. & præterea 7. remanent 6 N. − 1. Supereſt vt & reliqui datis acceptiſque quæ imperantur fiant 6 N. − 1. ſed primus dans ſui quintantem, & præterea vnitates 6. relinquitur 4 N. − 6. Oportet ergo vt accipiendo à tertio ſeptantem, & vnitates 8. fiat 6 N. − 1. ſed ſi 4 N. − 6. accipiant 2 N. + 5. fiunt 6 N. − 1. Igitur 2 N. + 5. eſt pars ſeptima tertij, & præterea 8. Si ergo à 2 N. + 5. abſtulero 8. reſiduum 2 N. − 3. eſt pars ſeptima tertij. Ipſe igitur tertius eſt 14 N. − 21. Supereſt vt & hic accipiens à medio ſextantem, & vnitates 7, dans autem ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 6 N. − 1. ſed dando ſui ſeptantem & vnitates 8. reſiduum eſt 12 N. − 26. accipiendo verò ſextantem medij & vnitates 7. fit 13 N. − 19. Hoc igitur æquatur 6 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{18}{7}$. Erit ergo primus $\frac{90}{7}$ ſecundus autem $\frac{108}{7}$. Tertius denique $\frac{105}{7}$. & hi ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμὸν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι. ἐπιτάχθω δὴ τὸν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ϛ. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον καὶ μονάδας ζ. τὸν δὲ τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον καὶ μº η. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ϛϛ ε. ὁ δὲ δεύτερος παρὰ μὲν τοῦ πρώτου λαβὼν ϛ ἕνα μº ϛ. ἀριθμοὶ ζ. μονάδες ϛ. δοὺς δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον ϛ ἕνα, καὶ μº ζ. γίνονται ἀριθμοὶ ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ϛϛ ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον καὶ ἔτι μονάδας ϛ. γίνεται ϛϛ δ λείψει μº ϛ. δεήσει ἄρα καὶ λαβόντα αὐτὸν παρὰ τοῦ τρίτου τὸ ἕβδομον καὶ μº η. γίνεσθαι ϛϛ ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλ' ἐὰν ϛϛ δ λείψει μº ϛ προσλάβωσιν ϛϛ β μº ε. γίνονται ϛϛ ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀριθμοὶ ἄρα β μº ε. μέρος ἕβδομόν εἰσι τοῦ τρίτου καὶ ἔτι μονάδες η. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ϛϛ β μº ε. ἀφέλω μονάδας η. λοιποὶ ϛϛ β λείψει μº γ. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ϛϛ ιδ. λείψει μº κα. λοιπὸν ἄρα δεήσει καὶ τοῦτον λαβόντα παρὰ μὲν τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μº ζ. δόντα δὲ τὸ ἕβδομον καὶ μº η. γίνεσθαι ἀριθμοὺς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν τὸ ἕβδομον καὶ μº η. λοιπός ἐστι ϛϛ ιβ λείψει μº κϛ. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον, καὶ μº ζ. γίνονται ϛϛ ιγ λείψει μº ιθ. ταῦτα ἴσα ἀριθμοῖς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς, καὶ γίνεται ὁ ϛº ιη ζ'. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϙ ζ'. ὁ δὲ δεύτερος ρη ζ'. ὁ δὲ τρίτος ρε ζ'. καὶ ἔτι ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

HÆC quæſtio parum differt à vigeſimaquinta primi, vt iam ibi monuimus. Nam quæruntur eo loco tres numeri, quorum quiſque vbi proximè ſequenti dederit certam ſui partem, inter dantes & accipientes fiat æqualitas. Hic vero præterea requiritur, vt præter certam ſui partem quilibet det ſequenti certum etiam numerum, quod parum aut nihil difficultatis adiicit operationi. Cæterùm quid de hac quæſtione, & decima nona ſentiam, dicam ad ſequentem,

QVÆSTIO XIX.

DATVM * numerum diuidere in tres numeros, quorum quiſque vbi proximè ſequenti dederit partem ſui quæ

ΤΟΝ * δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς τρεῖς ὅπως ἕκαστος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῷ ἑξῆς αὐτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιτα-

χεῖν, καὶ ἔτι δοθέντα ς ἵνα δόντες, καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π. διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος τῷ δευτέρῳ διδῷ τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ς. ὁ δὲ δεύτερος τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ μο ζ. ὁ δὲ τρίτος τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μο η ἵνα μετὰ τὴν ἀντίδοσιν γένωνται ἴσοι. * Τετάχθω ὁ πρῶτος ςς ε. καὶ ὁ δεύτερος μο ιβ. καὶ ἐπεὶ ὁ δεύτερος λαβὼν παρὰ μὲν τοῦ πρώτου πέμπτον ςς ἵνα καὶ μο ς γινόμενος ς α. μο ιη. δοὺς δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ ἔτι μο ζ. γίνεται ς α. μο θ. λοιπόν ἐστι, καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ς ἑνὸς μο θ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον καὶ μο ς λοιπός ἐστι ςς δ λείψει μο ς. δεήσει ἄρα καὶ αὐτὸν λαβόντα τὸ ἕβδομον τοῦ τρίτου καὶ μο. η. γίνεσθαι ς ἑνὸς μο θ. καὶ ἐὰν λάβῃ μο ιε λείψει ςς γ. γίνεται ς α μο θ. μονάδες ἄρα ιε λείψει ἀριθμῶν γ. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου, καὶ ἔτι μονάδες η. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μονάδων ιε λείψει ἀριθμῶν γ. ἀφέλωμεν μο η. ἕξομεν τὸ τοῦ τρίτου ἕβδομον μο ζ. λείψει ςς γ. αὐτὸς ἄρα ἔσται μο μθ λείψει ςς κα. λοιπόν ἐστι καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μο ζ. δόντα δὲ τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον καὶ μο η, γίνεσθαι ςς α μο θ. ἀλλὰ δοὺς καὶ λαβὼν γίνεται μο μγ. λείψει ςς ιη. ταῦτα ἴσα ς ἑνὶ μονάσι θ. καὶ γίνεται ὁ ς λγ ιθ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρο ιθ. ὁ δὲ δεύτερος σκη ιθ. ὁ δὲ τρίτος σιζ ιθ.

imperatur, & præterea datum numerum, inter eos exiſtat æqualitas. Inſtitutum ſit numerum 80. diuidere in tres numeros, vt primus ſecundo det ſui quintantem, & præterea 6. Secundus tertio det ſui ſextantem, & vnitates 7. Tertius primo det ſui ſeptantem, & vnitates 8. & poſt mutuam contributionem, fiant ęquales. * Ponatur primus 5 N. ſecundus 12. & ſecundus accipiens à primo quintantem, puta 1 N. & præterea 6. fit 1 N. + 18. dans autem tertio ſextantem ſui & adhuc 7. relinquitur 1 N. + 9. Reſtat vt & reliqui datis & acceptis quæ imperantur, fiant 1 N. + 9. ſed primus cùm dedit ſui quintantem & vnitates 6. remanet 4. N. — 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertij, & vnitates 8. fiat 1 N. + 9. ſed ſi accipiat 15 — 3 N. fit 1 N. + 9. Igitur 15 — 3 N. eſt ſeptima pars tertij, & præterea 8. Quamobrem ſi à 15 — 3 N. ſubducamus vnitates 8. habebimus tertij ſeptantem, nimirum 7 — 3. N. Ipſe igitur tertius erit 49 — 21 N. Supereſt vt & hic accipiens quidem à medio ſextantem & vnitates 7. dans autem primo ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 1 N. + 9. ſed datis acceptiſque quæ imperantur, fit 43 — 18. N. Hæc ergo æquantur 1 N. + 9. & fit 1 N. $\frac{33}{19}$. Erit igitur primus $\frac{170}{19}$. Secundus $\frac{228}{19}$. Tertius $\frac{217}{19}$.

IN QVÆSTIONES XVIII. ET XIX.

PEDIBVS eo in Xilandri ſententiam ſuſpicantis hanc & præcedentem quæſtionem huic quadratorum tractationi temerè inſertas eſſe, ſiue ab imperito librario vt putat ille, ſiue potius vt reor à ſciolo quopiam qui è tredecim libris Diophanti nonnullas in vnum colligens quæſtiones, eos quos habemus præ manibus Arithmeticorum libros conſarcinauit. Sanè ſi Diophanto tribuendæ ſunt, hæ duæ quæſtiones, in primum librum retrahendæ videntur, & collocandæ poſt vigeſimam quintam, à qua parum differunt, vt iam indicauimus; iſta præſertim, quæ illius operationem quàm proximè imitatur. Quidquid ſit, certiſſimum eſt totam huius propoſitionem adulterinam eſſe, & verba illa omnia quæ aſteriſcis incluſimus, eſſe penitus eliminanda, ſufficitque ſi loco propoſitionis ei præfigatur Ἄλλως. Verè enim à præcedenti non differt hæc quæſtio, ſed eſt eadem prorſus aliter tractata, quod familiare eſt Diophanto, vt conſtat ex decima octaua & decima nona primi, ex vigeſima & vigeſima prima, & rurſus ex vigeſima-tertia & vigeſima-quarta eiuſdem. Ac etiam ex octaua & nona huius. Sed & ipſam hanc operationem non conuenire numero 80. vel etiam alij certo & determinato numero optimè Xilander conuincit, ex eo quod Diophantus ſecundum quæſitorum ponit 12. quod nequaquam ritè in tali caſu fieri poſſet, niſi iam cognito numero ipſo qui quæritur, quod eſt abſurdum. Cæterùm omiſſa propoſitione, cætera bene habent, neque vno corrupto vocabulo vel numero aliquo deficiente, & ita benè & ad amuſſim præcedenti propoſitioni cuncta conueniunt, vt mirum ſit quomodo græculus ille tantum frontis habuerit, qui huic corpori caput alienum imponere tentauit.

Quod ſi quis fateatur quidem propoſitionem tractationi reliquæ non reſpondere, ſed contendat nihilominus, ab alia quæſtione quæ librariorum incuria exciderit, huc tranſlatam huiuſmodi propoſitionem

propoſitionem, non valdè repugnabo, cùm ſimile quid accidiſſe libro quinto certiſſimis argumentis compertum habeam. Hinc ergo vt ſatisfiat, quæſtionem quoque, vt in Græco propoſita eſt, ſoluemus cum Xilandro, quem ſanè immeritò recentiorum quidam arguere conati ſunt, & de analyſeos inſcitia criminari, quia ſcilicet calculi errore lapſus, falſos exhibuit ſolutionis numeros. Cùm tamen optimo vtatur logiſmo, quo ſaluo calculi error viris doctis non debet imputari. Itaque vt tanto viro debita ſeruetur reuerentia, in huius quæſtionis tractatione ipſamet eius verba referre non pigebit, à mendis duntaxat numerorum, vt par eſt, expurgata. Cùm tres numeri qui quæruntur, 80. ſummam conficiant, neque dum eorum partes adduntur detrahunturque, huic ſummæ quicquam decedat, cùm quod vni aufertur, alteri adjiciatur, & nihil excidat amittaturue; intelligere licet, æqualitatem trium numerorum vltimò exiſtentem eam fore, vt quiuis ſit triens ex 80. hoc eſt $26. \frac{2}{3}$. Hoc animaduerſo ponamus primum eſſe 1 N. ab eoque auferamus quæ dat ſecundo $\frac{1}{5}$ N. + 6. relinquitur $\frac{4}{5}$ N. − 6 hoc cum ſeptante tertij & 8. æquabitur $26 \frac{2}{3}$. Ergo à $26 \frac{2}{3}$ auferas $\frac{4}{5}$ N − 6. relinquuntur $32 \frac{2}{3} - \frac{4}{5}$ N, quod eſt 8. & ſeptans tertij. Aufer 8. relinquitur ſeptans tertij $24 \frac{2}{3} - \frac{4}{5}$ N. Ergo tertius eſt $172 \frac{2}{3} - \frac{28}{5}$ N. Huius & primi ſumma $172. \frac{2}{3} - 4 \frac{3}{5}$ N. detracta à 80. vt pote ſummà trium numerorum, relinquet ſcilicet ſecundum $4 \frac{3}{5}$ N. − $92 \frac{2}{3}$. Huic ſextantem ſuum & 7. adimemus, nimirum $\frac{23}{30}$ N. − $8. \frac{4}{9}$ relinquentur $\frac{23}{6}$ N. − $84. \frac{2}{9}$. His ſi addamus $\frac{1}{5}$ N. + 6. quod ei à primo accedebat fient $\frac{121}{30}$ N. − $78. \frac{2}{9}$ æqualia $26. \frac{2}{3}$ ob cauſam ſuprà demonſtratam, adde vtrobique $78. \frac{2}{9}$ erunt $\frac{121}{30}$ N. æquales $\frac{944}{9}$. hoc eſt 363 N. æquantur 9440. (alterum per 30. alterum per 9. erat multiplicandum, pro his ſume minimos 10. & 3. vt alibi docui) fit 1 N. $\frac{9440}{363}$ primus. Secundus $\frac{9786}{363}$. Tertius ergo $\frac{9814}{363}$ quorum ſumma $\frac{29040}{363}$ id eſt 80. Cætera omnia congruere ad poſtulata quæſtionis experiendo deprehendes. Hucuſque Xilander.

Verùm longè faciliùs ad vitandas fractionum moleſtias inſtituentur poſitiones hac arte. Eſto tertius 7 N. hic ergo dando ſui ſeptantem + 8. remanebit 6. N. − 8. quod cum ſextante ſecundi & 7. æquatur $26 \frac{2}{3}$. Quare à $26. \frac{2}{3}$ auferenda 6 N. − 1. remanet ſextans ſecundi nimirum $27. \frac{2}{3} - 6$ N. ergo ſecundus 166. − 36 N. qui amiſſo ſextante & 7. remanet $131 \frac{1}{3} - 30$ N. quod cum quintante primi & 6. æquatur $26 \frac{2}{3}$. Quare ſi à $26 \frac{2}{3}$ detrahas $137. \frac{1}{3} - 30$ N. remanet quintans primi, nimirum 30 N. − $110. \frac{2}{3}$. eſt ergo primus 150 N. − $553. \frac{1}{3}$. Reſtat vt trium ſumma conficiat 80. at conficit 121 N. − $387. \frac{1}{3}$. Hæc ergo æqualia ſunt 80. & fit 1 N. $\frac{1402}{363}$. Igitur tertius qui poſitus erat 7 N. erit $\frac{9814}{363}$. & alij qui prius.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE tres quadratos, vt interuallum maximi & medij, ad interuallum medij & minimi datam habeat rationem. Statutum ſit interuallum interualli triplum eſſe. Ponatur minor 1 Q. Medius verò 1 Q. + 2 N. + 1. à latere nimirum 1 N. + 1. Maximus igitur erit 1 Q. + 8 N. + 4. Oportet igitur 1 Q. + 8 N. + 4. æquari quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. (vt habeam 1 Q.) & præterea à tot vnitatibus, vt reliquæ ſpecies quæ in hoc quadrato reperientur, numerorum videlicet & vnitatum, non vtraque ſua multitudine ſuperent 8 N. & 4. vnitates, ſed altera deficiat, altera excedat. Eſto itaque à 3. vnitatibus. Ipſe ergo quadratus erit 1 Q. + 6 N. + 9. æqualis vtique 1 Q. + 8 N. + 4. & fit 1 N. $2. \frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit maximus $30 \frac{1}{4}$. minimus $6 \frac{1}{4}$. Medius $12 \frac{1}{4}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ὑπεροχῆς εἶναι τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων δυνάμεως μιᾶς. ὁ δὲ μέσος δυνάμεως μιᾶς, ςς β. μονάδος μιᾶς, ἀπὸ πλευρᾶς δηλονότι ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς η μο δ. δεήσει ἄρα καὶ δύναμιν μίαν ςς η μο δ ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς ἑνὸς ἵνα ἔχω τὴν δύναμιν, καὶ ἔτι μο τοσούτων ὥστε τὰ λοιπὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ γινόμενα εἴδη τῶν ςς καὶ τῶν μο μὴ ὑπερβάλλειν κατὰ τὸ πλῆθος τοὺς ςς η. καὶ μο δ ἑκάτερα. ἀλλὰ τὸ μὲν ἐλλείπειν, τὸ δὲ πλεονάζειν. ἔστω δὴ μο γ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς ϛ μο θ. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ ςς η μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ς μο β καὶ ἥμισυ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μέγιστος μο λ. α δ. ὁ δὲ ἐλάχιστος μο ϛ. α δ. ὁ δὲ μέσος μο ιβ. α δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

OPERATIO Diophanti ſatis eſt facilis, & ad docendum accommodata. Quod ait numeri quadrato æquandi 1 Q. + 8 N. + 4. latus fingendum eſſe ab 1 N. + tot vnitatibus, vt ſpecies quæ reperientur in quadrato fictitio non vtraque ſua multitudine excedant 8 N. + 4. ſic accipiendum eſt, vt talis ſtatuatur in latere vnitatum numerus, cuius quadratus ſuperet 4. ſed cuius duplum ſit minus quàm 8. Nam quod ait Xilander non inueniri temerè exemplum, vbi pauciore vnitates, pluresque ſint Numeri, non ſolùm id temerè non inuenietur, ſed nec vnquam poterit inueniri. Etenim vt numeri alicuius quadratus ſit minor quàm 4. oportet ipſum numerum eſſe minorem quàm 2. vt verò eiuſdem numeri duplum ſit maius quàm 8. oportet ipſum numerum eſſe maiorem quam 4. At omnino impoſſibile eſt eundem numerum eſſe ſimul minorem quàm 2. & maiorem quàm 4. ſupereſt igitur, vt talis in latere fictitio ponatur vnitatum numerus, cuius quadratus ſit maior quàm 4. & cuius duplum ſit minus quàm 8. ſeu quod idem eſt, debet ille vnitatum numerus eſſe maior quàm 2. minor quàm 4. quales infiniti reperiuntur inter 2. & 4. ſed Diophantus more ſuo ad vitandas fractiones, ſumpſit 3. & finxit hoc latus 1. N. + 3. facilius tamen fingi poteſt huiuſmodi latus abſque tali circonſpectione, ſi ponatur 1 N. — tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 4. vt ſi ponatur 1 N. — 6. fiet quadratus 1 Q. — 12. N. + 36. æqualis 1 Q. + 8 N. + 4. vnde fit 1 N. 2 $\frac{1}{4}$ vt prius. Cæterùm inuentis ſemel tribus quadratis propoſito ſatisfacientibus, licebit abſque noua operatione infinitos alios reperire idem præſtantes, ſi iam inuenti quadrati ducantur in quemlibet quadratum, nam fient alij quadrati in iiſdem rationibus cum iam inuentis quadratis. Quamobrem & eorum interualla eandem inter ſe rationem habebunt, quam habent interualla iam inuentorum quadratorum. Ita ſi inuentos quadratos 5 $\frac{1}{4}$. 12 $\frac{1}{4}$. & 30 $\frac{1}{4}$. ducas in quadratum 4. fient tres alij 25. 49. 121. idem præſtantes, nam maiorum interuallum 72. triplum eſt interualli minorum, quod eſt 24. & ſic alios infinitos eiuſdem naturæ licebit inuenire.

Per hanc etiam quæſtionem reperientur tres quadrati in Arithmetica medietate. Hoc enim nil aliud eſt quàm reperire tres quadratos, vt maiorum interuallum ſit æquale interuallo minorum. Quare ponatur minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. erit igitur maximus 1 Q. + 4 N. + 2. cuius latus fingetur 1 N. — tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 2. Verbi gratia 1 N. — 2 fiet quadratus 1 Q. — 4 N. + 4. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. erunt ergo quæſiti quadrati $\frac{1}{16}$ $\frac{25}{16}$ $\frac{49}{16}$. & ſi eos per eundem quadratum 16. multiplices, fient alij 1. 25. 49. quos ſi rurſus per eundem quadratum 4 multiplices, fient rurſus alij 4. 100. 196. & ſic infiniti reperientur. Sed & alia operatione ſubtili ſanè & iucunda ſolui poteſt huiuſmodi quæſtio, etiamſi requiratur præterea vt medius quæſitorum quadratorum ſit quilibet datus quadratus. Sint enim inueniendi tres quadrati in Arithmetica medietate, quorum medius ſit 25. ſume duplum ipſius 25. nempe 50. Quia ergo 50. componitur ex duobus quadratis 25. & 25. diuidatur rurſus idem 50. in duos alios quadratos per decimam huius, ſintque hi 1. & 49. dico iſtos eſſe minimum & maximum quæſitorum, quorum 25.
5. 1. poriſ. eſt medius arithmeticè proportionalis, quia enim ſumma ipſorum 1. & 49. ex conſtructione, dupla eſt ipſius 25. [a], erit 25. inter eos medius in arithmetica medietate. Quod erat propoſitum. Vnde cùm idem 50. rurſus diuidi poſſit in duos alios quadratos infinitis varijs modis, conſtat infinitos alios duos quadratos reperiri poſſe, inter quos 25. ſit medius arithmeticè proportionalis.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνός. ὁ δὲ δεύτερος μονάδος μιᾶς ςς̄ β̄. ἵν᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον. ποιεῖ δυνάμεις δ̄ ἀριθμοὺς ε̄ μονάδα μίαν. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς̄ β̄ λείψει μ° β̄. αὐτὸς ἔσται δυνάμεων δ̄, μ° δ̄ λείψει ςς̄ η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ιγ'. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ιγ'. ὁ δὲ δεύτερος ιθ̄ ιγ' καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vtriuſque quadratus altero numero adiecto, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſecundus 1 + 2 N. vt quadratus primi abſumens ſecundum, quadratum faciat. Supereſt vt & quadratus ſecundi primo adiecto faciat quadratum, ſed quadratus ſecundi adiecto primo efficit 4 Q. + 5 N. + 1 Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 2 N. — 2. nempe 4 Q. + 4 — 8 N. & fit 1 N. $\frac{3}{13}$. Erit igitur primus $\frac{3}{13}$. ſecundus $\frac{19}{13}$. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE duos numeros vt vtriuſque quadratus, altero numero dempto quadratum faciat. Ponatur minor 1 N. & quotquot libuerit vnitatum, eſto itaque 1 N. + 1. Maior autem ſit quadratus minoris dempto 1 Q. vt minoris quadratus detracto maiore relinquat quadratum. Quia ergo minoris quadratus eſt 1 Q. + 2 N. + 1. vtique maior dempto 1 Q. erit 2 N. + 1. & patet minoris quadratum dempto maiore facere quadratum. Oportet itaque & maioris quadratum, puta 4 Q. + 4 N. + 1. detracto minore facere quadratum: ſed facit 4 Q. + 3 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 3. N. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. erit igitur minor $\frac{4}{3}$. Maior $\frac{11}{3}$. & ſatisfaciunt propoſito.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ λοιποῦ ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ο α. καὶ μ^ο ὅσων δή ποτε, ἔστω δὴ μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ μείζων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου παρὰ δύναμιν μίαν, ἵν' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνός ἐστι δύναμις α ςς^οι β μονὰς α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται τῶν μετὰ τὴν δύναμιν ςς β μ^ο μιᾶς, καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τετραγώνου λείψει τοῦ μείζονος ποιῶν τετράγωνον. δεῖ δὴ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος δυνάμεις δ ςς^οὺς δ μονάδα μίαν, λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ποιεῖ δυνάμεις δ ςς^οὺς γ· ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάττω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς γ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ^ῶν ι. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων η^ῶν. ὁ δὲ μείζων ια^ῶν. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXI ET XXII.

NIHIL hic notatu dignum, quod non ſatis tum à Scholiaſte, tum à Xilandro ſit animaduerſum.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE duos numeros, vt vtriuſque quadratus adſcita numerorum ſumma faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. Maior verò 1 N. + 1. vt quadratus minoris, nimirum 1 Q. adſumens vtrumque puta 2 N. + 1. faciat quadratum. Supereſt vt & quadratus maioris adſumens vtriuſque ſummam faciat quadratum. Sed maioris quadratus adiecta vtriuſque ſumma fit 1 Q. + 4 N. + 2. Hoc ergo æquale eſt quadrato. Formo quadratum ab 1 N. + 2. ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 4 − 4 N. & fit 1 N. $\frac{2}{8}$. Eſto ergo minor $\frac{2}{8}$. maior $\frac{10}{8}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^ο ἑνός. ὁ δὲ μείζων ς^ο α μονάδος α. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, τουτέστι δύναμις μία προσλαβοῦσα συναμφότερον, τουτέστιν ςς^οὺς β μονάδα α ποιῇ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνον προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δύναμις α ςς^οι δ μ^ο β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^ο α λείψει μ^ο β. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις α μ^ο δ λείψει ςς δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β^ῶν. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων β^ῶν ὁ δὲ μείζων ι^ῶν. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OBSCVRVM fortaſſis alicui videatur, quanam arte ſuas poſitiones ita inſtituat Diophantus, vt ſumma vtriuſque numeri addita quadrato minoris faciat quadratum. Id autem ſic conſequitur, fingit quadratum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, verbi gratia ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Quare ſi ponamus ſummam numerorum 2 N. + 1. patet eam additam ad 1 Q. facere quadratum. Sed tunc vt ſatisfiat vni poſtulatorum, oportet 1 Q. eſſe quadratum vnius nu-

merorum quæſitorum. Is ergo erit 1 N. quo detracto ex vtriuſque ſumma quæ poſita eſt 2 N. + 1. manet alter 1 N. + 1. Vnde patet priorem illum quadratum fingi potuiſſe à quolibet numero Numerorum + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia fingatur à 2 N. + 3. fiet quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. Quare ponemus ſummam numerorum quæſitorum 12 N. + 9. ac proinde alterius quadratus cùm debeat eſſe 4 Q. erit alter ille 2 N. quo detracto à ſumma remanet alter 10 N. + 9. Itaque ſi hac operatione quæſtionem abſoluere libet, reſtat vt maioris quadratus, nimirum 100. Q. + 180 N. + 81. adſcita vtriuſque ſumma nempè 12 N. + 9. faciat quadratum, facit autem 100. Q. + 192 N. + 90. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus formo abs 10 N. − 30. & fit 1 N. $\frac{45}{44}$ ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{45}{44}$. & [illegible].

Quod ſi velimus vti proprietate numerorum vnitate differentium, quibus accidit vt eorum ſumma æquetur interuallo quadratorum eorundem (quia ſcilicet ex ſumma numerorum in eorum differentiam, fit interuallum quadratorum, & poſita differentia numerorum 1. productum ex ſumma in differentiam æquatur ipſi ſummæ) longè minore negotio rem expediemus. Etenim ponatur minor quæſitorum quilibet Numerorum numerus, puta 2 N. Tum ponatur maior idem Numerorum numerus + 1, puta 2 N + 1. patet ex demonſtratis vtriuſque ſummam additam minoris quadrato efficere quadratum maioris. Reſtat igitur ſolùm vt eadem ſumma cum quadrato maioris faciat quadratum, &c. Et ad hanc numerorum proprietatem fortaſſe reſpexit Diophantus, eùm ponat minorem numerum 1 N. maiorem 1 N. + 1 vnde ſanè ex illius operatione facillimum elicio Canonem.

Quemlibet quadratum binario multatum diuide per duplum ſui lateris auctum quaternario, orietur minor quæſitorum, & addita vnitate fiet maior.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς° α̅. ὁ δὲ μείζων ς° α, μονάδος μιᾶς. ἵνα ὁμοίως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος λείψει συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἔστιν ἄρα δύναμις μία λείψει ςς̅ β̅ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς° α̅ λείψει μ° γ̅. δύναμις ἄρα μία, μ° θ̅ λείψει ςς̅ ϛ. ἴσαι εἰσὶ δυνάμει μιᾷ λείψει ςς̅ β̅ μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° β̅ καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων. μ° β̅ καὶ ἥμισυ, ὁ δὲ μείζων μ° γ̅ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt vtriuſque quadratus dempta vtriuſque numeri ſumma faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. maior 1 N. + 1. vt ſimiliter maioris quadratus dempta vtriuſque ſumma faciat quadratum. Oportet igitur & minoris quadratū dempta ſumma vtriuſque facere quadratum. Facit autem 1 Q. − 2 N. − 1. hoc æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1. N. − 3. Igitur 1 Q. + 9 − 6 N. æquatur 1 Q. − 2 N. − 1. & fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$. erit igitur minor 2 $\frac{1}{2}$. maior 3 $\frac{1}{2}$. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXIV.

HI c etiam euidens eſt Diophantum vſum proprietate numerorum quorum interuallum eſt vnitas, quibus, vt oſtenſum eſt, accidit ſummam ipſorum æquari interuallo quadratorum ab ipſis, vnde ſi quæſiti numeri ponantur vnitate differentes, patet eorum ſummam à maioris quadrato detractam relinquere quadratum minoris. Porro ex ipſa operatione elicitur huiuſmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate auctum diuide per duplum ſui lateris binario multatum, orietur minor quæſitorum, cui addita vnitate fiet maior.

Poſſunt tamen etiam aliter inſtitui poſitiones nulla habita ratione numerorum vnitate differentium. Nam ponatur primus Numerorum numerus quilibet + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia, ponatur 1 N. + 3. erit eius quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Quare ſtatuatur ſumma vtriuſque 6 N. + 9. vt detracta à primi quadrato relinquat quadratum. Igitur cùm primus ſit 1 N. + 3. hunc auferendo à 6 N. + 9. remanebit ſecundus 5 N. + 6. Reſtat vt ab huius quadrato qui eſt 25 Q. + 60 N. + 36. detrahendo ſummam vtriuſque, nimirum 6 N. + 9. relinquatur quadratus, at remanent 25 Q. + 54 N. + 27. Hæc ergo æquantur quadrato ſit eius latus 5. N. − 9. fiet 1 N. $\frac{3}{8}$. eruntque quæſiti numeri 3. $\frac{1}{8}$ & 7 $\frac{7}{8}$.

QVÆSTIO XXV.

INVENIRE duos numeros, vt ſummæ illorum quadratus, adiecto alterutro quadratum faciat. Quandoquidem 1 Q. ſiue ei adiicias 3 Q. ſiue 8 Q. quadratum facit. Pono quæſitorum numerorum alterum 3 Q. alterum 8 Q. quadratum verò ſummæ 1 Q. ſic enim quadratus ſummæ adiecto alterutro facit quadratum. Et quia ſumma vtriuſque eſt 11 Q. quadratus ſummæ erit 121 QQ. ſed eſt quoque 1 Q. Igitur 121 QQ. æquantur 1 Q. Quamobrem & latus lateri æquale eſt. Proinde 1 N. æqualis eſt 11. Q. Omnia per numerum diuidantur. 11 N. æquales erunt 1. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$. Ad poſitiones erit alter $\frac{3}{121}$. alter $\frac{8}{121}$. Quadratus verò ſummæ $\frac{121}{14641}$. Et ſatisfit quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ δύναμις μία ἐάν τε προσλάβῃ δυνάμεις γ̄. ἐάν τε δυνάμεις η̄ ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν τὸν μὲν δυνάμεις γ̄. τὸν δὲ δυνάμεις η̄. τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου δυνάμεως μιᾶς, καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ συναμφότερός ἐστι δυνάμεις ια̅. ὁ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου ἔσται δυναμοδυνάμεων ρκα̅. ἀλλ᾽ ἔστι καὶ δύναμις μία· δυναμοδυνάμεις ἄρα ρκα̅ ἴσαι δυνάμει μιᾷ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἴση. ἀριθμὸς ἄρα εἷς ἴσος δυνάμεσιν ια̅. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ςˣ ἄρα ια̅ ἴσοι μονάδι μιᾷ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α̅ ιαων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν γ̄ ρκαων. ὁ δὲ ἕτερος η̄ ρκαων. ὁ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου ρκα̅ ͵αυξαων. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXV.

POTERAT analyſis Diophantæa breuius explicari ſic. Quandoquidem 1 Q. ſiue ei addicias 3 Q. ſiue 8 Q. quadratum facit. Pono quæſitorum numerorum alterum 3. Q. alterum 8. Q. Quadratum verò ſummæ 1 Q. erit ergo ipſa ſumma 1 N. Sed etiam 11 Q. Igitur 1 N. æquatur 11 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$ Porro manifeſtum eſt loco 3. & 8. ſumi poſſe quoſlibet alios quadratos vnitate multatos, veluti 15. 24. 35. quorum duo quilibet nota Quadrati affecti, ſtatui poſſunt pro quæſitis numeris, poſito ſcilicet ſummam illorum eſſe ſemper 1 N. & eius quadratum 1 Q. Nam & quadratus ſummæ variari poteſt, & loco 1 Q. poni quilibet quadratorum numerus quadratus, vt 4 Q. 9 Q. 16 Q. Sed tunc oportet quæſitos numeros, ſtatui quadratos multatos eodem ipſo quadrato qui ponitur pro quadrato ſummæ, vt ſi ponatur quadratus ſummæ 4 Q. Ponentur quæſiti numeri 5 Q. & 12 Q. & ſic de aliis. Præterea dignum eſt animaduerſione hanc quæſtionem non ad duos tantùm, ſed ad quotlibet numeros extendi poſſe, eodem prorſus artificio. Quærantur enim quatuor numeri vt ſummæ illorum quadratus quolibet ex ipſis adiecto quadratum faciat. Pone quæſitos numeros, 3 Q. 8 Q. 15 Q. 24 Q. & quadratum ſummæ 1 Q. erit ergo ſumma 1 N. ſed eſt quoque 50 Q. Igitur fit 1 N. $\frac{1}{50}$ & ſunt quæſiti numeri $\frac{3}{2500}$ $\frac{8}{2500}$ $\frac{15}{2500}$ $\frac{24}{2500}$. quorum ſumma $\frac{1}{50}$ cuius quadratus quolibet illorum adiecto quadratos facit, vt patet. Ex his demum Canonem eliciemus.

Sume tot quadratos, eodem aliquo quadrato multatos, quot petuntur numeri, hos ducito ſigillatim in ablatitium quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum ſummæ ſumptorum numerorum quæſitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE duos numeros vt ſummæ illorum quadratus, vtroque dempto faciat quadratum. Primùm accipio aliquem quadratum, à quo auferendo duos aliquos numeros, ſuperſit quadratus. Eſto 16. is enim detractus ſiue 12. ſiue 7. relinquit quadratum. Statuo ergo illos in quadrato, alterum quidem pono 12 Q. alte-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνω πρότερον τινὰ τετράγωνον, ἀφ᾽ οὗ ἀφελὼν δύο τινὰς ἀριθμοὺς καταλείπω τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ ις̅. αὐτὸς γὰρ ἐάν τε λείψῃ μονάδας ιβ̅ γίνεται τετράγωνος. ἐάν τε πάλιν μο ζ̄. γίνεται τετράγωνος. τάσσω οὖν πάλιν αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ τὸν μὲν δυνάμεων

ιβ. τῆς δὲ δυνάμεων ζ. τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου δυνάμεων ιϛ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψει ἑκατέρου ποιῶν τετράγωνον. δεήσει λοιπὸν τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου ἴσον γίνεσθαι δυνάμεσι ιϛ. ὥστε καὶ τὴν πλευρὰν τῇ πλευρᾷ, τουτέστι δυνάμεις ιθ ἴσας ἀριθμοῖς δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ/ιθ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρϙβ/τξα. ὁ δὲ δεύτερος ριβ/τξα. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

alterum 7 Q. At ſummæ quadratum 16 Q. ſic enim ſummæ quadratus, vtroque dempto relinquit quadratum. Oportet itaque ſummæ quadratum æqualem eſſe 16 Q. Quare & latus lateri, hoc eſt 19 Q. æquari oportet 4 N. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$ erit igitur primus $\frac{192}{361}$. ſecundus $\frac{112}{361}$ & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXVI.

VARIARI poſſunt hîc poſitiones ſicut in præcedente. Nam poſito quadrato ſummæ 16 Q. ſtatuemus pro quæſitis duos quoſlibet numeros, qui detracti à 16. ſigillatim relinquant quadratos, quales infiniti reperiuntur, ſi ponas eos 7 Q. & 15 Q. fiet eorum ſumma 22 Q. æqualis 4 N. & erit 1 N. $\frac{2}{11}$. & quæſiti numeri $\frac{28}{121}$ & $\frac{60}{121}$. Rurſus autem loco 16. Q. ſtatui poteſt quadratus ſummæ quilibet alius quadratus, puta 25 Q. 36. Q. & ſic in infinitum. Vnde ſanè diuerſarum ſolutionum ampla ſeges ſuppetit.

Poteſt etiam huiuſmodi quæſtio ad quotlibet extendi numeros. Vt ſi petantur quatuor numeri vt ſummæ quadratus quolibet illorum detracto relinquat quadratum. Ponatur ſummæ quadratus 25 Q. ipſi verò ſint 21 Q. 16. Q. 9. Q. 24 Q. horum ſumma fit 70 Q. æqualis 5 N. eſt ergo 1 N $\frac{1}{14}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{21}{196}$ $\frac{16}{196}$ $\frac{9}{196}$ $\frac{24}{196}$. quorum ſumma $\frac{5}{14}$ à cuius quadrato ſi auferantur ſigillatim inuenti numeri ſemper relinquitur quadratus. Hinc quoque fiet huiuſmodi Canon.

Sume quadratum numerum, à quo aufer ſigillatim tot alios quadratos, quot petuntur numeri, reſidua ducito ſigillatim in ſumptum quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum ſummæ eorundem reſiduorum, quæſitos exhibent numeros.

Cæterùm hîc deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio, quæ ſoluitur eodem artificio.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ illorum quadratus à quolibet illorum detractus, quadratum relinquat.

Ponatur ſummæ quadratus 1 Q. quem auferendo tum à 5 Q. tum à 10 Q. cùm relinquantur quadrati, ponantur quæſiti numeri 5 Q. & 10 Q. Erit igitur illorum ſummatum 1 N. tum 15 Q. Quare fit 1 N. $\frac{1}{15}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{45}$. & ſatisfaciunt propoſito. Variari poſitiones poſſunt iiſdem modis, quibus & præcedentium quæſtionum. Et eodem modo ad plures numeros extendetur quæſtio, & demum formabitur iſte Canon.

Quadratum quemlibet adde totidem aliis quadratis, quot petuntur numeri. Aggregata ducito ſigillatim in additiuum quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum eorundem aggregatorum, quæſitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τῶν αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν. ἐπιτετάχθω δὴ ποιεῖν τὸν ϛ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονός ἐστι τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάττονα ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν ἐλάσσονα ϛος ἑνὸς, τὸν δὲ μείζονα ϛϛ δ λείψει μονάδος μιᾶς, καὶ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ ὁμοίως τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν μείζονα τουτέστιν ϛϛοὶ δ λείψει μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ μονάδων ϛ λείψει τῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλάσσο-

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione adſcito alterutro quadratum faciat, quadratorum autem latera iuncta datum conficiant numerum. Imperetur vt faciant 6. Iam cùm duo ſunt numeri, quorum maior eſt quadruplum alterius vnitate deminutum, productus eorum multiplicatione adſcito minore facit quadratum. Pono ergo minorem 1 N. maiorem verò 4 N. − 1. & contingit productum multiplicationis addito minore fieri quadratum. Oportet ergo ſimiliter eundem productum adſcito maiore, puta 4 N. − 1. fieri quadratum, cuius latus ſit 6. cum defectu numerorum qui ſunt latus mino-

ris quadrati, vt ſcilicet (quod requirit quæſtio) duorum latera coniuncta faciant 6. ſed productum multiplicationis adiecto maiore facit 4 Q. + 3 N. − 1. Quadratus autem à latere 6 − 2 N. eſt 4 Q. + 36 − 24 N. Hæc ergo æquantur inter ſe, & fit 1 N. $\frac{37}{27}$. Ad poſitiones. Poſueram minorem 1 N. erit ergo $\frac{37}{27}$. maiorem verò poſueram 4 N. − 1. erit igitur $\frac{121}{27}$. & conſtat propoſitum.

νος ἀριθμοῦ, ἵνα μὴ τὸ πρόβλημα συντεθῶσιν τ δύο αἱ πλευραὶ ποιῶσι μονάδας ϛ ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προςλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ δυνάμεις δ ϛϛοὶ γ λείψει μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ ἀπὸ μονάδων ϛ λείψει ἀριθμῶν β. δυνάμεις δ μονάδας λϛ λείψει ϛϛ κδ. ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λζ κζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν ἑνός, ἔσται λζ κζ. τὸν δὲ μείζονα ϛϛ δ λείψει μονάδος α. ἔσται ρκα κζ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXVII.

BENE monet Scholiaſtes lemma quod aſſumit Diophantus, non de ſolis quadruplis, ſed de omnibus numeris intelligendum eſſe qui ſint plani ſimiles. Quare ſic vniuerſaliter proponendum eſt & demonſtrandum.

Datis duobus numeris, quorum maiori deſit vnitas, quo minus ad minorem habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex mutua datorum multiplicatione adſumpto minore illorum quadratus ſit.

Sint duo numeri A B & D. tales vt addita vnitate B C maiori A B, fiant plani ſimiles A C. & D. dico productum ex A B in D adſcito ipſo D fieri quadratum.

A . . . . B . C
D 2.

Quia enim A C. & D ſunt plani ſimiles, [1] productus ex A C in D quadratus eſt. At productus ex A C in D [2] æquatur productis ex A B & ex B C in D. productus autem ex vnitate B C in D. æqualis eſt ipſi D. Igitur productus ex A B in D adſumpto ipſo D. quadratus eſt. Quod demonſtrandum erat.

1. noni. 2. ſecundi.

Hinc patet poſitiones infinitis aliis modis inſtitui potuiſſe. Nam poſito minore 1 N. poni poterat maior non ſolùm 4 N. − 1. vt fecit Diophantus, ſed etiam 9 N. − 1. 16 N. − 1. & ſic in infinitum. Vel etiam poſito minore 3 N. poni poſſet maior 12 N. − 1. vel 27 N. − 1. &c. & poſito rurſus minore 9 N. poneretur maior 16. N. − 1. vel 25 N. − 1. &c. Ex ipſa autem operatione elicietur iſte Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipſius in ſummam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum ſumma laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum initio ſumptum, productus vnitate multatus erit maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. Cape quemlibet quadratum vnitate multatum, puta 8. cui adde 42 qui fit bis ex 7. in latus quadrati ſumpti, erit aggregatum 50. per quod diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, puta 50. fiet 1. minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum 9. initio ſumptum, productus vnitate multatus, nimirum 8. erit maior numerus. Itaque 1. & 8. ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem in huiuſmodi Canone tradendo allucinatus eſt Raphael Bombellius lib. 3. Problemate 88. & è falſo Canone falſos elicuit ſolutionis numeros [illegible] & [illegible]. quos minimè ſoluere quæſtionem experiendo deprehendes.

Cæterùm ſicut per ſuum lemma Diophantus ſic ſuas inſtituit poſitiones, vt productus adſcito minore numero faciat quadratum, ſic poterimus eas rurſus ita inſtituere, vt productus adſcito maiore numero faciat quadratum, tali præmiſſo lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minori deſit vnitas quo minus ad maiorem, habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto maiore quadratum facit.

A 9.
B . . . C . D

Sit maior A, & B C minor, cui addita vnitate C D fiant A. & B D. plani ſimiles, dico productum ex A in B C adſumpto ipſo A facere quadratum. Etenim ex A in B D fit quadratus. Sed productus ex A in B D æquatur productis ex A in B C. & in C D. & productus ex A in C D æquatur ipſi A. Igitur productus ex A in B C. addito ipſo A. fit quadratus. Quod demonſtrandum erat.

Hoc ſuppoſito ſtatuatur maior 4 N. minor 1 N. − 1. ſic enim productus 4 Q. − 4. N. adſcito maiore facit quadratum 4 Q. reſtat vt idem productus adſcito minore, faciat quadratum, cuius latus ſit 6 − 2 N. facit autem 4 Q. − 3 N. − 1. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{37}{21}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{148}{21}$ & $\frac{16}{21}$. Hinc elicietur Canon alter.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipſius in ſummam laterum

datam, per reſiduum diuide quadratum ſummæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum vnitate auctus, quem ſic vnitate auctum ſi ducas in ſumptum ab initio quadratum, fiet maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. vt prius. Sume quadratum 9. vnde ablata vnitate, reſiduum 8. aufer à 42. qui fit ex ipſo 7. bis in latus ipſius 9. relinquitur 34. per quem diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, nimirum 50. fiet $\frac{25}{17}$ vnde ablata vnitate relinquitur $\frac{8}{17}$ minor quæſitorum; At ducto $\frac{25}{17}$ in quadratum 9. fit maior $\frac{225}{17}$.

Sed & multò vniuerſalius proponi poteſt hæc quæſtio, nimirum ſic.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, adſcito quolibet alterutrius multiplice quadratum faciat, & quadratorum latera iuncta datum conficiant numerum.

Soluetur autem eadem arte auxilio eorundem lemmatum, quæ & ipſa in vnum contracta ſic proponentur vniuerſalius.

Datis duobus numeris quorum vni deſint quotlibet vnitates, quo minus ad alium rationem habeat quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto alterius multiplice ſecundum vnitates quæ alteri deſunt, fit quadratus.

Quærantur ergo duo numeri, vt productus eorum multiplicatione adſcito alterutrius duplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur minor 1 N. maior per lemma præcedens eſto 4 N. − 2. ſic enim productus 4 Q. − 2 N. adſcito minoris duplo facit quadratum 4 Q. Reſtat vt idem productus adſcito duplo maioris faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 6 N. − 4. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{4}{3}$ & $\frac{10}{3}$ quorum productus $\frac{40}{9}$ adſcito ſigillatim vtriuſque duplo quadratos facit $\frac{64}{9}$ & $\frac{100}{9}$, quorum latera $\frac{8}{3}$ & $\frac{10}{3}$ quorum ſumma $\frac{18}{3}$ ſeu 6.

Rurſus. Quærantur duo numeri vt productus eorum multiplicatione adſcito primi duplo, tum ſecundi triplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur primus 1 N. ſecundus 4 N. − 2. ſic enim productus 4 Q. − 2 N. adſcito primi duplo facit quadratum 4 Q. Reſtat vt idem productus aſcito ſecundi triplo faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 10 N. − 6. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{21}{17}$ ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{21}{17}$ & $\frac{50}{17}$ quorum productus $\frac{1050}{289}$ adſcito primi duplo & ſecundi triplo, quadratos facit $\frac{1764}{289}$ & $\frac{3600}{289}$ quorum latera $\frac{42}{17}$ & $\frac{60}{17}$ quorum ſumma $\frac{102}{17}$ ſeu 6. Hinc etiam Canon elici poteſt, quod exercitationis gratia tibi faciendum relinquo.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ε̄. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονός ἐστι τετραπλασίων, καὶ μονάδι μιᾷ, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν μείζονα ςς δ̄ μο α̅. τὸν δὲ ἐλάττονα ς ἑνός. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει, τοῦ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον δυνάμεις δ̄ οὗ ἡ πλευρὰ ςς β̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖν τετράγωνον, καὶ τὰς τῶν τετραγώνων πλευρὰς συνάγειν τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας ε̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος γίνεται δυνάμεις δ̄. λείψει ςς γ̄ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων ε̄ λείψει ςς β̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κς̄ ιζ. ἔσται ὁ ἐλάττων κς̄ ιζ. ὁ δὲ μείζων ρκα̅ ιζ καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione detracto alterutro quadratum faciat. At quadratorum latera coniuncta faciant datum numerum. Faciant itaque 5. & quoniam ſi duo ſint numeri, quorum maior ſit minoris quadruplum auctum vnitate, productus eorum multiplicatione, detracto minore facit quadratum. Pono maiorem 4 N. + 1. minorem verò 1 N. & productus eorum multiplicatione detracto minore facit quadratum 4 Q. cuius latus 2 N. Supereſt vt idem productus detracto maiore faciat quadratum, & vt quadratorum latera coniuncta conficiant imperatas vnitates 5. ſed productus ex multiplicatione illorum dempto maiore, facit 4 Q. − 3 N. − 1. hoc ergo æquatur quadrato à latere 5 − 2 N. & fit 1 N. $\frac{26}{17}$. Erit igitur minor $\frac{26}{17}$. maior $\frac{121}{17}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN

IN QVAESTIONEM XXVIII.

LEMMA, quo vtitur Diophantus ſic vniuerſaliter proponendum eſt.

Datis duobus numeris quorum maior vnitate multatus, ad minorem ſit in ratione quadrati ad quadratum, productus ex datorum mutuo ductu, detracto minore quadratum relinquit.

A.........B C.
D 2.

Sit maior A C. & D minor, & à maiori auferendo vnitatem B C. ſuperſit A B qui ad D ſit in ratione quadrati ad quadratum, dico productum ex D in A C detracto ipſo D relinquere quadratum. Etenim productus ex D in A C [1] æquatur productis ex D in A B & in B C. At productus ex D in vnitatem B C æquarur ipſi D. Igitur productus ex D in A C detracto D relinquit productum ex D in A B. Sed productus ex D in A B quadratus eſt, [2] cùm A B & D ponantur plani ſimiles. Ergo conſtat propoſitum. 1. ſecundi.

Hinc etiam patet poſitiones infinitis modis variari poſſe. Nam poſito minore 1 N. maior poni poterit non ſolùm 4 N. + 1. vt fecit Diophantus, ſed etiam 9 N. + 1 vel 16 N. + 1 &c. & ſi minor ponatur 3 N. ponetur maior 12 N. + 1. vel 27 N. + 1 &c. Rurſus ſi ponatur minor 4 N. ponetur maior 9 N. + 1. vel 16 N. + 1. vel 25 N. + 1 &c. Ex ipſa quoque operatione formabitur huiuſmodi Canon. 2. noni.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipſius in ſummam datam laterum; per reſiduum diuide quadratum ſumma laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum initio ſumptum, productus vnitate auctus, erit maior.

Sit data ſumma laterum 5. & ſumpto quadrato 9. aufer ab eo vnitatem ſupereſt 8. quem aufer à 30. duplo producti ex 5. in 3. ſupereſt 22. per quem diuide quadratum ipſius 5. vnitate auctum puta 26. fiet $\frac{13}{11}$ minor quæſitorum, quo ducto in quadratum 9. fit $\frac{117}{11}$ cui addendo vnitatem fit maior quæſitorum $\frac{128}{11}$ & ſatisfaciunt propoſito.

Poſſumus etiam ita inſtituere poſitiones, vt productus detracto maiore numero relinquat quadratum, tali præmiſſo lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minor vnitate multatus, ad maiorem ſit in ratione quadrati ad quadratum, productus eorum multiplicatione, detracto maiore quadratum relinquit.

Quod demonſtratur eodem prorſus modo quo præcedens demonſtratum eſt. Hoc autem præmiſſo. Ponatur maior 4 N. minor 1 N. + 1. Sic enim productus, nimirum 4 Q. + 4 N. detracto maiore quadratum relinquit 4 Q. cuius latus 2 N. Supereſt igitur, vt idem quadratus detracto minore quadratum relinquat à latere 5 − 2 N. relinquit autem 4 Q. + 3 N. − 1 hoc ergo æquatur quadrato 25. − 20 N. + 4 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{23}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{104}{23}$ & $\frac{49}{23}$. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipſius in ſummam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum ſumma laterum, vnitate auctum, orietur minor quæſitorum vnitate multatus, quem ſic multatum ducito in quadratum initio ſumptum, fiet maior quæſitorum.

Poteſt & vniuerſalius proponi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detracto quolibet alterutrius multiplice, quadratum relinquat, & quadratorum latera iuncta, datum conficiant numerum.

Et ſoluetur eodem prorſus artificio, auxilio lemmatum traditorum, quæ & ipſa in vnum contracta proponentur vniuerſalius, hoc pacto.

Datis duobus Numeris quorum vnus quotlibet vnitatibus ſuperat numerum, qui ad alterum rationem habet quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione, detracto alterius multiplice, ſecundum vnitates quibus alter abundat, quadratum relinquit.

Quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione detracto primi duplo, & ſecundi triplo, quadratum relinquat, & laterum ſumma eſto 5. Ponatur primus 1 N. ſecundus 1 N. + 2. ſic enim productus 1 Q. + 2 N. detracto primi duplo relinquit quadratum 1 Q. cuius latus 1 N. Reſtat igitur vt idem productus detracto ſecundi triplo faciat quadratum, cuius latus ſit 5 − 1 N. facit autem 1 Q. − 1 N. − 6. Hoc ergo æquatur 1 Q. − 10 N. + 25. & fit 1 N. $\frac{31}{9}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{31}{9}$ & $\frac{49}{9}$.

Cæterùm hîc deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detractus à quolibet ipſorum, quadratum relinquat.

Ponatur minor 1 N. maior quilibet Numerorum numerus qui ad minorem rationem habeat quadrati ad quadratum, puta 4 N. erit productus 4 Q. qui detractus à quolibet ipſorum, relinquet 1 N. – 4 Q. & 4 N. – 4 Q. æquales quadrati, & quia Numerorum numeri ſunt plani ſimiles, ducatur denominator rationis eorum, in minorem vt Numeri æquentur, fient ergo 4 N. – 16 Q. & 4 N. – 4 Q. æquandi quadratis, horum interuallum eſt 12 Q. quare ſumendi ſunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiant 12 Q. & horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquabitur maiori, vel interualli ſemiſſis quadratus æquabitur minori, ſunto hi 2 N. & 6 N. erit ſummæ ſemiſſis quadratus 16 Q. æqualis 4 N. – 4 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. Sunt ergo numeri $\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$. horum productus $\frac{4}{25}$ detractus ab ipſis numeris relinquit quadratos quæſitos $\frac{1}{25}$ & $\frac{16}{25}$. Quod ſi cui forte modus iſte vtendi duplicata æqualitate obſcurior videbitur, legat quæ adnotauimus ad quadrageſimam tertiam quarti, vbi fuſius à nobis explicatur.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν τάξω ἕνα τῶν τετραγώνων δυνάμεως μιᾶς, τὸν δὲ ἕτερον μονάδος, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος δύναμις α. δεήσει ἄρα τοῦτον προσλαβόντα ἑκάτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος προσλαβὼν μονάδα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ τετράγωνος ὃν θέλω εἶναι ὑπ' αὐτῶν, δύναμις μία ἐὰν ἄρα οὗτος προσλάβῃ μονάδα μίαν. γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία, ταῦτα δεήσει ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς, ςˣ α. λεῖψει μ° β. ἔσται ἴσος δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ. δ^{ων} ἔσται ὁ μὲν ἐννέα ιϛ^{ων}, ὁ δὲ ιϛ ιϛ^{ων}. συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὴν μονάδα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν θ ιϛ^{ων} ὑποκείσθω νῦν ἐν δυνάμει, τουτέστι δυνάμεις θ ιϛ^{ων} μονάδες θ ιϛ^{ων}. καὶ πάντα ἑκκαιδεκάκις. δυνάμεις ἄρα θ. μονάδες θ. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ςˣ γ λεῖψει μ° δ. αὐτὸς ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεων θ μ° ιϛ λεῖψει ςˣ κδ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ κδ^{ων} ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τκδ. φοϛ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος μθ φοϛ^{ων}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione adſcito alterutro faciat quadratum. Si ergo poſuero vnum quadratorum 1 Q. alterum vero 1. erit productus eorum multiplicatione quadratus 1 Q. Oportet igitur hunc adſcito vtroque facere quadratum. Quamobrem res eo deducta eſt vt quæramus qui quadratus adiecta vnitate faciat quadratum. Ponatur quadratus quem volo eſſe productum multiplicationis 1 Q. ſi ergo is adſumat vnitatem, fit 1 Q. + 1. hunc oportet æquari quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. – 2. hic æqualis erit 1 Q. + 1. & fit 1. N. $\frac{3}{4}$ eſt ergo alter $\frac{9}{16}$ alter $\frac{16}{16}$ & accidit productum multiplicatione illorum adſumpta vnitate fieri quadratum. Oportet ergo eundem productum adſumpto altero fieri quadratum. Et quandoquidem productus ille eſt $\frac{9}{16}$. Ponatur nunc in quadrato, nimirum $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$ & omnia ſedecies. Igitur 9 Q. + 9. æquantur quadrato. Formo quadratum à latere 3 N. – 4. ipſe igitur quadratus erit 9 Q. + 16 – 24 N. & fit 1 N. $\frac{7}{24}$ Erit ergo primus $\frac{324}{576}$ ſecundus $\frac{49}{576}$ & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XXIX.

OBSCVRE loquitur Diophantus, nec tamen à Scholiaſta vel à Xilandro ſatis explicatur. Itaque nos huic quæſtioni ſic lucem afferemus.

Poſito altero quadratorum 1 Q. ponitur alter ad libitum, puta 1 quorum producto, ſi ipſi ſigillatim addantur, fient tum 2 Q. tum 1 Q. + 1. æquandi quadratis, quæ duplicata æqualitas inexplicabilis eſt. Quamobrem poſito primo 1 Q. ſecundus non eſt ad libitum ponendus, ſed vt ſaltem vni propoſiti parti ſatisfiat per ipſas poſitiones, talis deligendus eſt ſecundus vt ductus in 1 Q. & producto addendo 1 Q. fiat quadratus. Quia verò primus eſt 1 Q. & vnitas non immutat numerum quem multiplicat, patet eo nos reduci, vt inueniamus quadratum, cui addendo 1. fiat quadratus. Id ergo fiet per aliam operationem, hoc pacto. Statuatur quæſitus quadratus 1 Q. is adſcita vnitate fiet 1

1 Q. + 1 æquandus quadrato, cuius latus modo in ſuperioribus quæſtionibus ſæpe vſitato fingetur ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 1. Fingit illud Diophantus 1 N. – 2. & fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & quæſitus quadratus $\frac{9}{16}$. Itaque ad propoſitam quæſtionem redeuntes ponamus primum 1 Q. ſecundum $\frac{9}{16}$. Sic enim productus $\frac{9}{16}$ Q. adſumpto primo facit quadratum $\frac{25}{16}$ Q. Reſtat igitur vt idem productus adſumpto ſecundo quadratum faciat, facit autem $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Sed ad vitandas fractiones, omnia per eundem quadratum 16. multiplicantur, & fit 9 Q. + 9 æquandus quadrato. Nec immutatur per hanc multiplicationem æqualitatis ratio, quia enim quadrato per quadratum multiplicato ſeu diuiſo, ſemper fit quadratus, patet ſi 9 Q. + 9. æquetur quadrato, & eius partem decimam ſextam, quadratum fore, & è conuerſo. Huius igitur latus fingamus à 3 N. – tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 9. puta à 3 N. – 4. fiet 1 N. $\frac{7}{24}$ & ſolutio eſt manifeſta. Hinc formatur Canon.

Cape duos quadratos quadratum ſimul conficientes, altero per alterum diuiſo, fiet alter quæſitorum. Tum diuiſum quadratum aufer à tertio alio quouis quadrato, reſidui quadratus diuiſus per quadruplum producti ex tertio eodem quadrato in quadratum initiò diuiſum, alterum exhibebit.

Verbi gratia. Cape quadratos 16. & 9. fiet alter quæſitorum $\frac{16}{9}$. Tum aufer 16. à quouis alio quadrato 36. reſtat 20. cuius quadratum 400. diuide per quadruplum producti ex 16. in 36. nimirum per 2304. fiet alter quæſitorum $\frac{25}{144}$.

Diuerſitas autem tum operationis, tum ſolutionis è triplici capite oriri poteſt.

Primò enim vtriuſque numeri poſitione eadem manente, primo ſcilicet poſito 1 Q. & ſecundo $\frac{9}{16}$ vltimi numeri quadrato æquandi, nimirum ipſius 9 Q. + 9. latus diuerſimodè fingi poteſt, videlicet 3 N. – 4. vel 3 N. – 6. & ſic in infinitum.

Secundo. Quamuis primus maneat 1 Q. poteſt ſecundus aliter atque aliter poni cùm inueniri poſſint infiniti quadrati diuerſi ab ipſo $\frac{9}{16}$ qui adſumpta vnitate quadratum faciant, quales ſunt $\frac{16}{9}$ $\frac{25}{144}$ &c.

Denique primus quoque numerus diuerſimodè poni poteſt, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 4 Q. 9 Q. 16 Q. &c. Sed tunc pro ſecundo ſumendus erit quadratus aliquis numerus, quo ducto in primum & producto addendo ipſum primum, quadratus fiat. Vnde prius ſolnenda erit huiuſmodi quæſtio.

Dato quadrato, alium inuenire, vt productus horum multiplicatione adſciſcens datum quadratum, faciat quadratum.

Datus eſto 4. Quæſitus quadratus ponatur 1 Q. horum productus eſt 4. Q. qui adſcito 4. facit 4 Q. + 4. quadrato æquandum, cuius latus eſto 2 N. – 3. fiet 1 N $\frac{5}{12}$. & eſt quæſitus quadratus $\frac{25}{144}$. quo ducto in 4. & producto addendo 4. fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Hinc, ſi libet, facilem elicies Canonem.

Datum quadratum aufer à quolibet quadrato, & per quadruplum producti horum quadratorum diuide reſidui illius quadratum, vel è conuerſo. Vtroque modo orietur quæſitus quadratus.

Vt in hypotheſi aufer 4. à 9. & reſidui 5. quadratum 25. diuide per quadruplum producti ex 4. in 9. nimirum per 144. fiet quæſitus quadratus $\frac{25}{144}$. vel diuide 144. per 25. fiet etiam quæſitus quadratus $\frac{144}{25}$. Nam hic ſemper duplex contingit ſolutio.

Hac præmiſſa quæſtione ſoluetur Diophantæum problema, hoc pacto. Ponatur primus 4 Q. ſecundus $\frac{25}{144}$ ſic enim ſatisfit vni parti poſtulati. Reſtat vt productus horum multiplicatione, nimirum $\frac{100}{144}$ adſcito ſecundo faciat quadratum, facit autem $\frac{100}{144}$ Q. + $\frac{25}{144}$. Hoc ergo æquatur quadrato, & omnia ducendo in 144. tum diuidendo per 25. fiunt 4 Q. + 1. æquales quadrato, cuius latus eſto 2 N – 3. & fiet 1 N. $\frac{2}{3}$. erunt ergo quæſiti quadrati $\frac{4}{9}$ & $\frac{25}{144}$.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione dempto alterutro faciat quadratum. Et ſi poſuero primum 1 Q. alterum 1. erit productus eorum multiplicatione 1 Q. Oportet ergo illum dempta vnitate fieri quadratum, eſt autem 1 Q. quadratus. Eò itaque redacti ſumus, vt quæramus quis quadratus dempta vnitate remaneat quadratus. Eſt autem huiuſmodi

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξω τὸν μὲν πρῶτον δύναμιν μίαν, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα μίαν. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν δύναμις μία. δεήσει ἄρα αὐτὴν λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔστιν ἡ δύναμις τετράγωνος. ἀπῆκται ἄρα εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ τετράγωνος ὁ κε ις. οὗτος γὰρ λείψει τῆς α μονάδος ις. ποιεῖ τε-

τράγωνον τὸν ς̄ ις̄. τάσσω οὖν τὸν μὲν δύναμιν μίαν, τὸν δὲ κε ις. καὶ ὑπ' αὐτῶν λείψει δυνάμεως μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. δῆλον ἄρα ὅτι ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει μο κε ις ἴσον ἐστὶ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει μο κε ις. γίνεται δὲ κε ις λείψει μο κε ις. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πάντα ἑκκαιδεκάκις. * πλάσσω τὸν τετράγωνον. ἀπὸ ςˣ α λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ δύναμις α μονάδες ις λείψει ςς η. ἴσος δὲ κε λείψει μο κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ η. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος σπθ ξδ. ὁ δὲ δεύτερος ρ ξδ. καὶ ποιεῖ τὰ τοῦ προβλήματος.

quadratus $\frac{25}{16}$. Hic enim demptis $\frac{9}{16}$ relinquit quadratum $\frac{16}{16}$. Pono igitur alterum 1 Q. alterum $\frac{25}{16}$. & productus multiplicationis dempto 1 Q. relinquit quadratum. Supereſt vt idem productus demptis $\frac{25}{16}$ fit æqualis quadrato. Sed productus demptis $\frac{25}{16}$ fit $\frac{25}{16}$ Q. − $\frac{25}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per ſedecim multiplicentur, tum diuidantur per 25. fit 1 Q. − 1. æquandus quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 4. Ipſe igitur eſt 1 Q. + 16. − 8 N. æqualis 1 Q. − 1. & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Erit ergo primus $\frac{289}{64}$ ſecundus $\frac{7225}{1024}$ & ſatisfaciunt poſtulatis.

IN QVAESTIONEM XXX.

EXTREMA verba huius propoſitionis, in Græco monſtroſè deprauata ſunt, vt ex ipſa æquatione manifeſtum fit, qua numeri 25 Q. − 25. latus fingitur 1 N. − 4. vnde contingit 1 Q. + 16 − 8 N. æquari 25 Q. − 25. & in complexam æquationem deuenitur cùm tandem 41. maneat æqualis 24 Q. + 8 N. & fit ſolutio irrationalis. Quare neſcio quomodo ſibi perſuadere potuerit Scholiaſtes hanc eſſe mentem Diophanti. Nam quod ipſe ait valorem Quadrati eſſe 1. atque adeo 24 Q. idem eſſe atque 24. ſunt meræ nugæ, & puerilius etiam nugatur Xilander, cùm mirificam appellat rationem hanc inueniendæ ſimplicis æquationis. Si enim 1 Q. eſt 1. nonne etiam 1 N. debuit eſſe 1 non autem $\frac{17}{8}$. Si verò modus iſte quo vtitur Scholiaſtes admittendus eſt, nonne licet etiam ponere latus quadrati 1 N. − 2. & æquare 1 Q. − 4 N. + 4. numero 25 Q. − 25? Sed hac ratione tandem 29. æquatur 24 Q. + 4 N. Quod ſi, vt ſomniat Scholiaſtes 1 Q. eſt 1. & 24. Q. ſunt 24. fiet valor Numeri $\frac{5}{4}$ eritque alter quæſitorum quadratorum $\frac{25}{16}$ alter rurſus $\frac{625}{256}$ qui nequaquam ſatisfaciunt poſtulatis, & ſic aliis infinitis exemplis pronum eſt oſtendere futilem eſſe hanc operandi rationem. Nec mihi obiiciat aliquis, valorem Numeri à Scholiaſte inuentum, nempe $\frac{17}{8}$ ſatisfacere propoſito, nam ex falſo verum inferri poteſt, & ex vno aut altero exemplo non ritè colligitur regula generalis. Falſitatis etiam manifeſtè arguitur hæc æquatio, ex eo quod per valorem numeri reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. − 8 N. + 16. non reperitur æqualis 25 Q. − 25. Nam 1. Q. − 8 N. + 16. fit $\frac{225}{64}$ At 25 Q. − 25 fit $\frac{5625}{64}$. Valeat ergo ridiculum Scholiaſtæ commentum, quo non calceus ad pedem, ſed pes ad calceum accomodatur.

Porrò tribus modis corrigi poteſt textus Diophanti. Primo numeri 25 Q. − 25. ponendo latus non 1 N − 4. Sed 5 N. − 1 vnde fiet 1 N. $\frac{13}{5}$ eruntque quæſiti quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{169}{16}$ Qua ratione numeri ſolutionis omnes mutandi erunt. Secundò concipiendo Diophantum, numerum $\frac{25}{16}$ Q. − $\frac{25}{16}$ priùs multiplicare per 16. vnde fit 25 Q. − 25. & hunc deinde diuidere per $\frac{25}{16}$ vnde fit 16 Q. − 16. æquandus quadrato, cuius latus fingitur non 1 N. − 4. Sed 4 N. − 1 & fit 1 N. $\frac{17}{8}$ & ſolutionis numeri non mutantur. Denique, quod maximè mihi arridet, & mea in verſione ſequutus ſum, dici poteſt Diophantum non ſolùm multiplicare per 16. numerum $\frac{25}{16}$ Q. − $\frac{25}{16}$ vnde fit 25 Q. − 25. Sed hunc præterea diuidere per 25. vnde fit tandem 1 Q. − 1. æquandus quadrato, quod familiare Diophanto eſt, vt in minimis numeris facilior ſit operatio; & vt iam monuimus quadratus per quadratum multiplicatus & diuiſus, quadratus manet. Tum numeri 1 Q. − 1 latus fingit 1 N. − 4. & omnia optimè cohærent, & ſolutionis numeri omnes congruunt. Non auſus ſum tamen in textu Græco tantam inducere mutationem, ſed ſatis habui verba deprauata aſteriſcis includere, quæ ſi quis velit ex noſtra verſione corrigere, id ita commodè fiet. Πάντα ἑκκαιδεκάκις, ἢ παρὰ τὸν κε. γίνεται δὲ α λείψει μονάδος α ἴσα τετραγώνῳ, πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςˣ α λείψει μο δ, αὐτὸς ἄρα ἔσται δύναμις α. μονάδες ις λείψει ςς η. ἴσος δὲ α. λείψει μονάδος α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ η.

Variari autem poteſt operatio & ſolutio, totidem modis, quot ad præcedentem explicauimus, & pari ratione dato quadrato, inuenietur alius, vt productus eorum mutuo ductu multatus dato quadrato, relinquat quadratum. Et tandem ex operatione Diophanti elicitur huiuſmodi Canon.

Cape quadratum ex duobus quadratis compoſitum, cui adiice alium quemuis quadratum, ſumma quadratum diuide per quadruplum producti quadratorum ſimul additorum; orietur alter quæſitorum, alterum habebis ſi diuidas quadratum initio ſumptum per vtrumlibet eorum ex quibus componitur.

Verbi gratia cape 25. compoſitum ex 9. & 16. cui adde quadratum 1. fit 26. cuius quadratum 676. diuide per 100. qui fit ex 1 in 25. quater, fiet alter quæſitorum $\frac{169}{25}$. Alter vero eſt $\frac{25}{4}$ vel $\frac{1}{25}$. Nam hic ſemper duplex contingit ſolutio.

Cæterùm hic deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos quadratos, vt vterque multatus producto multiplicationis eorum quadratum relinquat.

Ponatur alter 1 Q. alter quadratus aliquis, qui ab vnitate detractus relinquat quadratum, puta $\frac{9}{25}$. ſic enim productus $\frac{9}{25}$ Q. detractus ab 1 Q. relinquit quadratum $\frac{16}{25}$ Q. Reſtat vt idem productus detractus à $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{9}{25}$ relinquat quadratum. Relinquit autem $\frac{9}{25} - \frac{9}{25}$ Q. Hoc ergo æquatur quadrato Omnia per 25. multiplicentur fit $9 - 9$ Q. æquandus quadrato. Fingatur ſeius latus $3 - 4$ N. fit 1 N. $\frac{24}{25}$. Eſt ergo primus $\frac{576}{625}$. ſecundus $\frac{9}{25}$. & ſoluunt quæſtionem. Hinc fit iſte Canon.

Cape duos quadratos quadratum conficientes, horum alterum diuide per eorum ſummam, fiet alter quæſitorum. Eundem quadratum diuiſum adde cuilibet tertio quadrato, & per aggregati quadratum diuide quadruplum producti ex mutuo ductu quadratorum ſimul additorum, fiet alter quæſitorum.

Verbi gratia cape 9. & 16. & alterum 9. diuide per ſummam 25. fiet alter quæſitorum $\frac{9}{25}$. Tum eidem 9. adde alium quadratum 4. fiet 13. per huius quadratum 169. diuide quod fit ex 4. in 9. quater, nimirum 144. fiet alter quæſitorum $\frac{144}{169}$.

QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ſumma illorum ſiue addita, ſiue detracta quadratum faciat, Iam cùm duorum quorumlibet numerorum quadrati ſimul iuncti, ſiue detracto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciant, exponamus duos numeros 2. & 3 & patet quod ſumma quadratorum ab ipſis addito duplo producti multiplicationis facit quadratum 25. Et rurſus ab eadem ſumma quadratorum detracto eodem duplo producti multiplicationis relinquitur quadratus 1. Pono ergo productum ab iis 13 Q. Ipſorum alterum 1 N. alterum 13 N. & fit ex eorum multiplicatione 13 Q. Atqui 13 Q. ſiue additis ſiue detractis 12 Q. faciunt quadratum. Oportet ergo 12 Q. æquari ſummæ amborum. Sed amborum ſumma eſt 14 N. Igitur 12. Q. æquantur 14 N. & fit 1 N. $\frac{14}{12}$. ſeu $\frac{7}{6}$. erat itaque primus 1 N. erit ergo $\frac{7}{6}$. Ad ſecundus qui erat 13 N. erit iam $\frac{91}{6}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείπῃ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ παντῶν δύο ἀριθμῶν οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες, ἐάν τε προσλάβωσι τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτιθέμεθα δύο ἀριθμοὺς τὸν β καὶ τὸν γ· καὶ δῆλον ὡς ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν συνάγουσα ποιεῖ τετράγωνον μονάδας κε. καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς συνθέσεως τῶν ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρουμένου τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν καταλείπεται τετράγωνος ἡ μονάς. τάσσω νῦν τὸν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις ιγ. τετάχθω νῦν ὁ μὲν ς^ων ἑνός. ὁ δὲ ἀριθμῶν ιγ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις ιγ. δυνάμεις ἄρα ιγ ἐάν τε προσλάβωσι δυνάμεις ιβ, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα δυνάμεις ιβ ἴσας εἶναι συναμφοτέρῳ. ἀλλὰ συναμφότερός ἐστιν ςς ιδ. δυνάμεις ἄρα ιβ ἴσαι εἰσὶν ςς ιδ. καὶ γίνεται ἀριθμὸς ιδ ιβ^ων, τουτέστι ζ ς^ων. ἔσται οὖν ὁ μὲν πρῶτος ς^ων ἑνός, ἔσται ζ ς^ων. ὁ δὲ δεύτερος ςς ιγ, ἔσται ϟα ς^ων. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod aſſumit Diophantus, nil aliud continet quàm quod oſtenſum eſt quarta ſecundi Euclidis, & quarta ſecundi poriſmatum. Nam altera illarum propoſitionum demonſtratur duplum producti additum ſummæ quadratorum, efficere quadratum ſummæ numerorum; altera verò concluditur duplum producti detractum à ſumma quadratorum, relinquere quadratum interualli numerorum. Cæterùm tota operationis & ſolutionis varietas pendet à duplici capite. Primò enim loco 2. & 3. ſumi poſſunt alij duo quilibet numeri, & aggregatum quadratorum ab ipſis ſtatui pro producto multiplicationis, & duplum producti, pro ſumma ipſorum numerorum. Vt

ſi ſumas 2. & 4. Pones productum multiplicationis 20. Q. ſummam numerorum 16 Q. Secundo, manente eadem primà poſitione, ipſi numeri variè poni poſſunt, vt in hypotheſi Diophanti poſito producto 13 Q. & ſumma 12 Q. Ipſi numeri poni poſſunt duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 13 Q. author ad vitandas fractiones poſuit 1 N. 13. N. ſed poni poſſent 2 N. & 6 $\frac{1}{2}$ N. vel 3. N. & 4 $\frac{1}{3}$ N. & ſic in infinitum. At poſito producto 20 Q. poni poterunt ipſi numeri 2 N. & 10 N. vel 4 N. & 5 N. vel duo quilibet alij numeri quorum mutuo ductu fiant 20 Q. Canon quoque hinc facilè formabitur, ſed parum in eo erit compendij ſimili. quoque artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt ſumma eorum, producto multiplicationis ſiue addito, ſiue dempto quadratum faciat.

Ponatur ſumma 13 Q. productum 12 Q. ipſi vero numeri 1 N. & 12 N. fiet ergo ſumma 13 N. æqualis 13 Q. & fit 1 N. 1. ſuntque quæſiti numeri 1 & 12.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙ͂Ν δύο ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐστὶ διπλασίων, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν δὶς τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες ἐάν τε λείπωσι τὸν δὶς ἀπ' αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμαι τὸν δ΄, καὶ τὸν β΄. καὶ δῆλον ὡς ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον τὸν ιϛ΄. καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν κ΄. ἐάν τε προσλάβῃ τὸν ιϛ΄ ἐάν τε λείπῃ ποιεῖ τετράγωνον, τόν τε λϛ΄ καὶ τὸν δ΄. τετάχθωσαν οὖν ἐν δυνάμει. καὶ ἔστω ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις κ΄. ὁ δὲ συναμφότερος δυνάμεις ιϛ΄. ἔστω δὲ ὁ μὲν ςς β΄, ὁ δὲ ςς ι΄. συναμφότερος δὲ ςς ιβ΄. ἀλλὰ καὶ δυνάμεις ιϛ΄. δυνάμεις ἄρα ιϛ΄ ἴσαι ςς^οἱ ιβ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιβ^{ιϛ}. τουτέστι γ^{δ}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ^{η}. ὁ δὲ δεύτερος γ^{μ}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros æquales quadrato, vt productus eorum multiplicatione ſiue addita, ſiue dempta amborum ſumma quadratum faciat. Quoniam ſi ſint duo numeri in dupla ratione, & duplum producti multiplicationis eorum, quadratus eſt, & ſumma quadratorum ab ipſis, ſiue addito, ſiue detracto duplo producti quadratum facit, exponamus 4. & 2. & patet quod duplum producti eorum facit quadratum 16. & ſumma quadratorum ab ipſis puta 20. ſiue addito 16. ſiue dempto facit quadratos 36. & 4. Ponantur ergo in quadratis, & eſto productum multiplicationis 20 Q. ſumma verò numerorum 16. Q. ſit autem alter 2 N. alter 10 N. ergo vterque ſimul 12 N. ſed & 16. Q. Proinde 16 Q. æquantur 12 N. & fit 1 N. $\frac{12}{16}$ hoc eſt $\frac{3}{4}$ eritque primus $\frac{6}{4}$. ſecundus $\frac{30}{4}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVÆSTIONEM XXXII.

LEMMA hic aſſumptum idem ferè eſt cum illo quod in præcedente explicatum eſt, cui tamen ſuperaddit, expoſitos numeros debere eſſe in ratione dupla, vt duplum producti eorum ſit quadratus numerus, cuius rei ratio euidens eſt, quia ducere numerum aliquem bis in ſuum duplum, idem eſt atque ducere eundem numerum in ſuum quadruplum; At numeri in ratione quadrupla ſunt plani ſimiles. [1] Quare patet ex eorum mutuo ductu fieri quadratum. Variari autem poteſt operatio & ſolutio totidem modis, quot & præcedentis, & eaſdem ob cauſas vt manifeſtum eſt.

1. 8. noni.

Cæterùm etiam aliter operari poſſumus, hac arte. Sumantur duo numeri qui ſint latera circa rectum trianguli rectanguli, ſeu quorum quadrati ſimul quadratum conficiant, quod fiet per tertiam tertij poriſmatum, ſintque hi 3. & 4. Eritque ſumma quadratorum 25. duplum producti 24. Et ſtatuantur in Quadratis, ponaturque productum 25 Q. ſumma numerorum 24 Q. Ipſi verò numeri 1 N. & 25 N. vel alij duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 25 Q. erit ergo ſumma 26 N. æqualis 24 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{24}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{26}{24}$ & $\frac{650}{24}$.

Hic etiam deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, æquales quadrato, vt ſumma eorum, producto multiplicationis ſiue addito ſiue dempto, quadratum faciat.

Ponatur ſumma numerorum 25 Q. productum 24 Q. ipſi verò numeri ſtatuatur duo quilibet, quorum mutuo ductu fiant 24 Q. puta 4 N. & 6 N. fiet ſumma 10 N. æqualis 25. Q. & fit 1 N. $\frac{2}{5}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{8}{5}$. & $\frac{12}{5}$.

Cæterùm huc quoque pertinere videtur talis quæſtio.

Inuenire quadratum cui ſiue addatur, ſiue adimatur ſuum latus, fiat quadratus.

Ponatur quæſitus quadratus 25 Q. latus illius 24 Q. igitur 24 Q. æquantur 5 N. & fit 1 N. $\frac{5}{24}$. Eſt ergo quæſitus quadratus $\frac{625}{576}$.

Eodem artificio reperietur quadratus, cui addendo & adimendo ſuum latus quoties quis iuſſerit, fiat quadratus. Vt ſi quæratur quadratus, cui addendo & adimendo quater ſuum latus, fiat quadratus. Ponatur quæſitus quadratus 25 Q. Tum ipſius 24. ſumpto quadrante, ſtatuatur latus 6 Q. Nam eius quadruplum 24 Q. additum vel ademptum ipſi 25 Q. quadratum facit. Igitur 6 Q. æquantur 5 N. fitque 1 N. $\frac{5}{6}$. Eſt ergo quæſitus quadratus $\frac{625}{36}$.

QVÆSTIO XXXIII.

INVENIRE tres numeros, vt cuiuſuis illorum quadratus adſcito proximè ſubſequente numero, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. & quoniam ſi numerus numeri duplus fuerit, & adhuc vnitate maior, quadratus minoris adſcito maiore facit quadratum, ponatur ſecundus primi duplus & vnitate maior, erit itaque 2 N. + 1. Rurſumque tertius huius duplus & vnitate maior, erit vtique 4 N. + 3. & accidit quadratum primi adſcito ſecundo fieri quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & ſimiliter ſecundi quadratum adſumpto tertio facere quadratum 4 Q. + 8 N. + 4. Oportet ergo & tertij quadratum adiecto primo facere quadratum. Sed tertij quadratus adiecto primo facit 16 Q. + 25 N. + 9. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 4 N. − 4. Ipſe igitur erit 16 Q. + 16. − 32 N. & fit 1 N. $\frac{7}{57}$. Erit ergo primus $\frac{7}{57}$. ſecundus $\frac{71}{57}$. tertius $\frac{199}{57}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ςου α. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων· καὶ ἔσται δηλονότι ςς β. μονάδος μιᾶς. καὶ ἔτι ὁ τρίτος τούτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται ςς δ. μο γ. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον, γίνεσθαι τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς ςς β μονάδος μιᾶς. καὶ ὁμοίως τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον δυ δ ςς η μο δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ δυ ις ςς κε μο θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ· πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ςς δ λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυνάμεις ις. μονάδες ις λείψει ςς λβ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ιζ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ζ ιζων. ὁ δὲ δεύτερος λα ιζ. ὁ δὲ τρίτος οθ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

LEMMA Diophanti prorſus idem eſt cum decima octaua propoſitione primi poriſmatum, vt euidens eſt. Operatio & ſolutio dupliciter variari poteſt. Primò enim ipſi numeri poni poſſunt ad libitum, dum ſequens contineat ſemper duplum præcedentis vnitate auctum, ita primo poſito 2 N. ponetur ſecundus 4 N. + 1. tertius 8 N. + 3. & ſic in infinitum. vel etiam primo poſito 1 N. + 1. erit ſecundus 2 N. + 3. tertius 4 N. + 7. &c. Deinde vltimi numeri quadrato æquandi latus diuerſimodè fingi poteſt, vt in hypotheſi Diophanti, numeri 16 Q. + 25 N. + 9. latus fingi poteſt 4 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus ſuperet 9. vt 4 N. − 4. 4 N. − 5. 4 N. − 6. &c. Immo in eadem hypotheſi quia numerus vnitarum 9. quadratus eſt, poſſet idem latus fingi 3 − quotlibet Numeris, quorum quadratus ſuperet 16 puta 3 − 5 N. 3. − 6 N. &c.

QVÆSTIO XXXIV.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ διπλασίων παρὰ μονάδα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ς° ἑνὸς μ° ᾱ. τὸν δὲ δεύτερον ὁμοίως ςς β̄. μ° ᾱ. τὸν δὲ τρίτον ςς δ̄ μ° ᾱ. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον ⋔ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου λείψει τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου λείψει τοῦ πρώτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνος λείψει τοῦ πρώτου, ποιεῖ δυνάμεις ις̄ ςςοῖς ζ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς ε̄. δυνάμεις ἄρα κε̄ ἴσαι δυνάμεσι ις̄ ἀριθμοῖς ζ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ θˣ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ις̄ θˣ. ὁ δὲ δεύτερος κγ̄ θˣ. ὁ δὲ τρίτος λζ̄ θˣ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

Inuenire tres numeros, vt cuiuſuis quadratus detracto proximè ſe ſequente numero, faciat quadratum. Quandoquidem ſi numerus numeri duplo vnitate minor ſit, quadratus minoris dempto quadrato maioris, facit quadratum: ſtatuo primum 1 N. + 1. ſecundum 2 N. + 1. Tertium ſimiliter 4 N. + 1. & accidit quadratum primi dempto ſecundo facere quadratum, & adhuc quadratum ſecundi dempto tertio facere quadratum. Reſtat vt & tertij quadratus dempto primo quadratum faciat. Sed tertij quadratus dempto primo facit 16 Q. + 7 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 5 N. Proinde 25 Q. æquantur 16 Q. + 7 N. & fit 1 N. $\frac{7}{9}$ Erit igitur primus $\frac{16}{9}$. ſecundus $\frac{23}{9}$. tertius $\frac{37}{9}$. & conſtat propoſitum.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

Lemma quod aſſumit Diophantus nil aliud dicit, quàm quod oſtenſum eſt propoſitione decima nona primi poriſmatum. Operatio & ſolutio totidem modis variari poteſt, quot & præcedentis, vt diutius immorandum non ſit in re manifeſta.

QVÆSTIO XXXV.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν προσλαβὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, καὶ λάβωμεν καθ' ὃν μετρῆται, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ μετροῦντος, καὶ καθ' ὃν μετρεῖ, ἀφέλωμεν τὸν ἐλάττονα, ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ λοιποῦ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἐξ ἀρχῆς ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἀπὸ δυνάμεων τινῶν ἐχουσῶν μετροῦντας τρεῖς· ἔστω δὲ ιβ̄. μετρεῖ γὰρ αὐτὸν μονὰς ᾱ κατὰ τὸν ιβ̄ καὶ μονάδες β̄ κατὰ τὸν ς̄. καὶ μονάδες γ̄. κατὰ τὸν δ̄. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὸν μετροῦντα ἀπὸ τοῦ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ τῶν λοιπῶν λάβω τὰ ἥμισυ. τάσσω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν πρῶτον μ° ε̄ καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον μ° β̄ τὸν δὲ τρίτον μ° τὸ ἥμισυ, καὶ δῆλον ὡς ἀπὸ ἑκάστου τούτων τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιβ̄. ποιεῖ

Inuenire tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus adſcita ſumma omnium faciat quadratum. Quandoquidem ſi numerus numerum metiatur, & ſumamus eum per quem metitur; & duorum (metientis ſcilicet, & eius per quem metitur) minorem de maiore auferamus, reſidui ſemiſſis quadratus adſumpto propoſito initio ad metiendum numero, quadratum facit. Pono ſummam quidem trium aliquem quadratorum numerum, qui habeat tres ipſum metientes. Eſto itaque 12. Nam ipſum metitur vnitas per 12. & 2. per 6. & 3. per 4. & ſi detraxero metientem ab eo per quem metitur, & reſiduorum ſemiſſes ſumpſero; Ponam tres numeros primum quidem $5\frac{1}{2}$. ſecundum verò 2. tertium autem $\frac{1}{2}$. & patet horum vniuſcuiuſque quadratum

dratum adſcito 12. facere quadratum, nimirum 12 $\frac{1}{4}$ & 16. & 42 $\frac{1}{4}$. Statuo igitur illos in numero primum 5 $\frac{1}{2}$ N. ſecundum 2 N. tertium $\frac{1}{2}$ N. Oportet autem trium ſummam æqualem eſſe 12 Q. ſed trium ſumma eſt 8 N. Proinde 8 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{6}$ ſeu $\frac{2}{3}$. Erit ergo primus $\frac{22}{6}$ ſecundus $\frac{8}{6}$ tertius $\frac{2}{6}$ & conſtat propoſitum.

τετράγωνον. ὧν μὲν ιβ καὶ α δ^x. ὧν δὲ ις. ὧν δὲ μβ α δ^x. Τάσσω οὖν αὐτοὺς ἐν ἀριθμῷ τὸν μὲν πρῶτον ςς ε καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον ςς β. τὸν δὲ τρίτον ς^ο ἡμίσεως. δεῖ δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι δυνάμεσι ιβ. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμοί εἰσιν η. ἀριθμοὶ ἄρα η ἴσοι δυνάμεσι ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς η ις, ἤτοι δ ς^x. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κβ ς^x. ὁ δὲ δεύτερος η ς^x. ὁ δὲ τρίτος β ς^x. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXV.

LEMMA Diophanti coincidit prorſus cum quinta ſecundi Euclidis, vel cum ſecunda ſecundi poriſmatum. Solutionis varietas à duplici pendet capite. Primò enim ſumma numerorum poni poteſt non ſolùm 12 Q. ſed & quilibet alius quadratorum numerus. Deinde poſita eadem ſumma 12 Q. ipſi numeri diuerſimodè poni poſſunt, prout ſumentur ſemiſſes interuallorum duorum quorumlibet numerorum, quorum mutuo ductu fiat 12. Nam quod metientes ſumendos eſſe ait Diophantus, id facit facilitatis gratia, ad vitandas fractionum moleſtias. Cæterùm quinta ſecundi cui innititur hæc operatio, abſtrahit à numeris integris, & à fractis, vt liquet ex ipſius demonſtratione.

Hic ſi placet formabis huiuſmodi Canonem.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, interuallorum ſemiſſes ſimul additos diuide per ſumptum numerum, quotientem ducito ſigillatim in eoſdem ſemiſſes, fient quæſiti numeri.

Verbi gratia ſume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4. in 12. tum ex 6 in 8. interuallorum ſemiſſes ſunt 11. 4. 1. quorum ſumma 16. qua diuiſa per 48. fit $\frac{1}{3}$ quo ducto ſigillatim in ipſos 11. 4. 1. fiunt quæſiti numeri $\frac{11}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus, multatus ſumma omnium, faciat quadratum. Pono ſimiliter aliquem numerum qui tres ipſum metientes habeat. Eſto rurſus 12. additoque metiente ad eum per quem metitur, & ſemiſſe ſummæ capto, ſtatuo tres numeros, primum 6 $\frac{1}{2}$ N. ſecundum 4 N. tertium 3 $\frac{1}{2}$ N. & contingit horum vniuſcuiuſque quadratum demptis 12 Q. facere quadratum. Supereſt vt trium ſumma ſit æqualis 12 Q. ſed tres ſimul iuncti faciunt 14 N. Igitur 14 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{7}{6}$. Erit ergo primus $\frac{45}{6}$ $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{28}{6}$. tertius $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{2}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λειπὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. τάσσω ὁμοίως ἀριθμόν τινα ὃς μετροῦντας ἔχει τρεῖς. ἔστω πάλιν τὸν ιβ. καὶ προσθεὶς τὸν μετροῦντα τῷ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ ἥμισυ λαβὼν, τάσσω τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς, τὸν μὲν ςς ς καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ ἀριθμῶν δ. τὸν δὲ ςς γ καὶ ἥμισυ. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ ἑκάστου τετράγωνον λιπόντα δυνάμεις ιβ ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους δυνάμεσι ιβ. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ςς^{οι} ιδ. ἀριθμοὶ ἄρα ιδ, ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ς^x. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μα ς^x καὶ ἥμισυ ὁ δὲ δεύτερος κη ς^x. ὁ δὲ τρίτος κδ ς^x καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

LEMMA hic aſſumptum iiſdem innititur fundamentis, quibus & lemma præcedentis, vt manifeſtum eſt. ſolutio quoque totidem modis variari poteſt. Et ex ipſa operatione formabitur huiuſmodi Canon.

N

Sume quemlibet numerum, cum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, aggregatorum ſemiſſes ſimul additos diuide per ſumptum numerum, quotientem ducito ſigillatim in eoſdem ſemiſſes, fient quæſiti numeri.

Verbi gratia, ſume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum ſemiſſes ſunt 13. 8. 7. quorum ſumma 28. qua diuiſa per 48. fit $\frac{7}{12}$ quo ducto ſigillatim in ipſos 13. 8. 7. fiunt quæſiti numeri $\frac{91}{12}$. $\frac{56}{12}$. $\frac{49}{12}$.

Cæterùm Diophantus more Græcorum vtendo fractionibus fractionum. Primum quidem exhibuit $\frac{45}{6}$. $\frac{1}{2}$. id eſt $\frac{45}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. hoc eſt $\frac{91}{12}$. Tertium verò $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{2}$. id eſt $\frac{24}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. ſeu $\frac{49}{12}$.

Patet autem eodem prorſus artificio, & hanc & præcedentem ad quotlibet numeros extendi poſſe, quod vnico exemplo docuiſſe ſufficiet. Quæruntur quatuor numeri, vt vniuſcuiuſque quadratus multatus ſumma omnium, quadratus remaneat. Vtendo Canone allato, ſumatur 48. qui fit ex 2. in 24. tum ex 3. in 16. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum ſemiſſes ſunt 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8. 7. quorum ſumma 37. $\frac{1}{2}$. qua diuiſa per 48. fit $\frac{25}{32}$. quo ducto ſigillatim in ipſos 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8 & 7. & omnibus ad eandem reductis denominationem, fiunt quæſiti numeri $\frac{650}{64}$. $\frac{475}{64}$. $\frac{400}{64}$. $\frac{350}{64}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM

LIBER TERTIVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque eorum quadratus à ſumma trium numerorum detractus, faciat quadratum. Expone duos quadratos, alterum ab 1 N. alterum à 2 N. & fit ſumma quadratorum ab ipſis 5 Q. Pono ergo ſummam trium numerorum 5 Q. & quæſitorum primum 1 N. ſecundum verò 2 N. Ita duabus propoſiti partibus eſt ſatisfactum. Et quoniam habemus 5. qui diuiditur in duos quadratos, nimirum 1. & 4. diuidatur idem rurſus, vt ſupra demonſtratum eſt, in alios duos, quadratos, videlicet in $\frac{4}{25}$. & $\frac{121}{25}$. Pono igitur tertium latus vnius horum, puta $\frac{2}{5}$ N. & enim illius quadratus à ſumma omnium de tractus facit quadratum $\frac{121}{25}$ Q. ſupereſt vt tres ſimul æquentur 5 Q. ſed tres ſimul efficiunt 3 $\frac{2}{5}$ N. Igitur 1 N. fit $\frac{85}{125}$. Erit ergo primus $\frac{85}{125}$. ſecundus $\frac{170}{125}$. tertius $\frac{34}{125}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος, λειφθεὶς ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι, τὸν μὲν ἀπὸ ϛ° ἑνός. τὸν δὲ ἀπὸ ϛϛ β̄. καὶ γίνονται οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι δ^υ ε̄. τάσσω τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν δ^υ ε̄. καὶ τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν πρῶτον ϛ° ἕνα, τὸν δὲ δεύτερον ϛϛ β̄. καὶ ἔστι δύο τῶν ἐπιταγμάτων λελυμένα. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν τὸν ε̄. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους τήν τε μονάδα καὶ τὴν τετράδα, ἔστω μετὰ τὸ διελεῖν αὐτὸν ὡς προδέδεικται εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους εἰς τε δ̄ κε^. καὶ ρκα κε^. τάσσω νῦν τὸν τρίτον τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τούτων. ἔστω β̄ ε^ ἀριθμοῦ καὶ μένει πάλιν ὁ ἀπ' αὐτοῦ λειφθεὶς ἀπὸ συναμφοτέρου ποιῶν τετράγωνον τὸν ρκα κε^. δεῖ τοὺς τρεῖς λοιπὸν ἴσους εἶναι δυνάμεσι ε̄. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσιν ϛϛ γ̄. καὶ β̄ ε^. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς πε ρκε^. ὁ δὲ δεύτερος ρο ρκε^. ὁ δὲ τρίτος λδ ρκε^. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

In III. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis eſt. Numerus ex duobus quadratis compoſitus, puta 5. rurſus diuiditur in alios duos quadratos per decimam ſecund. Vnde patet hanc quæſtionem ad quotlibet numeros extendi poſſe. Etenim quærantur quatuor Numeri, vt cuiuſlibet eorum quadratus à ſumma numerorum demptus, relinquat quadratum. Ponatur ſumma 5 Q. Primus verò 1 N. ſecundus 2 N. Diuiſoque 5. rurſus in duos alios quadratos, quorum latera $\frac{2}{5}$ & $\frac{11}{5}$ ponatur tertius $\frac{2}{5}$ N. Quartus $\frac{11}{5}$ N. erit ſumma omnium 5 $\frac{3}{5}$ N. æqualis 5 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{25}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{140}{125}$. $\frac{280}{125}$. $\frac{56}{125}$. $\frac{308}{125}$. Diuerſitas porrò operationis & ſolutionis è duplici capite oritur. Primò enim ſumma numerorum poni poteſt, quilibet quadratorum numerus ex duobus quadratis compoſitus, puta 10 Q. 13 Q. 17 Q. &c. Deinde manente eadem ſumma numerorum

puta 5 Q. poſſunt ipſi numeri poni diuerſimodè, prout 5. diuidetur in alios atque alios quadratos. Hinc etiam elicietur Canon vniuerſaliſſimus.

Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compoſitum, quem rurſus diuide toties in duos alios quadratos, donec habeas tot quadratorum latera, quot petuntur numeri. Horum laterum ſummam diuide per numerum initio ſumptum, quotientem ducito ſigillatim in ipſa latera, fient quæſiti numeri.

Vt ſi petantur 4. numeri. Sume 65. quem diuide bis in duos quadratos, erunt horum latera 1. 8. 4. 7. quorum ſumma 20. qua diuiſa per 65. fit $\frac{4}{13}$. quo ducto ſigillatim in ſupradicta latera, fiunt quæſiti numeri $\frac{4}{13}$ $\frac{32}{13}$ $\frac{16}{13}$ $\frac{28}{13}$.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν δυ α. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον δυ γ. τὸν δὲ δεύτερον δυ η. τὸν δὲ τρίτον δυ ιε. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστιν ἡ δύναμις μία προσλαβοῦσα ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. ὃν μὲν δυ δ. ὃν δὲ δυ θ. ὃν δὲ δυ ις. καὶ δεήσει τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι τῇ πλευρᾷ τοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν, τουτέστιν ϛ ἑνός. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι δυ κϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α κϛ^{ων}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ χοϛ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος η χοϛ^{ων}. ὁ δὲ τρίτος ιε χοϛ^{ων}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus ſummæ ipſorum, quouis ipſorum adiuncto quadratum faciat. Ponatur quadratus ſummæ trium numerorum 1 Q. Tunc ſtatuam primum 3 Q. ſecundum 8 Q. tertium 15 Q. vt quadratus ſummæ trium, nimirum 1 Q. adſcito quolibet ipſorum faciat quadratum, hunc quidem 4 Q. illum verò 9. Q. illum denique 16 Q. Oportet autem & tres coniunctos æquari lateri quadrati ſummæ omnium, hoc eſt 1 N. ſed tres coniuncti efficiunt 26 Q. fit igitur 1 N. $\frac{1}{26}$ erit ergo primus $\frac{3}{676}$ ſecundus $\frac{8}{676}$ tertius $\frac{15}{676}$ & ſoluunt quæſtionem.

IN QVÆSTIONEM II.

HIc etiam duplici de cauſa variari poteſt & operatio & ſolutio. Primò enim quadratus ſummæ numerorum ſtatui poteſt quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c. Deinde quadrato ſummæ manente eodem, ipſi numeri ponentur diuerſimodè, prout quadratus ſummæ auferetur à diuerſis quadratis, & reſidua ponentur pro quæſitis numeris. Sit poſito quadrato ſummæ 1 Q. poni poſſunt ipſi numeri, non ſolùm vt fecit Diophantus 3 Q. 8. Q. 15 Q. ſed etiam 24 Q. 35 Q. 48. Q. & ſic in infinitum. Vnde patet eadem arte quæſtionem ad quoslibet numeros extendi poſſe. Et hinc quoque formatur Canon vniuerſalis.

Sume quemlibet quadratum, quem aufer à totidem quadratis, quot petuntur numeri, per ſummam reſiduorum diuide latus ſumpti ab initio quadrati, quotientis quadratum ducito ſigillatim in ipſa eadem reſidua, fient quæſiti numeri.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τ. ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ϛϛ δ. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος δυ ις. ὃς λείψας δυνάμεις ζ. καὶ δυνάμεις ιβ. καὶ δυνάμεις ιε ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δυνάμεις ζ τὸν δὲ δεύτερον δυνάμεις ιβ. τὸν δὲ τρίτον δυ ιε. λοιπόν ἐστι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι τοῖς τρισίν. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ὑπόκειται ϛϛ δ. οἱ δὲ τρεῖς εἰσι δυ λδ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β ιζ^{ων}. ἡ δὲ δύναμις

INVENIRE tres numeros, vt eorum ſummæ quadratus, quouis ipſorum detracto, faciat quadratum. Ponatur ſumma trium 4 N. erit illius quadratus 16 Q. qui detractis tum 7 Q. tum 12 Q. tum 15 Q. facit quadratum. Statuo ergo primum 7 Q. ſecundum 12 Q. tertium 15 Q. Reliquum eſt compoſitum ex tribus æquari ſummæ illorum. Sed ſumma trium poſita eſt 4 N. Compoſitus autem ex tribus eſt 34 Q. Proinde fit 1 N. $\frac{2}{17}$. Quadratus $\frac{4}{289}$ erit ergo primus $\frac{28}{289}$. ſe-

cundus [illegible] tertius [illegible] & ſoluunt quæſtionem.

δ^{ων}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κη [illegible]. ὁ δὲ δεύτερος μη [illegible]. ὁ δὲ τρίτος ξ [illegible]. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus compoſiti ex tribus, detractus a quolibet ipſorum faciat quadratum. Ponatur, compoſitus ex tribus 1 N. Quadratus autem illius 1 Q. & ſunto tres numeri; hic quidem 2 Q. ille verò 5 Q. tertius 10. Q. Nam horum quilibet detracto quadrato compoſiti ex tribus, hoc eſt 1 Q. facit quadratum. Et quia quadratus compoſiti ex tribus, latus habet, patet hoc eſſe compoſitum ex tribus. Summa igitur trium eſt 1 N. ſed eſt quoque 17 Q. Fit igitur 1 N. $\frac{1}{17}$ quadratus $\frac{1}{289}$ eritque primus $\frac{2}{289}$ ſecundus $\frac{5}{289}$ tertius $\frac{10}{289}$ & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς^{ου} ἑνός. ὁ δὲ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δ^{υ} α. καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς ὃς μὲν δ^{υ} β. ὃς δὲ δ^{υ} ε. ὃς δὲ δ^{υ} ι. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστι τὴν δ^{υ} α. ποιῶν τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν πλευρὰν ἔχει, δῆλον. ὅτι ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν. ἡ ἄρα σύνθεσις τῶν τριῶν ἐστὶν ς^{ου} ἑνός, ἀλλὰ καὶ δυνάμεων ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ις^{ων} ἡ δὲ δύναμις α σπθ^{ων}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος β σπθ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ε σπθ^{ων}. ὁ δὲ τρίτος ι σπθ^{ων}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONES III. ET IV.

NVLLA in his difficultas. Eadem ferè hic dici poſſunt, quæ ad duas præcedentes ſunt adnotata, & Canones eadem facilitate formabuntur. Cæterùm his quatuor quæſtionibus idem agit Diophantus in tribus numeris, quod fecit in duobus, libro ſecundo quæſtionibus 23. 24. 25. 26. vnde etiam colligere licet huiuſmodi quæſtiones ad quotlibet numeros eadem arte extendi.

QVÆSTIO V.

INVENIRE tres numeros, quadrato æquales, quorum bini reliquum ſuperent quadrato numero. Ponantur tres ſimul æquales quadrato ab 1 N. + 1. hoc eſt 1 Q. + 2 N. + 1. Quorum primus & ſecundus ſuperent tertium vnitate. Erit ergo tertius $\frac{1}{2}$ Q. + 1 N. ſic enim primus & ſecundus ſuperabunt illum vnitate. Rurſus ſecundus & tertius ſuperent primum quadrato, nimirum 1 Q. erit ſimiliter primus 1 N. + $\frac{1}{2}$. Reliquum ergo habemus ſecundum $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$. ſupereſt vt primus & tertius ſuperent ſecundum quadrato numero. Sed quo primus & tertius ſuperant ſecundum ſunt 2 N. Hoc ergo æquatur quadrato, puta 16. & fit 1 N. 8. erit igitur primus 8 $\frac{1}{2}$. ſecundus 32 $\frac{1}{2}$. tertius 40 & ſatisfaciunt propoſito.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως συν δύο λαμβανόμενοι, τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ ἀπὸ ς^{ου} α μ^{ο} α. τουτέστι δ^{υ} α ς^{οι} β μ^{ο} α. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερεχέτωσαν μ^{ο} α. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται δ^{υ} ἥμισυ ς^{ου} α. ἵνα καὶ ὁ δεύτερος ὑπερέχωσι τοῦ τρίτου τῇ μ^{ο}. πάλιν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ὑπερεχέτωσι τετραγώνῳ. ὑπερεχέτωσαν δ^{υ} α. ἔσται ὁμοίως ὁ πρῶτος ς^{ου} α μ^{ο} ἥμισυ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν δεύτερον ἔχομεν δυνάμεως ἥμισυ μ^{ο} ἥμισυ. λοιπὸν δεῖ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου ὑπερέχειν τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τοῦ μὲν δευτέρου ὑπερέχει ς^{οι} β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, τουτέστι μ^{ο} ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} η. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^{ο} η καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ο} λβ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ τρίτος μ^{ο} μ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM V.

QVOD ſupponit hic Diophantus, tale eſt. *Datis tribus numeris, ſi interuallum quo duo ex illis ſuperant tertium auferatur à ſumma trium numerorum, remanet duplum tertij.*

Hoc ipſum verò iam demonſtratum eſt ad decimam octauam primi. Dupliciter autem variari poſſunt tam operatio quàm ſolutio. Primo enim quadratus qui ponitur pro ſumma trium numerorum fingi poteſt non ſolùm à latere 1 N. + 1. ſed à quotcunque Numeris + quotcunque vnitatibus. Deinde interuallum primi & tertij ſupra ſecundum, quod in hypotheſi Diophantæa reperitur 2 N. poteſt æquari cuilibet vnitatum numero quadrato, vt manifeſtum eſt.

QVAESTIO VI.

Ἄλλως.

ΖΗΤΩ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἴσους τετραγώνῳ. ἐὰν δὲ συνθῶ β̄ τετραγώνους οἷον τὸν δ̄ καὶ τὸν θ̄. καὶ ζητήσω τίς τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιγ̄. ποιεῖ τετράγωνον. εὑρήσω τὸν λς̄. καὶ ἔσονται οἱ τρεῖς τετράγωνοι ἴσοι ἑνὶ τετραγώνῳ. λοιπὸν ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως συνδύο τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι δοθέντι ἀριθμῷ, ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου, μο δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου, τοῦ πρώτου, μο θ̄. ὁ δὲ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου μονάδας λς̄. τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ ἐστὶν ὁ μὲν πρῶτος μο κ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ς̄ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ τρίτος μονάδων κβ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Aliter.

QVÆRO primùm tres numeros quadratos æquales quadrato. Si autem duos quadratos compoſuero, vt 4. & 9. & quæſiuero quis quadratus adſcito 13, faciat quadratum, inueniam 36. & erunt tres quadrati æquales vni quadrato. Reſtat vt quæramus tres numeros, vt bini iuncti reliquum ſuperent dato numero, primus ſcilicet & ſecundus, tertium ſuperent vnitatibus 4. ſecundus & tertius primum excedant vnitatibus 9. tertius & primus ſecundo ſuperaddant vnitates 36. Hoc autem ſupra demonſtratum eſt. Et eſt primus 20. ſecundus 6 ½. tertius 22 ½. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM VI.

DVO ſupponit Diophantus. Primum reperiri poſſe tres quadratos, quadratum ſimul conficientes, quod quidem facilè fit auxilio vndecimæ ſecundi. Nam ſumptis duobus quibuslibet quadratis puta 4. & 9. quorum ſumma 13. Iam quæro per vndecimam ſecundi duos quadratos quorum interuallum ſit 13. & horum minor 36. eſt tertius quæſitus. Secundò ſupponit author tres exceſſus binorum ſuprà reliquum, æquari ſummæ ipſorum numerorum, quod iam à nobis eſt demonſtratum ad decimam octauam primi. Porrò tum ex hac operatione, tum ex Canone decimæ octauæ primi eruitur huiuſmodi Canon.

Sume tres quadratos quadratum conficientes, ab eorum ſumma aufer ſigillatim vnumquemque ipſorum, reſiduorum ſemiſſes erunt quæſiti numeri.

Sed & non vulgari artificio quæſtio extendetur ad quatuor numeros, & ſic proponetur.

Inuenire quatuor numeros quadrato æquales, quorum terni reliquum ſuperent quadrato numero.

Ponatur ſumma numerorum quilibet numerus quadratus, puta 4. Quia ergo vt oſtenſum eſt ad vigeſimam primi, ſumma exceſſuum dupla eſt ſummæ numerorum, erit exceſſuum ſumma 8. Reſtat ergo vt 8. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 4. Id autem facilè fiet ſi 4. diuidatur bis in duos quadratos per octauam ſecundi, eruntque hi $\frac{16}{25}$ $\frac{64}{25}$ [illegible] [illegible]. Itaque applicando hic Canonem vigeſimæ primi, hoc eſt à ſemiſſe exceſſuum qui eſt 4. auferendo ſingulos exceſſus, & reſiduorum capiendo ſemiſſes, fient quæſiti numeri [illegible]. ſic licebit quæſtionem ad quotlibet numeros extendere; ſed aliquando vtendum erit artificio quo duodecima quinti vtitur Diophantus. Vt ſi quærantur quinque numeri quadrato æquales, quorum quaterni reliquum ſuperent quadrato numero. Quare quæſtionis huius explicationem reiicimus in decimam ſeptimam quinti, vbi commodius afferetur.

QVÆSTIO VII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt bini iuncti faciant quadratum. Statuantur tres ſimul æquales quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. & eſto primus cum ſecundo 1 Q. relinquetur ergo tertius 2 N. + 1. Eſto autem ſecundus cum tertio 1 Q. + 1 − 2 N. à latere 1 N. − 1. Et quia tres ſimul ſunt 1 Q. + 2 N. + 1. relinquetur vtique primus 4 N. ſed primus cum ſecundo poſitus eſt 1 Q. erit igitur ſecundus 1 Q. − 4 N. Oportet itaque & primum tertio iunctum, nempe 6 N. + 1. æquari quadrato. Sit ergo is 121. & fit 1 N. 20. erit igitur primus 80. ſecundus 320. tertius 41. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ δυ α, ςς β μο α καὶ ἔστω ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, δυ α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ςς β, μο α. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ πρώτου, δυ α μο α ⋔ ςς β. ἀπὸ πλευρᾶς ςς α λείψει μο α. καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς δυ α ςς β μο α. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς δ. ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ δευτέρῳ τέτακται δυ α. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται δυ α λείψει ςς δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου συναγόμενον ςς ϛ μο α. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω ἴσος μο ρκα. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο π. ὁ δὲ δεύτερος μο τκ. ὁ δὲ τρίτος μο μα. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

QVÆSTIO VIII.

Aliter.

PONANTVR tres ſimul 1 Q. + 2 N. + 1. & ſint primus & ſecundus 1 Q. relinquitur ergo tertius 2 N. + 1. Eſto rurſus ſecundus cum tertio 1 Q. + 1. − 2 N. horum ergo tertius cùm ſit 2 N. + 1. relinquitur ſecundus 1 Q. − 4 N. eſt autem & primus cum ſecundo 1 Q. quorum ſecundus eſt 1 Q. − 4 N Relinquitur ergo primus 4 N. & tres coniuncti faciunt imperatum quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & primus cum ſecundo, itemque ſecundus cum tertio faciunt quadratum. Oportet itaque & tertium cum primo iunctum, nimirum 6 N. + 1. æquari quadrato. Eſto quadrato 36. & fit 1 N. $\frac{35}{6}$. Erit ergo primus $\frac{140}{6}$. hoc eſt $\frac{840}{36}$. ſecundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. & ſoluunt quæſtionem.

Ἄλλως.

ΤΕΤΑΧΘΩΣΑΝ οἱ τρεῖς δυ α ςς β μο α. καὶ ἔστω ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος δυ α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς β μο α. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου δυ α μο α λείψει ςς β. ὧν ὁ τρίτος ςς β μο α. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ α λείψει ςς δ. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου δυ α. ὧν ὁ δεύτερος δυ α λείψει ςς δ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς δ. καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον δυ α, ςς β μο α. καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου συναγόμενον ςς ϛ μο α. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω μο λϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λε ϛων. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρμ ϛων. τουτέστιν ωμ λϛων. ὁ δὲ δεύτερος τπε λϛων. ὁ δὲ τρίτος υνϛ λϛων. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVÆSTIONES VII. ET VIII.

INTER has duas propoſitiones nulla omnino vel perexigua eſt differentia; eadem fermè eſt operatio aliter atque aliter explicata. Diuerſitas in eo conſiſtit, quod in ſeptima inuenta prius tertij numeri hypoſtaſi, inuenit deinde hypoſtaſim primi, vnde elicit hypoſtaſim ſecundi. At in octaua inuento prius tertio, inde elicit ſecundum, atque inde primum. Eodem tamen recidit vtraque operatio, vt manifeſtum eſt. Itaque vt omnia explicentur dilucidè, & varietas omnis tum operationis tum ſolutionis perfectè comprehendatur.

Aduerte primò, vt benè monet Xilander, pro quadrato quem tres numeri ſimul conſtituunt ſtatui poſſe quemlibet quadratum, cuius latus conſtet ex quolibet Numerorum numero + quot-

libet vnitatibus. Poſuit Diophantus latus illius 1 N. + 1. ſed poni poterat 1 N. + 2. vel 1 N. + 3. &c. vel etiam 2 N. + 1. 2 N. + 2. 2 N. + 3. &c.

Aduerte ſecundò pro ſumma ſecundi & tertij ſtatui poſſe quadratum quemlibet minorem quadrato, qui poſitus eſt pro ſumma trium numerorum. Sic Diophantus poſita ſumma trium 1 Q. Q. + 2 N. + 1. poſuit ſummam ſecundi & tertij 1 Q. − 2 N. + 1. ſed ſi ponatur ſumma trium 1 Q. + 4 N. + 4. poni poterit ſumma ſecundi & tertij 1 Q. + 2 N. + 1. vel etiam 1 Q. − 2 N. + 1. vel 1 Q. − 4 N. + 4. & ſic in infinitum.

Aduerte tertiò ſummam primi & tertij quæ quadrato æquanda manet, æquari debere tali quadrato, vt inde auferendo vnitates quæ continentur in eadem ſumma, & diuidendo reſiduum per numerum Numerorum eiuſdem ſummæ, prodeat quotiens maior numero Numerorum, qui reperiuntur cum ſigno defectus in hypoſtaſi ſecundi numeri. vt in hypoteſi Diophantæa, vbi ſumma primi & tertij 6 N. + 1. eſt æquanda quadrato, quia hypoſtaſis ſecundi eſt 1 Q. − 4 N. Oportet inuenire quadratum qui vnitate multatus, & diuiſus per 6. det quotientem maiorem quàm 4. Id autem vt arte certa conſequamur. Ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. vnde ablata vnitate; fiet 1 Q. − 1. quo diuiſo per 6 fiet 1/6 Q. − 1/6. maior quàm 4. & ſupplendo defectum, fiet 1/6 Q. maior quàm 4 1/6 & omnia per 6. multiplicando fiet 1 Q. maior quàm 25. Quamobrem æquabimus 6 N. + 1. cuilibet quadrato maiori quàm 25. In prima operatione Diophantus æquauit 6 N. + 1. quadrato 121. In ſecunda verò, quadrato 36. Eodemque artificio reperietur terminus ſuprà quem conſiſtere debet talis quadratus, ſi primæ poſitiones aliter inſtituantur.

Porro ex operatione Diophanti elicio ſatis artificioſum Canonem.

Cape duos quadratos quorum ratio ſit maior quàm 25. ad 1. horum interualli beſſis continet primum quæſitorum; Quem ſi auferas à quadrato quotientis qui fit diuidendo idem interuallum per ſextuplum minoris lateris, orietur ſecundus. Denique ſi eiuſdem interualli trienti addas minorem quadratum, fiet tertius.

Verbi gratia cape quadratos 121 & 1. horum interuallum eſt 120. cuius 2/3 ſunt 80. primus numerus. Tum diuide 120 per 6. ſextuplum minoris lateris fiet 20. cuius quadratus 400. vnde auferendo 80. fit 320. ſecundus numerus, Denique trienti ipſius 120. qui eſt 40. adde minorem quadratum 1. fiet 41. tertius numerus. ſunt ergo tres quæſiti numeri 80. 320. 41.

QVÆSTIO IX.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. Ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἵνα ὦσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς συνθέσεως τῶν τριῶν μεῖζον ᾖ ἑκάστου. τετάχθω οὖν ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεως α. ὁ δὲ δεύτερος Δ^Υ α ς^ς β Μ^ο α. καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ς^ς β Μ^ο α. ἐὰν δὲ προσθῶ τῷ δευτέρῳ ς^ς β Μ^ο α. γίνεται ὁ τρίτος Δ^Υ α ς^ς δ Μ^ο β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς α. λείψει Μ^ο η. γίνεται ὁ τετράγωνος Δ^Υ α Μ^ο ξδ, λείψει ς^ς ις, ἴσος Δ^Υ α ς^ς δ Μ^ο β. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ξβ/κ τουτέστι λα/ι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϡξα. ὁ δὲ δεύτερος ͵αχπα. ὁ δὲ τρίτος ͵βυα. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον, τουτέστι τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, καὶ ἔτι τῶν τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον ἑκάστου αὐτῶν. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶν οἱ τετράγωνοι

INVENIRE tres numeros in æquali interuallo, vt bini iuncti quadratum efficiant. Quæro primùm tres quadratos numeros æqualibus interuallis diſtantes, quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quouis ipſorum. Ponatur igitur primus 1 Q. ſecundus autem 1 Q. + 2 N. + 1. & eſt ipſorum interuallum 2 N. + 1. ſi autem addidero ſecundo 2 N. + 1. fiet tertius 1 Q. + 4 N. + 2. Hæc æquantur quadrato à latere 1 N. − 8. ſitque quadratus 1 Q. + 64 − 16 N. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fit 1 N. 62/20 hoc eſt 31/10. Erit ergo primus 961. ſecundus 1681. tertius denique 2401. & ſatisfaciunt propoſito, ſunt enim tres quadrati æquali interuallo diſtantes, & ſemiſſis ſummæ illorum, quouis ipſorum eſt maior. Venio nunc ad id quod quæritur, ſcilicet quo pacto tres numeri inueniantur eodem interuallo ſe ſuperantes, quorum bini coniuncti quadratum faciant. Primùm quæro tres quadratos in æquali interuallo, vti iam demonſtratum eſt, & ſunt huiuſmodi quadrati.

Primus

Primus 961. ſecundus 1681. tertius 2401. inueniendum iam eſt quomodo primus & ſecundus facere poſſint 961. ſecundus & tertius 2401. nam ob interualli æqualitatem inuertitur ordo, tertius & primus 1681. Statuatur trium ſumma 1 N. Cùm ergo tres ſimul ſint 1 N. ſi inde detraxero ſummam primi & ſecundi nimirum 961. habebo tertium 1 N. − 961. & rurſus ſi ab 1 N. abſtulero ſummam ſecundi & tertij, nempe 2401. habebo primum 1 N. − 2401. ſi autem ab 1 N. dempſero ſummam tertij & primi, nimirum 1681. habebo ſecundum 1 N. − 1681. Reſtat vt tres ſimul iuncti æquales ſint 1 N. & fit 1. N. 2521. ½ & factum eſt quod imperabatur.

ὁ πρῶτος πξα. ὁ δεύτερος αχπα, ὁ τρίτος βυα. νῦν δεῖ εὑρεῖν ὅπως ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι μο πξα. ὁ δὲ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος βυα. ἐνήλλακται γὰρ διὰ τὴν ἴσην ὑπεροχήν. ὁ δὲ τρίτος καὶ ὁ πρῶτος μο. αχπα. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ςο ἑνός, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ςο ἑνός, ἐὰν ἄρα ἀφέλω τὰς τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μο πξα. ἕξω τὸν τρίτον ςο α ⋔ μο πξα. καὶ πάλιν ἐὰν ςο ἑνός, ἀφέλω τὰς τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μονάδας βυα. ἕξω τὸν πρῶτον ςο α λείψει μο, βυα. ἐὰν δὲ ςο ἑνὸς ἀφέλω τὰς τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου μονάδας αχπα. ἕξω τὸν δεύτερον ςο α, λείψει μο αχπα. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους εἶναι ἀριθμῷ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς βφκα καὶ ἥμισυ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM IX.

HIc multa obſeruanda ſunt quæ minimè attigit Xilander, ſine quibus operatio Diophanti nequit perfectè intelligi.

Primò, quærit tres quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum, quia vult vt quæſiti numeri bini & bini conſtituant huiuſmodi quadratos. Id autem fieri non poteſt, niſi trium quadratorum ſummæ ſemiſſis quolibet ipſorum ſit maior, vt demonſtratum eſt ad decimam ſextam primi, ad quam tandem reducitur hæc quæſtio, vt liquet ex vltima operatione quæ prorſus eadem eſt cum operatione decimæ ſextæ primi. vnde etiam vti poſſes Canone ibidem tradito.

Secundò, ſumit huiuſmodi quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quia inde ſequitur ipſos tres numeros quæſitos, qui bini hos quadratos conſtituunt, diſtare etiam inter ſe interuallis æqualibus, vt poſtulat quæſtio. Quod pendet à tali propoſitione.

Si fuerint tres numeri, qui bini conſtituant ſummas æqualibus interuallis diſtantes, & ipſi numeri æqualibus diſtabunt interuallis, & è conuerſo.

A 2. B 5. C 8.
D 7. E 10. F 13.

Sint tres A B C. quorum A B ſimul faciant D. At A C ſimul componant E, & B C. ſimul conſtituant F. ſintque D E F. æqualibus diſtantes interuallis. Dico & ipſos A B C. æqualibus interuallis diſtare, imò iiſdem prorſus quibus diſtant ipſi D E F. Etenim quia idem A. additus vtrique B & C. facit D & E. erit idem interuallum inter D & E. quod eſt inter B & C. (nam idem numerus duobus inæqualibus additus, ſummas facit eodem interuallo inæquales.) Similiter quia idem C. additus vtrique A & B. componit ipſos E & F. erit eandem ob cauſam, idem interuallum ipſorum E F. quod eſt ipſorum A B. Quare conſtat propoſitum, vnde etiam innoteſcit inuerſio illa ordinis de qua loquitur Diophantus, nam primus & ſecundus conſtituunt D. At ſecundus & tertius faciunt F. Ac demum tertius & primus componunt E. Quare & ipſe in quadratis inuentis ordinem inuertit, vult enim primum quadratum eſſe ſummam primi & ſecundi numeri. At tertium quadratum eſſe ſummam ſecundi & tertij numeri. Ac demum ſecundum quadratum eſſe ſummam tertij & primi numeri.

Tertiò numeri quadrato æquandi 1 Q. + 4 N. + 2. latus fingit Diophantus 1 N. − 8. tali arte vt reſoluendo hypoſtaſes per valorem Numeri, fiant quadrati quæſiti quales poſtulantur, nimirum vt quilibet ipſorum, minor ſit ſemiſſe ſummæ eorumdem. Id autem quomodo certa ſcientia conſequi poſſimus non ſtatim apparet. Et Xilander quidem experiendo didicit latus fictitium eſſe non poſſe 1 N. − 6. Sed non docuit modum inueniendi terminum ſupra quem conſiſtere debet vnitatum numerus in dicto latere ponendus cum defectu, quem ſanè ſi eſſe 8. exiſtimauit, allucinatus eſt, cùm optimè fingi poſſit latus illud 1 N. − 7. vt mox patebit. Itaque vt rem à fundamentis aperiamus. Quia ſi ſint tres numeri quorum quilibet minor ſit ſemiſſe ſummæ illorum, hoc idem eſt, atque ſi duo quilibet ex ipſis maiores ſint reliquo vt manifeſtum eſt. At duo quilibet maiores erunt reliquo, ſi duo minores ſimul ſuperent maximum. Eo redacti ſumus vt inueniamus tres quadratos in medietate Arithmetica, vt medius & minimus ſimul excedant maximum. eſt autem minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. Horum ergo ſumma 2 Q. +

2 N. + 1. debet eſſe maior maximo qui eſt 1 Q. + 4 N. + 2 & auferendo vtrinque ſimilia, remanet 1 Q. maior quàm 2 N. + 1. qua æquatione reſoluta, fit 1 N. maior quàm R. 2 + 1. ſeu quàm 2 $\frac{4}{10}$. Quamobrem in fingendo latere quadrati 1 Q. + 4 N + 2. curandum eſt vt valor numeri non ſit minor quàm 2 $\frac{4}{10}$. Atqui valor Numeri fiet à quodam quadrato, multato binario, & diuiſo per duplum ſui lateris quaternario auctum. Inueniendus ergo eſt huiuſmodi quadratus. Ponatur is 1 Q. Igitur $\frac{1\,Q. - 2}{2\,N. + 4}$ non minor eſſe debet quàm 2 $\frac{4}{10}$. & omnia ducendo in 2 N. + 4. fit 1 Q. − 2 non minor quàm 5 N. + 10. & tandem 1 Q. non minor quàm 5 N. + 12. Quare æquabimus 1 Q. numero paulo maiori quàm 5 N. + 12. puta 5 N. + 14. & fiet 1 N. 7. Itaque in latere fictitio ponentur vnitates non minores quàm 7. Quod ſi fingatur latus illud 1 N. − 7. fiet quadratus 1 Q. − 14 N. + 49. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{47}{18}$. ſunt ergo quæſiti quadrati 2209. 4225. 6241.

Hinc ad ſoluendum hoc lemma elicitur huiuſmodi Canon.

Sume quemuis numerum non minorem quàm 7. & eius quadratum binario multatum diuide per duplum ſui lateris quaternario auctum, quotientis quadratus eſt minimus quæſitorum. Cui ſi addas duplum ſui lateris vnitate auctum, fiet ſecundus, & huic ſi addas idem interuallum, fiet tertius.

Semel autem inuentis tribus huiuſmodi quadratis, reperientur alij infiniti idem præſtantes, ſi iam inuenti per eundem aliquem quadratum multiplicentur vel diuidantur, nam fient quadrati æqualibus quoque interuallis diſtantes, vt iam monuimus ad vigeſimam ſecundi, quæ cauſa eſt cur Diophantus omiſſo communi denominatore, ſolis vtatur numeratoribus. Denique hoc lemmate expedito, ſoluetur iam ipſa quæſtio per Canonem decimam-ſextam primi, vt euidens eſt. ſic inuentis quadratis 2209. 4225. 6241. horum ſummam cape fiet 12675. cuius ſemiſſis 6337 $\frac{1}{2}$. vnde auferendo ſigillatim eoſdem quadratos, remanent ordine inuerſo quæſiti numeri 4128 $\frac{1}{2}$. 2112 $\frac{1}{2}$. & 96 $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO X.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες προσλαβόντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς μο τριῶν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τῶν πρώτων δυνάμεως α ςς δ μο α. ἵνα μετὰ τῶν τριῶν μονάδων ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ ἑξῆς δύο δυ α ςς ϛ μο ϛ. οἱ δὲ τρεῖς δυ α ςς η μο ιγ. ἵνα καὶ οὗτοι μετὰ μο τριῶν ποιῶσι τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δυ α ςς η μο ιγ. ὧν οἱ πρῶτοι δύο δυ α ςς δ μο α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ μο ιβ. πάλιν ἐπεὶ τρεῖς εἰσι δυ α. ςς η. μο ιγ. ὧν ὁ δεύτερος καὶ τρίτος δυ α ςς ϛ μο ϛ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἐστὶ ςς β μο ζ. ἀλλὰ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός εἰσι δυνάμεως α ςς δ μο α. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ α ςς β λείψει μο ϛ λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβόντα μο τρεῖς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβὼν μο γ. γίνονται ςς ϛ μο κβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λγ ὁ δὲ δεύτερος μο ρπθ. ὁ δὲ τρίτος μο ξδ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compoſitus ex binis quibuſlibet adſumpto dato numero faciat quadratum; ſed & ſumma trium dato numero adiecto faciat quadratum. Eſto datus numerus 3. Compoſitus autem ex duobus primis ſit 1 Q. + 4 N. + 1. vt adſcito 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps ſint 1 Q. + 6 N. + 6. Tres autem ſimul 1 Q. + 8 N. + 13. vt & hi adſumpto 3. faciant quadratum. Et quoniam trium ſumma eſt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum primi duo ſunt 1 Q. + 4 N. + 1. Relinquitur vtique tertius 4 N. + 12. Rurſus quoniam tres ſimul ſunt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum ſecundus & tertius ſunt 1. Q. + 6. N. + 6. relinquitur vtique primus 2 N. + 7. ſed & primus & ſecundus ſunt 1 Q. + 4 N. + 1 relinquitur ergo ſecundus 1 Q. + 2 N − 6. Supereſt vt primus & tertius adſcito 3. faciant quadratum. Sed primus & tertius adſcito 3. faciunt 6 N. + 22. Hæc ergo æquantur quadrato. Eſto is 100 fit 1 N. 13. Erit igitur primus 33. ſecundus 189. tertius 64. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM X.

QVæ monet Xilander de poſitionum varietate, veriſſima ſunt. Sed allucinatur cùm ait numerum 6 N. + 22. æquari poſſe cuilibet quadrato maiori quàm 22. Nam oportet talem quadratum deligi à quo auferendo 22. & reſiduum per 6. diuidendo fiat quotiens cuius quadratus auctus duplo ſui lateris ſuperet 8. aliter habere non poſſet ſecundus numerus qui poſitus eſt 1 Q. + 2 N. − 6. Ita ſi ponas 6 N. + 22 æquari quadrato 25. ſecundus numerus inuenietur minor nihilo. Quamobrem ſumendus eſt quadratus 36. vel quilibet alius maior quàm 36. vt certa ratione facilè concludi poteſt. Etenim quia 1 Q. + 2 N. debent excedere 6. hac æquatione reſoluta, fit 1 N. maior quàm $\sqrt{7} - 1$. ſeu non minor quàm 1 $\frac{2}{3}$. ſit autem valor numeri, vt dictum eſt à quodam quadrato auferendo 22. & reſiduum diuidendo per 6. quare quæratur huiuſmodi quadratus, & eſto 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{22}{6}$. non minor eſſe debet quàm 1 $\frac{2}{3}$. & tandem 1 Q. reperitur non minor quàm 32 $\frac{2}{3}$. qualis eſt 36. & alius quilibet ſuprà 36.

OBSERVATIO D. P. F.

QVomodo inueniendi ſint 4 numeri vt compoſitus ex binis quibuſlibet adſumpto dato numero conficiat quadratum inuenimus ad propoſitionem 3. libri 5.

QVAESTIO XI.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compoſitus ex duobus quibuſlibet dempto dato numero faciat quadratum, ſed & trium ſumma detracto dato numero faciat quadratum. Eſto rurſus datus numerus 3. Ponatur compoſitus ex duobus primis 1 Q. + 3. vt detracto 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps ſint 1 Q. + 2 N. + 4. Trium verò ſumma 1 Q. + 4 N. + 7. vt & hi dempto 3. faciant quadratum. Et quoniam ſumma trium eſt 1 Q. + 4 N. + 7. quorum primus & ſecundus faciunt 1. Q. + 3. relinquitur tertius 4 N. + 4. Rurſus quia ſecundus & tertius ſunt 1 Q. + 2 N. + 4. quorum tertius eſt 4 N. + 4. relinquitur ſecundus 1 Q. − 2 N. ſunt autem primus & ſecundus 1 Q. + 3. quorum ſecundus eſt 1 Q. − 2 N. relinquitur ergo primus 2 N. + 3 Oportet itaque tertium & primum detracto 3. facere quadratum. Sed tertius cum primo, detracto 3. facit 6 N. + 4. Hæc igitur æquantur quadrato. Eſto is 64. & fit 1 N. 10. Ad poſitiones. Erit primus 23. ſecundus 80. tertius 44. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν ⋔ τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες ⋔ τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω πάλιν ὁ μὲν δοθεὶς μο γ̄. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν δύο πρώτων δυ ᾱ μο γ̄. ἵνα λείψας τὰς τρεῖς μονάδας ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ δύο ἑξῆς δυ ᾱ ςς β̄ μο δ̄. οἱ δὲ τρεῖς δυ ᾱ ςς δ̄. μο ζ ἵνα καὶ οὗτοι λείψει μο γ̄. ποιῶσι τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δυ ᾱ ἀριθμῶν δ̄ μονάδων ζ. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δυ ᾱ μο γ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶν ςς δ̄ μο δ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος εἰσὶ δυ ᾱ ςς β̄ μο δ̄. ὧν ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ ᾱ λείψει ςς β̄. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος δυ ᾱ μο γ̄. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι δυ ᾱ ⋔ ςς β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς β̄ μο γ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου λείψει μο γ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου λείψει μο γ̄ ἐστὶ ςς ϛ̄ μο δ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἔστω τῷ ξδ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ῑ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο κγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο π̄. ὁ δὲ τρίτος μο μδ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XI.

HIc quoque lapſus eſt Xilander cùm putauit numerum 6 N. + 4. æquari potuiſſe quadrato 16 ſic enim ſecundus qui poſitus erat 1 Q. − 2 N. Inuenitur æqualis nihilo. Quare determinandum eſt de huiuſmodi quadrato, hac arte. Vt 1 Q. ſit maior quàm 2 N. oportet vtique 1 N. maiorem eſſe quàm 2. Itaque quia æquando quadrato 6 N. + 4. fit valor Numeri à quodam quadrato auferendo 4. & reſiduum per 6. diuidendo: Eò redacti ſumus vt inueniamus quadratum qui multatus quaternario, & per 6. diuiſus det quotientem maiorem quàm 2. Eſto is 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{4}{6}$. maior eſt quàm 2. & randem 1 Q. reperitur maior quàm 16. Quamobrem numerus 6 N. + 4. æquandus erit quadrato cuilibet maior quàm 16.

OBSERVATIO D. P. F.

Qvæ notauimus ad tertiam libri 3. docebunt quomodo inueniendi ſint 4. numeri, quorum bini quilibet ſumpti dempto dato numero conficiant quadratum.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιβ. ἐπεὶ οὖν ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὸν ιβ ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου. ἔστω δὴ ὁ τετράγωνος μο κε. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ιβ, λοιπὸν ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μο ιγ. ἔστω οὖν ὁ μὲν πρῶτος μο ιγ. ὁ δὲ δεύτερος μο α. καὶ τετάχθωσαν ἐν ἀριθμοῖς. ὥστε τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν ποιεῖν μο ιγ. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ς ιγ. ὁ δὲ δεύτερος ςx. ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ ἑτέρου τετραγώνου ἀφέλω μο ιβ. ἕξω τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω ἀπὸ τοῦ ις. λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται μο δ. τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς ὥστε ποιεῖν τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν μο δ. ἀλλ᾽ ὁ δεύτερός ἐστι ςx. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερός ἐστι ςx. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ς δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μο ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δυ νβ. δεήσει ἄρα δυ νβ μετὰ μο ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ εἰ ἐτύγχανε τὸ πλῆθος τῶν ιγ μετὰ τοῦ πρώτου τετράγωνον, εὐχερὴς ἂν ἡ ἴσωσις. ἀλλ᾽ ἐπεὶ οὐ τοῦτο, ἀπῆκται μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν ἢ τετράγωνος, καὶ ἔτι ἑκάτερος μετὰ μο ιβ ποιῇ τετράγωνον, ἐὰν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς ἀντὶ τετραγώνους, ἔσται ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν τετράγωνος. ζητῶ οὖν εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος μετὰ μονάδων ιβ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον, καὶ εὐχερὴς ὡς ἔφαμεν ἡ ἴσωσις, καὶ ἔστιν ὁ μὲν δ. ὁ δὲ α δ ἑκάτερος γὰρ τούτων μετὰ μονάδων ιβ ποιεῖ τετράγωνον, τούτων εὑρεθέντων ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμῶν δ. τὸν δὲ δεύτερον ςx. τὸν δὲ τρίτον ς α δx. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μο ιβ ποιεῖν τετράγωνον ἀλλ᾽ ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἔστι δυ α. δυ ἄρα α μετὰ μο

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, is adſcito dato numero faciat quadratum. Datus eſto 12. Quoniam igitur poſtulatur vt productus ex primo in ſecundum adſcito 12. faciat quadratum, ſi ab aliquo quadrato dempſero 12. habebo productum ex primo in ſecundum. Eſto itaque quadratus 25. Si ergo ab eo detraxero 12. reliquum habebo productum ex primo in ſecundum, nempe 13. Eſto igitur primus 13. ſecundus autem 1. & ſtatuantur in numeris, ita tamen vt productum multiplicationis eorum ſit 13. & ſit primus 13 N. at ſecundus $\frac{1}{N}$. Itaque ſi ab altero quadrato detraxero 12. habebo productum ex ſecundo in tertium. Eſto a quadrato 16. relinquitur ergo productus ex ſecundo in tertium 4. ſtatuantur rurſus in numeris, ita vt productum multiplicationis eorum ſit 4. Cùm ergo ſecundus ſit $\frac{1}{N}$. erit vtique tertius 4 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium addito 12 fieri quadratum. Sed productus ex primo in tertium eſt 52 Q. Proinde 52 Q. + 12. æquantur quadrato. Et ſi 13. numerus pro primo poſitus quadratus fuiſſet, facilis eſſet æquatio. Quod cùm non ſit, eo res deducta eſt vt duo numeri ſint inueniendi, vt productum multiplicationis eorum ſit quadratus, & præterea vterque cum 12. faciat quadratum. Sed & ſi loco numerorum quadratos inueniam, ij ſua multiplicatione quadratum producent. Oportet ergo inuenire duos quadratos quorum vterque adſcito 12. faciat quadratum. Hoc autem facile eſt, & æquationem expediet, & eſt alter 4. alter $\frac{1}{4}$ vterque enim addito 12. facit quadratum. His repertis redeo ad id quod initio actum erat, & pono primum 4 N. ſecundum $\frac{1}{N}$. tertium $\frac{1}{4}$ N. Reſtat vt productus ex primo in tertium

adiuncto 12. faciat quadratum. Sed productus ex primo in tertium eſt 1 Q. Proinde 1 Q. + 12. æquatur quadrato Formo quadratum à latere 1 N. + 3 nempe 1 Q. + 6 N + 9. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & conſtat propoſitum.

ιβ. ἴσον ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσσω ὃ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς^ο ᾱ μ^ο γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ^υ ᾱ ςς^οι ς̄ μ^ο θ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM XII.

HÆC quæſtio cum ſequente eſt de earum numero quas pro deploratis reliquit Xilander, in quam cùm multa infeliciter commentus ſit, textum tamen Diophanti leuiter admodum deprauatum reſtituere non potuit. Sanè tota deprauatio in eo eſt, quod fractionem Numericam $\frac{1}{N}$. imperitus librarius ambiguè ſemper expreſſit, nam primo loco ſic eam exhibet ς^ο τῶ. deinde paſſim ς. cùm tamen aliarum fractionum more potiùs fuiſſet ſic exprimenda [illegible]. Hinc erroris anſam accipiens Xilander, vertit vbique 1 N. loco $\frac{1}{N}$. vnde in difficultates inextricabiles ſeipſum coniecit.

Porrò dupliciter variari poſſunt poſitiones & ſolutio, nam loco ipſorum 4. & $\frac{1}{4}$. infiniti alij quadrati inueniri per vndecimam ſecundi, qui adſcito 12. quadratum faciant. Deinde numeri quadrato æquandi 1 Q. + 12. latus diuerſimodè fingi poteſt, videlicet ab 1 N. + tot vnitaribus, quarum quadratus ſit maior quàm 12. Diophantus æquauit quadrato à latere 1 N. + 3. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. ſuntque quæſiti numeri 2. 2 $\frac{1}{2}$.

Placet etiam in artis ſpecimen aliam tradere analyſim, Diophantæa vtique non deteriorem, quàm excogitaueram priuſquam mihi contigiſſet Græcum videre Codicem. Sit datus numerus 20. quæratur quadratus qui adſumpto 20. faciat quadratum, is erit 16. Iam ergo ſtatuantur. Primus & ſecundus duo quilibet Numeri, quorum mutuo ductu fiat 16. Et ſit primus 8. ſecundus 2. nam euidens eſt ſic vni parti propoſiti ſatisfieri. Tum verò ſtatuatur pro tertio certus quadratorum numerus, qui ductus in ſecundum 2. faciat quadratum, puta 2 Q. vel 8 Q. vel 18 Q. &c. & adiiciatur ei defectus tot vnitatum, vt hæ multiplicatæ per eundem ſecundum numerum 2. faciant datum numerum 20. Hunc vnitatum numerum reperies diuidendo 20. per 2 vnde fit 10. Quamobrem ponetur tertius 2 Q. − 10. ſic enim eo ductu in ſecundum 2 fit 4 Q. − 20. cui addendo datum numerum 20. fit quadratus 4 Q. Supereſt vt productus primi in tertium adſumpto 20. faciat quadratum, facit autem 16 Q. − 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Eſto eius latus 4 N. − 2. fiet 1 N, 4. ſunt ergo quæſiti numeri 8. 2. 22. & ſatisfaciunt propoſito.

Hac ratione operando poni poſſunt primus & ſecundus duo quilibet numeri, quorum mutuo ductu fiat quadratus qui adſumpto dato numero quadratum faciat. Vnde iam duplex oritur variatio, tum quia huiuſmodi diuerſi quadrati infiniti reperientur per vndecimam ſecundi tum quia eodem ſumpto quadrato ſumentur alij atque alij duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Præterea in hypoſtaſi tertij poni poteſt quilibet quadratorum numerus, qui ad vnitates ſecundi rationem habeat quadrati ad quadratum, vt in noſtra hypotheſi, poni poterat tertius non ſolùm 2. Q. − 10. ſed etiam 8 Q. − 10. 32 Q. − 10. &c. Denique vltimi quadrati latus puta ipſius 16 Q. − 60. diuerſimodè fingi poteſt, nimirum à 4 N. − quotlibet vnitatibus. Vnde ſanè infinita ſolutionum diuerſarum ſuppetit ſylua.

Canones ex his operationibus elici poſſent, ſed non adeò expediti. Quare præſtat duos alios elegantiſſimos afferre, qui ex quibuſdam propoſitionibus libri ſecundi poriſmatum manifeſtè deducuntur. Primus itaque Canon eſto.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque reſiduum diuide per interuallum laterum eorundem quadratorum, duo quotientes vnà cum prædicto laterum interuallo quæſitos exhibebunt numeros.

Verbi gratia datus numerus eſto 12. aufer eum à quadratis 36. & 64. remanent 24. & 52. quæ ſi diuidas per 2. interuallum laterum, fient quotientes 12 & 26. ſunt ergo quæſiti numeri 12. 26. 2. Huius Canonis demonſtratio facilis eſt. Nam ex ipſa conſtructione manifeſtum eſt, ducto 2. in ipſos 12. & 26. & productis 24. & 52. addito eodem 12. fieri quadratos 36. & 64. Rurſus productum ex 12. in 26. adſumpto 12. facere quadratum, demonſtratum eſt vndecima ſecundi poriſmatum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum. Secundus autem Canon eſt.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque reſiduum ſigillatim diuide per interuallum laterum; duo quotientes, vnà cum duplo ſumma ipſorum, multato ſupradicto interuallo, quæſitos exhibent numeros.

Itaque duo primi numeri per hunc canonem reperti, ſunt iidem cum duobus primis per ſuperiorem Canonem inuentis, ſed tertius diuerſus eſt. Ita dato eodem 12. & ſumptis iiſdem quadratis 36. & 64. fient vt prius primus & ſecundus 12. & 26. ſed erit tertius duplum ſummæ illorum multatum binario, nimirum 74. Huius Canonis demonſtratio integra continetur propoſitione decima tertia

ſecundi poriſmatum. Cæterùm vtriuſque Canonis ſimul auxilio licebit propoſitionem extendere ad quatuor numeros , & pulcherrimum problema à nemine hactenus tentatum enodare, nimirum.

Inuenire quatuor numeros , vt qui producitur ex binorum mutuo ductu adſcito dato numero fiat quadratus. Datus eſto 3.

Finge duos quadratos ab 1 N. + tot vnitatibus quarum , quadrati ſuperent 3. ita vt interuallum earundem vnitatum ſit quadratus numerus. Verbi gratia finge latera quadratorum 1 N. + 2 & 1 N. + 6. quorum interuallum eſt quadratus 4. erunt quadrati 1 Q. + 4 N. + 4. & 1 Q. + 12 N. + 36. à quibus aufer ſigillatim datum numerum 3 & reſidua diuide ſigillatim per interuallum laterum 4. Et ſtatue primum quæſitorum $\frac{1}{4}$ Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. Secundum $\frac{1}{4}$ Q. + 3 N. + 8$\frac{1}{4}$. Tertium duplum ſummæ vtriuſque multarum interuallo 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 13. ſic enim productus ex binorum multiplicatione adſcito 3. quadratus fit per ſecundum Canonem. Ponatur denique quartus ipſum interuallum laterum 4. ſic enim primus ſecundus , & quartus ſi bini inter ſe ducantur , & producto addatur 3. fit quadratus per primum Canonem. Supereſt igitur vt producto ex tertio in quartum addendo 3. fiat quadratus. Fit autem 4. Q. + 32. N. + 55. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus abs 2 N. — tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 55. ſitque illud 2 N. — 10. fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Ad hypoſtaſes. Erunt quæſiti numeri $\frac{249}{256}$. $\frac{2617}{256}$. $\frac{1177}{64}$ & 4. qui ſatisfaciunt propoſito. Nam ex primo in tres reliquos qui producuntur , ſigillatim adſumpto 3. faciunt quadratos $\frac{848241}{65536}$. $\frac{342225}{16384}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{921}{256}$. $\frac{585}{128}$. $\frac{21}{8}$. At ex ſecundo in tertium & quartum producti , adſcito 3. faciunt quadratos $\frac{3129361}{16384}$ & $\frac{2809}{64}$ quorum latera $\frac{1769}{128}$ & $\frac{53}{8}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur , adſcito 3. quadratum facit $\frac{1225}{16}$ cuius latus $\frac{35}{4}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter quilibet quadratus numerus maior dato numero 3. puta 4. & fingatur alter ab 1 N. + latere prioris quadrati , nimirum ab 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N + 4. Tum ab vtroque quadrato auferatur 3. & reſidua diuidantur per interuallum laterum quod eſt 1 N. & ſtatuatur primus quæſitorum $\frac{1}{1N}$. ſecundus 1 N. + 4 + $\frac{1}{1N}$. Tertius horum ſummæ duplum multatum interuallo laterum 1 N. nimirum 1 N. + 8 + $\frac{4}{1N}$. Quartus autem ipſum interuallum laterum , nimirum 1 N. Conſtat itaque ex vtroque Canone omnibus poſtulati partibus ſatisfieri , ſi productus ex tertio in quartum adſcito 3. faciat quadratum. Facit autem 1 Q. + 8 N. + 7 hoc ergo æquatur quadrato. Eſto latus eius 1 N. — 23. & fit 1 N. $\frac{29}{3}$ Ad hypoſtaſes. Erunt quæſiti numeri $\frac{3}{29}$. $\frac{3594}{261}$. $\frac{4719}{261}$. $\frac{29}{3}$. qui ſatisfaciunt poſtulatis. Etenim ex primo in reliquos tres qui producuntur , adſumpto 3. quadrato faciunt $\frac{3721}{841}$. $\frac{4096}{841}$. 4. quorum latera $\frac{61}{29}$. $\frac{64}{29}$. 2. At ex ſecundo in tertium & quartum producti , adſcito 3. faciunt quadratos $\frac{1907161}{7569}$. & $\frac{1225}{9}$. quorum latera $\frac{1381}{87}$. & $\frac{35}{3}$. Denique productus ex tertio in quartum, adſumpto 3. quadratum facit $\frac{1600}{9}$. cuius latus $\frac{40}{3}$.

Vtraque operatio elegans eſt, & multam recipit varietatem , vt curioſo lectori conſiderandum relinquo. Videtur ipſe Diophantus in hoc problemate hæſiſſe , vt apparet ex vigeſima prima quarti. Qua quærit quatuor Numeros , vt productus ex binorum mutuo ductu adſcita vnitate quadratum faciat. Nam eius operatio cuilibet numero applicari nequit , ſed ſolis quadratis , vt ibi docebimus.

QVÆSTIO XIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου λείψει μο ι. ποιεῖν τετράγωνον, ἐὰν ἄρα τινὶ τετραγώνῳ προσθῶ μο ι. ἕξω τὸν ὑπ' αὐτῶν. ἔστω τῷ δ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μο ιδ. ἔστω πρῶτος μο ιδ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μο α. καὶ τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μο ιδ. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ςς ιδ. ὁ δὲ δεύτερος ςˣ α. πάλιν ἐπὶ ἑτέρῳ τετραγώνῳ προσθῶ μο ι. ἕξω τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω τῷ θ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου μο ιθ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι ὁ αˣ, λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς ιθ. δῆλον

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, multatus dato numero faciat quadratum. Sit datus 10. Quando volumus productum ex primo in ſecundum dempto 10. facere quadratum , ſi alicui quadrato adiecero 10. habebo illum productum. Eſto quadrato 4. erit ergo productus ex primo in ſecundum 14. ſit primus 14. ſecundus igitur erit 1. Statuantur rurſus in numeris , ita tamen vt productus multiplicationis faciat 14. & eſto primus 14. N. ſecundus $\frac{1}{1N}$. Rurſus ſi alteri quadrato adiecero 10. habebo productum ex ſecundo in tertium. Adiiciatur quadrato 9. erit ergo productus ex ſecundo in ter-

tium 19. proinde cùm ſecundus ſit $\frac{1}{19}$. relinquitur tertius 19 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium dempto 10. facere quadratum. Facit autem 266. Q. — 10. hæc ergo æquantur quadrato. Quare ob ea quæ in præcedenti dicta ſunt, eò deuentum eſt vt inueniendi ſint duo quadrati, quorum vterque dempto 10. faciat quadratum. Hoc autem facilè fit, inuenies enim ſi quæras quis quadratus dempto 10. faciat quadratum, & quoniam ſi cui numero additur 1. & ſummæ dimidium in ſe ducitur, & à ſic facto quadrato numerus initio ſumptus detrahitur, relinquitur rurſum quadratus. Addo 1. ad 10. & ſummæ ſemiſſem nimirum $5\frac{1}{2}$ duco in ſe, & à producto $30\frac{1}{4}$ aufero 10. & habeo quadratum $20\frac{1}{4}$ à latere $4\frac{1}{2}$ Pono igitur primum $30\frac{1}{4}$ tertium autem 1 Q. Oportet ergo vt & ab 1 Q. dempto 10. remaneat quadratus. Quare 1 Q. — 10. æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. — 2. nimirum 1 Q. + 4. — 4 N. & fit 1 N. $3\frac{1}{2}$ Tertius igitur qui poſitus erat 1 Q. erit $12\frac{1}{4}$ eſt autem & primus $30\frac{1}{4}$ nam vterque dempto 10. remanet quadratus. Venio ad id quod initio quærebatur. Et ſtatuo primum $30\frac{1}{4}$ N. ſecundum $\frac{1}{N}$ tertium $12\frac{1}{4}$ N. Supereſt itaque vt productus ex primo in tertium dempto 10. faciat quadratum. Atqui productus ille eſt $370\frac{9}{16}$ Q. Hic ergo dempto 10. æquatur quadrato, & vt quadrati integri ſint, multiplicemus eos per 16. ergo 5929. Q. — 160. æquantur quadrato à latere 77 N. — 2. qui eſt 5929 Q. + 4 — 308 N. & fit 1 N. $\frac{41}{77}$ Statueram primum $30\frac{1}{4}$ N. erit igitur $\frac{1240}{77}\frac{1}{4}$ ſecundum $\frac{1}{N}$ erit igitur $\frac{77}{41}$. tertium $12\frac{1}{4}$ N. is erit $\frac{502}{77}\frac{1}{4}$ & conſtat propoſitum.

ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου ⋔ μο ι̅. ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυ σξϛ̅ ⋔ μο ι̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ πρὸ τούτου εἰρημένα, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος λεῖψει μο ι̅. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. εὕρησις γάρ ἐστι ζήτησις ἄν τις τετράγωνος λεῖψει μο ι. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐάν τινι ἀριθμῷ προστεθῇ μονάς, καὶ τῶν γενομένων τὸ ἥμισυ τετραγωνίσωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου τετραγώνου ἀφέλωμεν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ὁ λοιπὸς πάλιν τετράγωνος ἔσται. προστίθημι ταῖς μο α̅. καὶ τῶν γενομένων τὸ ἥμισυ τουτέστι τὰ ε̅ καὶ ἥμισυ. τετραγωνίσας ἀπὸ τῶν γενομένων μο λ̅. α̅ δ^x. ἀφελὼν τὰς μο ι̅ ἕξω τετράγωνον μο κ̅. α̅ δ^x. ἀπὸ πλευρᾶς δ̅ καὶ ἥμισυ. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον λ̅. α̅ δ^x. τὸν δὲ τρίτον δυ α̅. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ δυ α̅ ἀφαιρεθεισῶν μο ι̅. τὸ λοιπὸν γίνεσθαι τετράγωνον. δυ ἄρα α̅ λεῖψει μο ι̅ ἴση ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ϛ^ο α̅ λεῖψει μο β̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυ α̅ μο δ̅ λεῖψει ϛϛ̅ δ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο γ̅ καὶ ἥμισυ. ἐπεὶ ἔταξα τὸν τρίτον δυ α̅. ἔσται ιβ̅. α̅ δ^x. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος λ̅. α̅ δ^x. οἵτινες λεῖψει μο ι̅. ποιοῦσι τετραγώνους. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον, καὶ τάσσω τὸν πρῶτον ϛϛ̅ λ̅. α̅ δ^x. τὸν δὲ δεύτερον α^x. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ̅ ιβ̅. α̅ δ^x. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου λεῖψει μο ι̅, γίνεσθαι τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δυ το̅. α̅ ϛ^x. α̅ ιϛ^x. ταῦτα ἄρα λεῖψει μο ι̅ ἴσος ἐστὶ τετραγώνῳ, καὶ ἵνα ὅλαι δυνάμεις ὦσι ποιῶ αὐτὰς ἑκκαιδεκάκις, δυ ἄρα ͵εϡκθ ⋔ μο ρξ̅. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ̅ οζ̅ λεῖψει μο β̅. τουτέστι δυνάμεις ͵εϡκθ μο δ̅ λεῖψει ϛϛ̅ τη̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο μα̅ οζ^x. ἔταξα τὸν πρῶτον ϛϛ̅ λ̅. α̅ δ^x. ἔσται ͵ασμ̅ οζ^x. α̅ δ^x. τὸν δὲ δεύτερον α^x ἔσται οζ̅ μα^x. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ̅ ιβ̅. α̅ δ^x. ἔσται φβ̅ οζ^x. α̅ δ^x. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XIII.

EADEM ferè dici poſſunt de hac quæſtione quæ de præcedente dicta ſunt. Operatio & ſolutio totidem modis poteſt variari. Nam infiniti quadrati reperientur per vndecimam ſecundi, qui multati numero 10. quadratum relinquant. Et vltimi quadrati 5929. Q. — 160. latus diuerſimodè fingi poteſt. nimirum à 77 N. — quotlibet vnitatibus. Cæterùm Diophantus compendium quærens ad vndecimam ſecundi, hoc vtitur lemmate.

Si dato numero addatur vnitas, & à ſummæ ſemiſſis quadrato auferatur datus numerus, relinquitur quadratus.

A . . . . . D . . . . B. C

Sit datus numerus A B. cui addatur vnitas B C. & totius A C ſemiſſis eſto A D. dico quadratum ipſius A D multatum numero A B. relinquere quadratum. [1] Etenim quadratus A D æqualis eſt producto ex A B in B C vnà cum quadrato ipſius D B. Sed productus ex A B in B C æquatur ipſi A B, quia B C eſt vnitas. Igitur A B & quadratus ex D B ſimul æquantur quadrato ex A D. Quare ſi à quadrato ex A D auferatur A B. relinquetur quadratus ex D B. Quod erat oſtendendum.

[1] 5. ſecundi.

Licet etiam per noſtram analyſim ſoluere quæſtionem hac arte. Datus eſto 20. Quæratur quadratus à quo auferendo 20. ſuperſit quadratus, puta 36. & ſtatuantur pro primo & ſecundo quæſitorum numerorum, duo quilibet quorum mutuo ductu fiat 36. ſit ergo primus 9. ſecundus 4. Tum ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in ſecundum 4. quadratum faciat, puta 1 Q. eique adiiciantur tot vnitates vt ductæ in eundem ſecundum 4. faciant datum numerum 20. Et eſto totus tertius 1 Q. + 5. ſic enim duabus propoſiti partibus ſatisfit. Reſtat vt productus ex primo in tertium detracto 20. faciat quadratum, facit autem 9 Q. + 25. hoc ergo æquatur quadrato, eſto latus illius 3 N. + 1. fiet 1 N. 4. ſunt ergo quæſiti numeri 9. 4. 21. & conſtat. Sed & geminum Canonem eliciemus ex libro ſecundo poriſmatum. Quorum primus eſt.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque ſummam diuide ſigillatim per interuallum laterum, duo quotientes vnà cum eodem interuallo, quæſitos exhibent numeros.

Vt ſi datus ſit 10. adde 10. quadratis 16. & 36. fiunt ſummæ 26. & 46. quas ſi diuidas per 2. interuallum laterum, fiunt 13. & 23. duo ex quæſitis numeris, quorum tertius eſt ipſum interuallum laterum 2. Canonis huius demonſtratio in promptu eſt. Nam conſtat per conſtructionem ducto 2. in ipſos 13. & 23. fieri 26. & 46. à quibus auferendo datum numerum 10. remanent quadrati 16. & 36. At productum ex 13. in 23. detracto 10. eſſe quadratum, oſtenſum eſt duodecima ſecundi poriſmatum. Secundus Canon erit.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque ſummam diuide per interuallum laterum: duo quotientes vnà cum duplo ſumma illorum multato eodem interuallo quæſitos exhibent numeros.

Itaque ſumptis eiſdem quadratis, duo primi numeri coincident cum duobus primis per præcedentem Canonem inuentis. Tertius autem diuerſus erit. Nam ſumptis vt prius quadratis 16. & 36. fient duo primi vt ſuprà 13. & 23. At tertius erit 70. Huius autem Canonis demonſtratio habetur decima quarta ſecundi poriſmatum. Porrò vtriuſque Canonis ope ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire quatuor numeros, vt productus ex binorum mutua multiplicatione detracto quouis dato numerò, quadratus maneat.

Datus eſto 10.

Finge duos quadratos, alterum ab 1 N. + aliquo quadrato numero, puta ab 1 N. + 4. erunt quadrati 1 Q. & 1 Q. + 8 N. + 16. His adde ſigillatim datum numerum 10. & ſummas diuide per interuallum laterum 4. Erit ergo primus quæſitorum $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{5}{2}$. Secundus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{13}{2}$ + 2 N. Tertius horum ſummæ duplum multatum eodem interuallo 4. nimirum 1 Q. + 14 + 4 N. Quartus denique erit idem interuallum, videlicet 4. Sic enim ex vtroque Canone conſtat quinque propoſiti partibus abundè ſatisfieri. Reſtat vt productus ex tertio in quartum detracto 10. relinquatur quadratus. Relinquitur autem 4 Q. + 46 + 16 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Eſto eius latus 2 N. + 6. fiet 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad poſitiones. Erunt quæſiti numeri $\frac{185}{64}$. $\frac{601}{64}$. $\frac{329}{16}$. 4. qui ſatisfaciunt poſtulatis. Nam ex primo in reliquos tres qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{70225}{4096}$. $\frac{50625}{1024}$. $\frac{25}{16}$. quorum latera $\frac{265}{64}$. $\frac{225}{32}$. $\frac{5}{4}$. At producti ex ſecundo in tertium & quartum, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{187489}{1024}$ & $\frac{441}{16}$ quorum latera $\frac{433}{32}$ & $\frac{21}{4}$. Denique productus ex tertio in quartum, detracto 10. quadratum facit $\frac{289}{4}$ cuius latus $\frac{17}{2}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter, quilibet quadratus, puta 1. Alter verò fingatur ab 1 N. + latere prioris, nimirum ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. Tum vtrique quadrato addatur datus numerus 10. & ſummæ diuidantur ſigillatim per interuallum laterum 1 N. Et ſtatuatur primus quæſitorum $\frac{11}{1N}$. Secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. Tertius horum ſummæ duplum multatum interuallo laterum. videlicet 1 N. + 4 + $\frac{44}{1N}$. Quartus denique ipſum interuallum laterum, puta 1 N. Itaque patet ex vtroque Canone quinque poſtulati partibus eſſe ſatisfactum. Reſtat ergo vt productus ex tertio in quartum detracto 10. maneat quadratus. Manet autem 1 Q. + 4 N. + 34. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit eius latus 1 N. − 8. fit 1 N. $\frac{3}{2}$. Ad poſitiones. Sunt quæſiti numeri. $\frac{22}{3}$. $\frac{65}{6}$. $\frac{209}{6}$. $\frac{3}{2}$. qui ſoluunt quæſtionem. Etenim ex primo in tres reliquos qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{625}{9}$. $\frac{2209}{9}$. 1. quorum latera $\frac{25}{3}$. $\frac{47}{3}$. 1. At producti ex ſecundo in tertium & quartum, detracto 10. maneut quadrati $\frac{13225}{36}$ & $\frac{25}{4}$. quorum latera $\frac{115}{6}$. & $\frac{5}{2}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur, detracto 10. relinquit quadratum $\frac{169}{4}$ cuius latus $\frac{13}{2}$.

Quomodo autem reperiendi ſint tres numeri, vt productus ex binorum multiplicatione detractus à dato numero, relinquat quadratum, nondum in vniuerſum aſſequi licuit, ſed ſoluo quæſtionem huiuſmodi, cum datus numerus vel quadratus eſt, vel ex duobus quadratis compoſitus.

Sit

Sit enim datus 20. ſumatur vnus quadratorum, ex quibus 20. componitur, puta 16. & ſtatuantur primus & ſecundus quæſitorum, duo quilibet numeri quorum mutuo ductu fiat 16. puta 8. & 2. tertius verò ponatur talis vnitatum numerus, qui ductus in ſecundum 2. faciat datum numerum 20. eſt is numerus 10. cui addatur defectus tot Quadratorum, vt ſecundo 2. in eos ducto fiat quadratus. Statuatur ergo tertius 10 − 2 Q. ſic enim duabus propoſiti partibus ſatisfit. Reſtat vt productus ex primo in tertium detractus à 20. relinquat quadratum. Sed relinquit 16 Q − 60. Hoc ergo æquatur quadrato cuius latus fingetur à 4 N. − tot vnitatibus, vt per valorem Numeri reſoluendo hypoſtaſes fiat 1 Q minor quàm 5. quia ſcilicet tertius poſitus eſt 10. − 2 Q. Itaque cum quadratus debeat eſſe minor quàm 5. oportet valorem numeri minorem eſſe quàm 2 $\frac{1}{4}$. fiet autem valor Numeri à quodam quadrato adſumente 60. & diuiſo per octuplum ſui lateris. Quærendus ergo eſt quadratus qui adſumens 60. & diuiſus per octuplum ſui lateris, det quotientem minorem quàm 2 $\frac{1}{4}$ fit is 1 Q. Igitur $\frac{1 Q. + 60}{8 N.}$ minor eſt quàm 2 $\frac{1}{4}$ & omnia ducendo in 8 N. fit 1 Q. + 60 minor quàm 18 N. Quare æquemus 18 N. numero paulò maiori quàm 1 Q. + 60. puta numero 1 Q. + 65. fiet 1 N. 5. vel 13. Proinde oportet latus quadrati fingere 4 N. − tot vnitatibus, quæ non deficiant à 5. nec excedant 13. fingatur 4 N. − 5. fiet 1 N. $\frac{17}{8}$. ſunt igitur tres quæſiti 8. 2. $\frac{31}{32}$. & conſtat.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adiecto reliquo quadratum faciat. Quando quærimus productum ex primo in ſecundum addito tertio facere quadratum, ſi expoſito aliquo quadrato, partem illius aliquam ſtatuamus pro tertio, reſiduum autem pro producto multiplicationis primi & ſecundi vnum poſtulatorum præſtabimus. Formetur quadratus ab 1. N. + 3. erit vtique 1 Q. + 6 N. + 9. eſto itaque tertius 9. relinquitur ergo productus ex primo in ſecundum 1 Q. + 6 N. Ponatur primus 1 N. erit igitur ſecundus 1 N. + 6. Oportet ergo & productum ex ſecundo in tertium adſumpto primo, hoc eſt 10 N. + 54. æquari quadrato, & præterea productum ex tertio in primum adſumpto ſecundo, nempe 10 N. + 6. æquari quadrato, & fit duplicata æqualitas. Eſt autem ipſorum interuallum 48. Quamobrem oportet inuenire duos quadratos quorum interuallum ſit 48. Quod facile eſt, & infinitis modis fieri poteſt; eſtque minor 16. maior 64. vtrihorum æquationem accommodemus, reperiemus quantus ſit 1 N. ſi enim dicamus 64. æquari maiori, puta 10 N. + 54. inuenitur 1 N. 1. Rurſus ſi dicamus minorem 16. æquari 10 N. + 6. fit etiam 1 N. 1. Ad poſitiones. Erit primus 1. ſecundus 7. tertius 9. & ſoluunt quæſtionem.

1 ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν λοιπὸν ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἐκθώμεθά τινα τετράγωνον, μέρος μέν τι αὐτοῦ τάξωμεν τὸν τρίτον, τὸν δὲ λοιπὸν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, λυσόμεθα ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. πεπλάσθω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ςº ᾱ μº γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται Δº ᾱ ςς ϛ̄ μº θ̄. ἔστω δὲ ὁ τρίτος μº θ̄, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου Δº ᾱ ςς ϛ̄. τετάχθω ὁ πρῶτος ςº ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται, ςº ᾱ μº ϛ̄. δεήσει ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα τὸν πρῶτον τουτέστι ςς ῑ μº νδ̄ ἴσον εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν δεύτερον τουτέστι ςς ῑ μº ϛ̄ ἴσον πάλιν γίνεσθαι τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μº μη̄. δεήσει ἄρα εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ μº μη̄. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἀπειραχῶς γίνεται. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐλάσσων μº ιϛ̄. ὁ δὲ μείζων μº ξδ̄. καὶ πρὸς ὁποῖον ἂν αὐτῶν ποιησώμεθα τὴν ἰσότητα, εὑρήσομεν τὴν ὑπόστασιν τοῦ ςº. ἐάν τε γὰρ φήσωμεν τὰς τοῦ μείζονος μº ξδ̄ ἴσας εἶναι ςς ῑ μº νδ̄, συνάγεται ὁ ςº μº ᾱ. ἐάν τε πάλιν φήσωμεν τὰς τοῦ ἐλάσσονος μº ιϛ̄ ἴσας εἶναι ςς ῑ μº ϛ̄ συνάγεται ὁ ςº μº ᾱ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μº ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μº ζ̄. ἔτι δὲ καὶ ὁ τρίτος μº θ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

IN QVÆSTIONE XIV.

BENE monet Xilander hîc duplicem contingere poſſe variationem. Primò enim Quadratus qui ponitur fieri ex producto primi in ſecundum , adſcito tertio fingi poteſt à certis numeris ✝ quotlibet vnitatibus , finxit Diophantus ab 1 N. ✝ 3. ſed fingere potuiſſet ab 1 N. ✝ 2. vel 1 N. ✝ 4. vel etiam 2 N. ✝ 3. 2 N. ✝ 4. &c. Deinde duplicata æqualitas infinitis modò reſolui poterat, ſumendo ſcilicet duos quoslibet quadratos, quorum interuallum ſit 48. adhibita tamen cautione quam tradimus ad duodecimam ſecundi, vt videlicet maiores ſint ſumpti quadrati numeris 54. & 6. Verùm quod præcipuum eſt, non attigit Xilander, quomodo nimirum poſitiones primi & ſecundi ita inſtituat Diophantus, vt tandem in vtroque numero quadrato æquando reperiatur idem Numerorum numerus, puta 10 N. Hoc enim ſi non curaſſet, inexplicabilis fuiſſet æquatio. Cùm enim vnitates 54. & 6. nec æquales ſint, nec quadrati numeri, oportuit numerum Numerorum vtrobique eundem reperiri. Itaque cùm productus ex primo in ſecundum poſitus ſit 1 Q. ✝ 6 N. ex infinitis numeris quorum mutuo ductu gigni poterat 1 Q. ✝ 6 N. tales deligendi fuerunt, vt in eorum vtroque idem eſſet numerorum Numerus, quales ſumpſit Diophantus 1 N. & 1 N. ✝ 6. nec alij propoſito ſatisfacientes ſumi potuiſſent, quia vt dictum eſt, oportet ducendo eundem tertium 9. in vtrumlibet ipſorum, & producto addendo reliquum, fieri vtrobique eundem Numerorum numerum, quod fieri non poſſet, ſi Numerorum numeri primi & ſecundi non eſſent æquales.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ος α. ὁ δὲ δεύτερος ς^ων α μ^ο δ. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν ἔσται δ^υ α. ςς δ. δεήσει ἄρα τὸν τρίτον λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν μὲν τὸν τρίτον τάξω ςς δ. λύσομεν ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν δὲ καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου λείψας τὸν πρῶτον ἐστι δ^υ δ ςς ιε ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψας τὸν δεύτερον ἐστι δ^υ δ λείψει ς^ου ἑνὸς μ^ο δ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται πάλιν διπλῆ ἡ ἴσωσις. τῆς γὰρ ὑπεροχῆς αὐτῶν τυγχανούσης ςς ις μ^ο δ. ζητῶ δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ποιῇ ςς ις μ^ο δ. εἰσὶ δὲ μ^ο δ. καὶ ςς δ μ^ο α. πάλιν οὖν ἢ τῆς συντεθέντος τούτων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστι τῷ μείζονι. ἢ τὸ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς κε^κ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε^κ. ὁ δὲ δεύτερος ρε^κ. ὁ δὲ τρίτος ρ^κ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione dempto reliquo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſecundus 1 N. ✝ 4. Productus ipſorum multiplicatione erit 1 Q. ✝ 4 N. Oportet igitur hunc dempto tertio facere quadratum, ſi ergo ponamus tertium 4 N. ſatisfactum erit vni poſtulatorum. Supereſt itaque vt & productus ex ſecundo in tertium dempto primo faciat quadratum, & præterea productus ex tertio in primum dempto ſecundo faciat quadratum. Sed productus ex ſecundo in tertium dempto primo eſt 4 Q. ✝ 15 N. æqualis quadrato. At productus ex tertio in primum dempto ſecundo eſt 4 Q. – 1 N. – 4. æqualis quadrato. Et occurrit rurſus duplicata æqualitas. Cùm itaque interuallum ipſorum ſit 16 N. ✝ 4. Quæro duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. ✝ 4. ſunt autem 4. & 4 N. ✝ 1. Rurſus ergo vel ſummæ ſemiſſis quadratus æquatur maiori, vel interualli ſemiſſis quadratus æquatur minori; & fit 1 N. $\frac{25}{20}$. Erit igitur primus $\frac{25}{20}$. ſecundus $\frac{105}{20}$. tertius $\frac{100}{20}$. & conſtat propoſitũ.

IN QVAESTIONEM XV.

NON temerè, vt malè arbitratur Xilander, ſecundum numerum poſuit Diophantus 1 N. ✝ 4. Nam neceſſe eſt vnitates ſecundi numeri, quadratum eſſe numerum, puta 4. vel 9. vel 16. &c. Cuius rei ratio ex ipſamet operatione ſubtilius conſiderata, ſtatim innoteſcit. Tertius enim numerus ſemper æqualem Numerorum multitudinem continet, vnitatibus in ſecundo 1 N. ✝ 4.

vel 1 N. + 9. &c. erit tertius 4 N. vel 9 N. &c. Quamobrem rurſus ex ductu tertij tam in primum quàm in ſecundum, in quorum vtroque eſt 1 N. fient totidem quadrati, vt vides in hypotheſi Diophanti, fieri 4 Q. & ſi ſecundus poſitus eſſet 1 N. + 9. fierent 9 Q. Si autem in numeris quadrato æquandis 4 Q. + 15 N. & 4 Q. − 1 N. − 4. numerus quadratorum 4. non eſſet quadratus, explicari non poſſet duplicata æqualitas. Nam ſi, vt fecit Xilander, ponatur ſecundus 1 N. + 10. atque adeo tertius 1 N. fient tandem quadrato æquandi 10 Q. + 99 N. & 10 Q. − 1 N. − 10. Quæcunque autem fingas quadratorum latera nunquam produces 10. Q. (cùm nullus ſit numerus qui in ſe ductus efficiat 10. vnde neceſſe erit in æquationem complexam deueniri, & duas ſpecies, vni æquales remanere, ac proinde ſolutionem vt plurimum contingere irrationalem.

Præterea etiam ritè facta poſitione ſecundi numeri, ſtatuendo ſcilicet in eo vnitatum numerum quadratum, aduerte, poſſe te adhuc in eaſdem cautes impingere, niſi magna cum cautione ſeligas duos numeros, quorum mutuo ductu fiat interuallum numerorum quadrato æquandorum. Etenim in Diophantæa hypotheſi, vbi interuallum eſt 16 N. + 4. licet id ex infinitorum numerorum mutuo ductu produci poſſit, nulli tamen idonei ſunt quæſtioni ſoluendæ præter 4 N. + 1. & 4. ſi enim Verbi gratia, ſumas 2 N. + $\frac{1}{2}$ & 8. horum ſummæ ſemiſſis quadratus, puta 1 Q. + 8 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{289}{16}$ æquabitur 4 Q. + 15 N. vnde fiet ſolutio irrationalis. Itaque tales ſeligendi ſunt numeri mutuo ductu producentes propoſitum interuallum, vt in eorum ſumma contineatur duplum lateris Quadratorum, qui in numeris quadrato æquandis reperiuntur. Vt in eadem hypotheſi, vbi quadratorum numerus eſt 4 Q. cuius latus 2 N. cuius duplum 4 N. Oportet tales deligi numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. vt eorum ſumma contineantur 4 N. Quia verò patet primùm illorum neceſſario conſtare debere ex Numeris & vnitatibus, ſecundum autem ex ſolis vnitatibus, ſequitur in primo neceſſe eſſe conſtitui 4 N. atque adeo vt ex ſecundo in primum fiant 16 N. oportet ſecundum eſſe 4. Vt autem præter 16 N. fiant etiam 4. (cùm totum interuallum ſit 16 N. + 4) neceſſe eſt primum eſſe 4 N. + 1. ſecundum 4. Quoniam autem eodem artificio ſæpè in ſequentibus vtendum erit, vt res tyronum memoriæ firmius inhæreat, age alio eam exemplo illuſtremus. Poſito primo numerorum quæſitorum 1 N. ſit ſecundus 1 N. + 9. tertius 9 N. ducto ergo tertio in primum, & inde ablato ſecundo remanet 9. Q − 1 N. − 9. æquandus quadrato. Rurſus ducto tertio in ſecundum, & inde ablato primo remanet 9 Q. + 80 N. æquandus quoque quadrato. Horum interuallum eſt 81 N. + 9. Quare ſunt inueniendi duo numeri, quorum mutuo ductu id fiat cum cautione ſuprà explicata. Itaque cùm quadratorum numerus ſit 9. Q. cuius latus 3 N. cuius duplum 6 N. Oportet in primo quæſitorum ſtatui 6. N. Quamobrem vt ex ſecundo in primum fiam 81 N. neceſſe eſt ſecundum eſt 13 $\frac{1}{2}$. Rurſus autem vt fiat alia pars interualli, puta 9. euidens eſt primum debere eſſe 6 N. + $\frac{2}{3}$. ſecundum 13 $\frac{1}{2}$. Reliquam operationem abſolue, ſi vacat.

Cæterùm moneo totam ſolutionum diuerſitatem, oriri ex illo quadrato qui ponitur in ſecundo numero. Nam eodem ibidem poſito quadrato, licet primus ponatur 2 N. vel 3 N. vel 4 N. &c. eadem tamen ſemper continget ſolutio. Quod vno aut altero exemplo fiet manifeſtum. Ponatur primus 2 N. ſecundus 2 N. + 4. tertius 8 N. productus ex ſecundo in tertium abiecto primo fit 16 Q. + 30 N. æquandus quadrato. Et rurſus productus ex primo in tertium adiecto ſecundo fit 16 Q. − 2 N. − 4. æquandus etiam quadrato. Horum interuallum eſt 32 N. + 4. qui fit ex 8 N. + 1 in 4. hi enim ſoli apti ſunt propoſito ob cauſas ſuprà traditas. Horum ſummæ ſemiſſis quadratus eſt 16 Q. + 20 N. + $\frac{25}{4}$ æqualis 16 Q. + 30 N. & fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5. iidem quos inuenerat Diophantus. Rurſus pone primum 3 N. ſecundum 3. N. + 4. Tertium 12 N. fient tandem æquandi quadrato 36 Q. + 45 N & 36. Q. − 3 N. − 4. quorum interuallum 48. N. + 4. quod fit ex 12 N. + 1 in 4. horum ſummæ ſemiſſis quadratus eſt 36 Q. + 30 N. + $\frac{25}{4}$ qui æquatur 36 Q. + 45 N. & fit 1 N. $\frac{5}{12}$ ſuntque quæſiti numeri, vt prius $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5.

Denique animaduerſione dignum eſt, qualiſcunque numerus Numerorum ſtatuatur pro primo. Dum idem ſtatuatur pro ſecundo + aliquot vnitatibus quadratis, & tertius ponatur productus ex primo in vnitates ſecundi, ſemper contingere in numeris quadrato æquandis, numerum quadratorum eſſe quadratum, vt in Diophanti exemplo 4 Q. in proximè allatis 16 Q & 36 Q. quod ex neceſſitate fieri, ſic demonſtrabitur. Eſto A numerus Numerorum primi. Et A + B vnitatibus quadratis eſto ſecundus. Et tertius eſto D. productus ex A in B. Itaque vt patet ex operationis proceſſu, ex D in A fiet quadratorum numerus qui reperitur in numeris quadrato æquandis, ſit is E. Hunc dico eſſe quadratum. Nam ſumptis tribus numeris A. B. A. idem E fiet ſiue A ducatur in B. & productus D in A. ſiue A ducatur in A. & quadratus ipſius A in B. Quare cùm & B ſit quadratus, patet E productum ex quadrato in quadratum, & ipſum eſſe quadratum. Quod erat demonſtrandum. Sed de his ſatis. 3. 1. poriſm.

A 3 N.
A 3 N. + B 4.
D 12 N. E 36 Q.

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν ἀπὸ λοιποῦ τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ςˣ α̅. ὁ δὲ δεύτερος ςˢ δ̅ μº δ̅. ὁ δὲ τρίτος μονάδος α̅. ἵνα ᾖ λελυμένα δύο τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖ δυ ι̅ϛ̅ ςˢ λ̅γ̅ μº ι̅ϛ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςˢ δ̅ ⋔ μº ε̅. τουτέστι δυ ι̅ϛ̅ μº κ̅ε̅ λείψει ςˢ μ̅. καὶ γίνεται ὁ ςˣ θ ια. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος θ̅. ὁ δὲ δεύτερος τ̅κ̅η̅. ὁ δὲ τρίτος ο̅γ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adſumpto reliqui quadrato, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſecundus 4 N. + 4. tertius autem 1. vt duabus propoſiti partibus ſatisfiat. Supereſt vt productus ex tertio in primum adſumens quadratum ſecundi faciat quadratum. Sed productus ex tertio in primum adſumens ſecundi quadratum facit 16 Q. + 33 N. + 16. Hæc igitur æquanda quadrato, nempe à latere 4 N. − 5. qui eſt 16 Q. + 25 − 40. N. & fit 1 N. $\frac{9}{11}$. Erit igitur primus 9. ſecundus 328. tertius 73. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XVI.

FALLITVR hic etiam Xilander exiſtimans poſitiones pro arbitrio variari poſſe, nulla adhibita cautione, hoc enim manifeſtæ falſitatis arguitur ipſo exemplo quo ſuam nititur comprobare ſententiam, ait enim licuiſſe ponere primum 1 N. ſecundum 1 N. + 2. tertium 1. Quod nequaquam verum eſt, nam productus quidem ex primo in ſecundum adſcito quadrato tertij, facit quadratum, 1 Q. + 2 N. + 1. At productus ex ſecundo in tertium adſcito quadrato primi facit 1 Q. + 1 N + 2, qui quadratus non eſt, cùm tamen per ipſas poſitiones duabus propoſiti partibus ſatisfieri velit Diophantus. Itaque tali artificio ipſas poſitiones inſtituemus. Statuatur pro ſecundo quilibet numerus Numerorum + quotlibet vnitatibus. Et ponatur primus quadrans Numerorum, tertius quadrans vnitatum ſecundi. Sic Diophantus poſito ſecundo 4 N. + 4. poſuit primum 1 N. ſecundum 1. Quod ſi ponas ſecundum 4 N. + 8. erit primus 1 N. tertius 2. Et ſi ponas ſecundum 8 N. + 12. Erit primus 2 N. Tertius 3. & ſic de alijs. Hoc autem ne quis abſque fundamento dictum putet, ſic demonſtratur.

	E 4 N.	F 6.	
C 2 N.	A 8 N. +	B 12.	D 3.
G 16 Q. +	H 24 N. +	K 9.	
L 4 Q. +	M 24 N. +	P 36.	

Sit ſecundus certus Numerorum numerus A + vnitatibus B. & ſit C primus, quadrans ipſius A. ſitque D. tertius quadrans ipſius B. & quia C A ſunt plani ſimiles, ſit medius eorum proportionalis E duplus ſcilicet ad C. ſub duplus ad A. Similitérque ſit F medius proportionalis inter B D, duplus ſcilicet ad D, ſub duplus ad B. Tum ducatur C in A + B. & fiat G + H certus ſcilicet quadratorum numerus + certo numero
4. ſecundi. Numerorum, hiſque adiiciatur K quadratus ipſius D. Dico totum G H K eſſe quadratum. ' Quod vt probetur, oportet oſtendere ipſos G K eſſe quadratos, & ex eorum lateribus bis inuicem ductis
1. noni. produci H. Et quidem ipſe K quadratus eſt ipſius D. ex conſtructione. ' At G. cùm fiat ex mutuo ductu planorum ſimilium C A. quadratus eſt medij proportionalis E. Reſtat ergo probandum ipſum
16 ſeptimi. H. produci ex E in D bis. Itaque quoniam eſt A ad C, vt B ad D. ' qui ſub extremis A D continetur, æqualis ei qui ſub mediis C B. At ex C in B fit H. per conſtructionem. Igitur ex A in D fit idem H. Quarè cùm A ſit duplus ipſius E. fiet idem H ex E in D bis. Quod erat probandum. Similiter ſi D ducatur in A + B. vnde fiat M + P. certus ſcilicet numerus Numerorum + certis vnitatibus; hiſque adiiciatur L quadratus ipſius C dico totum L M. P quadratum eſſe. Quod iiſdem probatur argumentis. Nam L. ex conſtructione quadratus eſt ipſius C. At P. qui fit ex mutuo ductu planorum ſimilium B D. quadratus eſt medij proportionalis F. Denique vt oſtenſum eſt M, qui producitur ex A in D, producetur etiam ex C in B. hoc eſt ex C in F bis. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

Ex dictis patet duplici de cauſa diuerſas contingere poſſe ſolutiones. Primò prout diuerſimodè inſtituentur poſitiones cum tradita cautione. Secundò prout producti ex primo in tertium adſumentis quadratum ſecundi latus diuerſimodè fingetur, vt iam ſæpe in ſimili, fieri poſſe docuimus.

Cæterùm huius quæſtionis ope, licebit & ſequentes abſoluere.

QVAESTIO PRIMA.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, quorum bini mutuo ductu quem producunt, is adſcito reliqui quadrato, quadratus fiat.

Eſto datus 10.

Sumantur tres numeri per ſuperiorem quæſtionem inuenti, & ſtatuantur in Numeris. Erunt ergo quæſiti 9 N. 73 N. 328 N. & productus ex binorum multiplicatione adſcito reliqui quadrato, quadratum facit. Reſtat vt eorum ſumma ſit 10. Quamobrem 410 N. æquantur 10. & fit 1 N. $\frac{1}{41}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{9}{41}$ $\frac{73}{41}$ $\frac{328}{41}$ ſeu 8.

QVÆSTIO SECVNDA.

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum multiplicatione adſcito reliqui quadrato quadratos faciant, & quadratorum latera datum conſtituant numerum.

Datus eſto 25. Statuantur rurſus pro quæſitis, numeri per decimam ſextam inuenti, nimirum 9 N. 73 N. 328 N. ſic enim producti ex binorum multiplicatione adſcito reliqui quadrato, quadratos faciunt 108241 Q. 24025. Q. 8281 Q. quorum latera 329 N. 155 N. 91 N. Reſtat vt horum laterum ſumma æquetur 25. Quare 575 N. æquantur 25. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{9}{23}$ $\frac{73}{23}$ $\frac{328}{23}$.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adſumpta, eorumdem ſumma quadratum faciat. Enim vero productus multiplicatione duorum quorumlibet quadratorum proximorum, adſcita ipſorum ſumma quadratum facit. Ponatur itaque primus 4. ſecundus 9. vt productus eorum multiplicatione quadratus, nempe 36. adſcita vtriuſque ſumma faciat quadratum. Reſtat vt & productus ex ſecundo in tertium, adſcito vtroque: itemque productus ex tertio in primum vtroque adſumpto faciat quadratum. Statuatur tertius 1 N. ſitque productus ex ſecundo in tertium, vtroque adſumpto 10 N + 9. æquandus quadrato. At productus ex tertio in primum adſumentis vtrumque fit 5. N. + 4. æqualis quadrato. Hic quoque rurſus duplicata æquatio occurrit; eſtque interuallum 5 N. + 5. Quæro igitur duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 5 N. + 5. & ſunt, hic quidem 1 N. + 1. ille verò 5. Atque vt in ſecundo libro docuimus, vel ſummæ horum ſemiſſis quadratus æquatur maiori: vel interualli ſemiſſis quadratus æquatur minori. Et fit 1 N. 28. Erit igitur primus 4. ſecundus 9. tertius 28. & ſatisfaciunt poſtulatis.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. παντὸς δὲ δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τοίνυν ὁ μὲν πρῶτος μο δ. ὁ δὲ δεύτερος μο θ ἵνα ὁ ὑπ' αὐτῶν γινόμενος τετράγωνος. μο λϛ. προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα συναμφότερον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ςο α. καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ςς ι μο θ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔτι ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ςς ε μο δ ἴσος τετραγώνῳ καὶ γίνεται πάλιν καὶ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ ςς ε μο ε. ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ δεῖ ςς ε. μο ε καὶ εἰσὶν ὃς μὲν ςο α μο α. ὃς δὲ μο ε. καὶ ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ, ἢ τῆς συνθέσεως αὐτῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι, ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κη. καὶ ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος μο δ. ὁ δὲ δεύτερος μο θ. ὁ δὲ τρίτος μονάδες κη. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

DEMONSTRANDVM eſt Poriſma quod aſſumit Diophantus, nimirum.

Productus ex multiplicatione duorum quadratorum, quorum latera vnitate diſtant, adſcita ipſorum quadratorum ſumma, quadratum facit.

Sunto quadrati A. B. quorum latera C. D. vnitate diſtent. Et productus ex A in B. eſto G. cui addendo ſummam ipſorum A B. fiat H. Dico H eſſe quadratum. [1] Quia enim inter quadratos A B. cadit medius proportionalis productus ex C in D. [2] patet G eſſe quadratum producti ex C in D. At verò ſumma quadratorum A B [3] æquatur duplo producti ex C in D. & quadrato interualli ipſorum C D, hoc eſt vnitati. Igitur eadem ſumma quadratorum æquatur duplo lateris quadrati G vnitate aucto. Quamobrem cum addendo quadrato G duplum ſui lateris vnitate auctum fiat H, [4] patet H eſſe quadratum, cuius latus vnitate ſuperat latus ipſius G. Quod erat demonſtrandum.

11. Octaui. 20. ſeptimi. 4.2. poriſm. 18. 1 poriſm.

C 2. D 3.
A 4. B 9.
G 36. H 49.

Quod autem attinet ad poſitiones primi & ſecundi numeri quos Diophantus vult eſſe quadratos continenter proximos, puta 4 & 9. allucinatur etiam Xilander cùm putat alios quoſlibet numeros potuiſſe poni per trigeſimam primam ſecundi inuentos. Nam ſi huiuſmodi ponantur qui non ſint quadrati, hi quidem vni parti propoſiti ſatisfacient, ſed duplicata æqualitas ad quam per hanc operationem deuenitur, inexplicabilis erit. Etenim vt patet, numeri pro primo & ſecundo poſiti, ſunt iidem cum vnitatibus quæ reperiuntur tandem in numeris quadrato æquandis, vt in hypotheſi Diophanti, cùm primum & ſecundum poſuiſſet 4. & 9. Inuenit quadrato æquandos 10 N. + 9. & 5. N. + 4. Quare cùm hîc Numerorum numeri ſint inæquales, nec habeant rationem quadrati ad quadratum, neceſſe eſt vnitates adiunctas quadratas eſſe, alioquin reſolui non poſſet æquatio. Cùm enim horum interuallum ſit 5 N. + 5. tales deligendi ſunt numeri, quorum mutuo ductu id fiat vt in quadrato ſemiſſis ſummæ illorum reperiantur vnitates 9. & in quadrato ſemiſſis interualli reperiantur vnitates 4. Vt ſcilicet vnitatibus in æquatione ſe mutuò abolentibus vna ſpecies vni æqualis remaneat, puta quadrati Numeris. Hoc autem fieri nequit, niſi in ſemiſſe ſummæ ſint vnitates 3. latus in ipſius 9. & niſi in ſemiſſe interualli ſint vnitates 2. latus ipſius 4. Proinde niſi 9. & 4. quadrati ſint, rem perfici non poſſe eſt manifeſtum. Hinc facile eſt videre cur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. ſumpſerit Diophantus numeros 1 N. + 1 & 5. Nam vt ex dictis conſtat tales ſumendi ſunt vt ſumma vnitatum in ipſis contentarum ſit 6. interuallum verò earundem 4. Quare per Canonem primæ primi reperientur vnitates ponendæ in illis numeris eſſe 1. & 5. Atqui poſito altero multiplicatorum 5. euidens eſt alium eſſe non poſſe niſi 1 N. + 1. vt eorum mutuò ductu fiant 5 N. + 5. Poſſet quidem alter poni 1. alter verò 5 N. + 5. Sed horum ſummæ & interualli ſemiſſis quadrati ſecundum omnes ſuas partes maiores ſunt propoſiti ad æquandum quadrato numeris, vnde inuenitur valor Numeri minor nihilo. Quare reſtat ſolos 5. & 1 N. + 1, quæſtioni ſoluendæ idoneos reperiri. Attamen oſtendemus ad quadrageſimam quintam quarti hanc æquationem etiam infinitis modis reſolui poſſe per modum vtendi duplicata æqualitate à nobis inuentum, quem ibi explicabimus. Quod ad Hypoſtaſim tertij numeri ſpectat, is non ſolùm poni poteſt 1 N. ſed etiam quilibet Numerorum numerus. Sed ſi iidem ponantur primus & ſecundus eadem ſemper continget ſolutio vt experiendo deprehendes. Quamobrem omnis ſolutionis varietas pendet ex primi & ſecundi poſitione, quæ infinitis modis fieri poteſt. Cùm ſumi poſſint alij atque alij quadrati continenter proximi.

OBSERVATIO D. P. F.

Extat huius quæſtionis Diophanti problema in libro quinto quæſtione quinta, Num vero problema ſequens ipſe Diophantus ſciens prætermiſit, an potius in aliquo tredecim librorum conſtructum erat, neſcimus.

Inuenire 3. quadratos vt productus ex binorum multiplicatione adſumptâ eorundem ſumma quadratum faciat. Huius tamen quæſtionis infinitas ſolutiones dare poſſumus.

En verbi gratia ſequentem ſolutionem; ſatisfaciunt nempe problemati tres quadrati ſequentes.

[illegible] 1. quadratus.
[illegible] 2. quadratus.
4. 3. quadratus.

Imo & vlterius progredi & Diophantaam quæſtionem promouere nihil vetat. Sequens enim problema generaliter & infinitis modis conſtruximus.

Inuenire 4 numeros ſub quibus binis quod fit planum adſcitâ amborum ſummâ faciat quadratum.

Inueniantur per 5. propoſitionem lib. 5. tres quadrati vt quem bini faciunt planum adſciſcens amborum ſummam faciat quadratum & ſunto illi numeri quadrati 3

$\frac{25}{9}$ $\frac{64}{9}$ $\frac{196}{9}$

Sunt ergo tres iſti quadrati, tres primi numeri noſtræ quæſtionis, ponatur quartus 1 N. fient tria producta vna cum ſummis æqualia.

$\frac{46}{9}$ N + $\frac{55}{9}$	primum.	*Hæc igitur tria æquanda quadrato, & oritur triplicata*
$\frac{23}{9}$ N + $\frac{64}{9}$	ſecundum.	*æqualitas cuius explicationem dedimus ad quæſtionem 24.*
$\frac{385}{9}$ N + $\frac{906}{9}$	tertium.	*libri ſexti.*

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adſumens vtriuſque ſummam faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſecundus verò 3. & eſt productus eorum multiplicatione addito vtroque 4 N. + 3. æquandus quadrato. Eſto quadrato 25. & fit 1 N. 5 $\frac{1}{2}$. ergo primus 5 $\frac{1}{2}$ erit, ſecundus 3. & vni poſtulatorum eſt ſatisfactum. Nam productus eorum multiplicatione adſumens vtrumque facit quadratum 25. Oportet igitur vt & productus ex ſecundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum adſcito vtroque faciat quadratum. Ponatur tertius 1 N. & fit productus ex ſecundo in tertium vtroque adſcito rurſus 4 N. + 3. At productus ex tertio in primum addito vtroque fit 6 $\frac{1}{2}$ N. + 5 $\frac{1}{2}$. Horum vterque quadrato æquatur. Sed quia alterius & numerorum & vnitatum multitudo, iis quiſunt in altero eſt maior, neque eorum inter ſe ratio eſt quæ quadrati ad quadratum, inutilis eſt huiuſmodi poſitio. Eò itaque deuentum eſt vt quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione vtroque adſcito faciat quadratum, & præterea ipſorum vnitate auctorum ratio ſit quæ quadrati ad quadratum. Quandoquidem ſi numerus numeri quadruplum ternario excedat, ipſi vnitate aucti rationem habent ad inuicem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Pono primum 1 N. ſecundum verò 4 N. + 3. Reſtat vt productus eorum multiplicatione vtroque addito faciat quadratum. Sed productus eorum multiplicatione vtroque addito eſt 4 Q. + 8 N. + 3. hic ergo æquatur quadrato. Formo quadratum abs 2 N − 3. & fit quadratus 4 Q. + 9. − 12 N. & fit 1 N. $\frac{6}{20}$ ſeu $\frac{3}{10}$. erit igitur primus $\frac{3}{10}$. ſecundus $\frac{42}{10}$ ſeu 4 $\frac{1}{5}$. Ita poſtulatorum vni eſt ſatisfactum. Supereſt vt productus ex ſecundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum addito vtroque

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ςº α. ὁ δὲ δεύτερος μº γ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ςς δ μº γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω μονάσι κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μº ε καὶ ἡμίσεως. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μº ε καὶ ἡμίσεως. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων γ. καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων, ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖ τὸν κε τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφοτέρους ποιεῖν τετραγώνους. τετάχθω ὁ τρίτος ςº α. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους πάλιν ςς δ μº γ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ςς ϛ καὶ ἡμίσεως μονάδων ε καὶ ἡμίσεως, ἴσος ἑκάτερος τετραγώνῳ. καὶ διὰ τὸ πλεονάζειν ἐν τῷ ἑτέρῳ τὸ πλῆθος τῶν ςς καὶ τῶν μονάδων. καὶ μηδὲ λόγον αὐτοὺς ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. χωλάζει ἡ γενομένη ὑπόστασις. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔτι αἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων, καὶ μονάσιν γ μείζων, οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ςº α. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ μº γ. δεῖ λοιπὸν τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶ δº δ ςς η μº γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς β ⋔ μº γ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δº δ μº θ ⋔ ςς ιβ. καὶ γίνεται ὁ ςº ϛ $^{\kappa}$. τουτέστι γ $^{\iota}$. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ $^{\iota}$ ὁ δὲ δεύτερος μβ $^{\iota}$. τουτέστι δ. α $^{\epsilon}$ καὶ μένει ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν τετράγωνον. τάσσω τὸν τρίτον ςº α. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος μº δ. α $^{\epsilon}$. γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ςς ε. α $^{\epsilon}$. μº

δ α ε^ι μ° δ α ε^ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ° κε. πάλιν ἐπεὶ ὁ μὲν τρίτος ἐστὶ ς^ο α. ὁ δὲ πρῶτος γ ι^ι. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ς^οι ιγ ι^ι μ° γ ι^ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ° ρ̄ ποιῶ τὰς ς^οὺς ε. α ε^ι. μ° δ. α ε^ι ἐπὶ τὸν κε. γίνονται ς^οὶ ρλ μ° ρε ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ὁμοίως τὰ τῶν ς^ο ιγ ι^ι. μονάδας γ ι^ι. ἐπὶ τὸν ρ̄ γίνονται ς^οὶ ρλ μονάδες λ̄. ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μονάδες οε. καὶ ἔστι διπλῆ πάλιν ἰσότης, καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ζ ι^ι. ἔσται ὁ μὲν τρίτος ζ ι^ι. ἦν δὲ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γ ι^ι. ὁ δὲ δεύτερος μβ ι^ι. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

faciat quadratum. Pono tertium 1 N. Eſt autem ſecundus $4\frac{1}{5}$. fit productus eorum multiplicatione addito vtroque $5\frac{1}{5}$ N + $4\frac{1}{5}$ æquandus quadrato. Eſto quadrato 25. Rurſus quia tertius eſt 1 N. primus autem $\frac{3}{10}$. erit productus eorum multiplicatione adſumpto vtroque $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. æquandus quadrato, puta 100. Duco $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ in 25. fiunt 130 N. + 105. æquanda quadrato. Similiter duco $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ in 100 fiunt 130 N. + 30. æquanda rurſus quadrato. Et eſt eorum interuallum 75. & duplicata rurſus occurrit æquatio, & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. erit igitur tertius $\frac{7}{10}$. erat autem primus $\frac{3}{10}$ ſecundus $\frac{42}{10}$ & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XVIII.

SVBTILE eſt hoc problema, & elegans modus vtendi duplicata æqualitate in eo continetur, quem cùm non perceperit Xilander, mirum non eſt ſi parum feliciter eum explicauit. Quamuis corruptos ſolutionis numeros benè reſtituerit. Nos ergo triplicem Diophanti poſitionem percurrentes notatu digna quæque percenſeamus, & obſcura dilucidemus.

Prima poſitione quæruntur duo numeri, vt productus illorum multiplicatione adſcita ſumma eorundem, quadratum faciat, & reperiuntur $5\frac{1}{3}$ & 3. Quamobrem hos ſtatuendo pro primo & ſecundo, ponitur tertius 1 N. quem ducendo ſigillatim in priores duos, & productis addendo ſummam eorum ex quibus producuntur, fiunt quadrato ſimul æquandi 4 N. + 3 & $6\frac{1}{3}$ N + $5\frac{1}{3}$. Hæc autem æquatio inexplicabilis eſt, quia cùm numeri quadrato æquandi componuntur ex Numeris & vnitatibus, oportet vel numeros Numerorum æquales eſſe, vt contigit propoſitione decima quarta huius, vbi æquatur quadratis 10 N. + 54. & 10. N. + 6. vel numero Numerorum in æquali exiſtente, oportet vnitates eſſe quadratas, vt in præcedente quæſtione, vbi æquantur quadratis 10 N. + 9 & 5 N. + 4. vel denique (quod hucuſque non accidit) cùm vnitates quadratæ non ſunt, nec numeri Numerorum æquales, oportet ſaltem numeros Numerorum inter ſe rationem habere quadrati quam trademus infrà. Hoc igitur vt conſequamur. Videndum eſt vnde prouenerint Numerorum ad quadratum, ob cauſam numeri 4 N. & $6\frac{1}{3}$ N. At prouenerunt ex ipſis initio inuentis numeris 3. & $5\frac{1}{3}$ vnitate auctis, cùm ducendo ſigillatim in ipſos 1 N. & productis addendo 1 N. fiant 4 N. & $6\frac{1}{3}$ N. Corrigenda ergo eſt prima poſitio, & loco ipſorum 3. & $5\frac{1}{3}$ alij duo numeri ſunt inueniendi, quorum productus adſcita eorundem ſumma quadratum faciat, ita vt ipſi numeri vnitate aucti rationem inter ſe habeant quadrati ad quadratum. Id fiet per ſecundam poſitionem.

Secunda itaque poſitione vt inueniantur huiuſmodi numeri, & alterum poſtulatorum per ipſas poſitiones conſequamur, tali vtendum lemmate.

Si fuerint duo numeri quorum maior minoris quadruplum ternario excedat, ipſi numeri vnitate aucti erunt plani ſimiles.

Cuius lemmatis demonſtratio facilis eſt. Sit enim maior A E minor C D. & à maiore auferendo ternarium B E ſuperſit A B quadruplus ad C D. Dico ſi vtrimque addatur vnitas E F. D G. totos A F. C G. eſſe planos ſimiles. Cùm enim B F quaternarius ſit quadruplus vnitatis D G. Eſt vt A B ad C D, ita B F ad D G.

A .... B . .. E. F
C .. D. G

12. ſeptimi. Quare & totus A F ad totum C G eſt in eadem ratione quadrupla; quod erat propoſitum. Ponitur ergo primus 1 N. ſecundus 4 N. + 3 vnde reſtat vt productus eorum multiplicatione adſcita eorum ſumma quadratum faciat, & peracta æquatione fit 1 N. $\frac{3}{10}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{3}{10}$ & $4\frac{1}{5}$. quibus vtentes tertiam inſtituemus poſitionem.

Tertia igitur poſitione quæſitorum ab initio numerorum ponitur primus $\frac{3}{10}$. Secundus $4\frac{1}{5}$. Tertius 1 N. vnde tandem proueniunt quadrato æquandi $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. Vbi quia Numerorum numeri ſunt plani ſimiles, ſic explicabitur æquatio, ſumantur duo quadrati in eadem ratione illorum numerorum, puta 100. & 25. ductoque minore in maiorem, & maiore in minorem fient iam quadrato æquandi 130 N. + 105. & 130 N. + 30. vbi numeri Numerorum ſunt æquales,
19 ſeptimi. quia datis quatuor numeris proportionalibus, ex primo in quartum idem procreatur numerus, qui

fit

fit ex ſecundo in tertium. Nec per huiuſmodi multiplicationem immutatur æqualitatis ratio, quia quadrato per quemlibet quadratum ſiue multiplicato, ſiue diuiſo, ſemper fit quadratus, vnde patet ſi 130. N. + 105. æquetur quadrato, & illius $\frac{1}{25}$ puta $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ fore quadratum. Et ſi 130. N. + 30. ponatur æquari quadrato, & eius centeſimam partem, puta $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ fore quadrato æqualem. Sumpſit autem Diophantus quadratos 25. & 100. potius quàm alios quoſcunque in eadem ratione, vt vitaret fractiones, alioquin expeditius res ageretur ducendo denominatorem rationis, puta 4. in minorem numerum $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ vnde fierent quadrato æquandi $5\frac{1}{5}$ N + $4\frac{1}{5}$ & $5\frac{1}{5}$ N. + $1\frac{1}{5}$. Itaque ſubtili artificio res deducta eſt ad primum modum duplicatæ æqualitatis, quo vſus eſt Diophantus tum duodecima, & decima quarta ſecundi, tum decima quarta huius. Etenim ipſorum 130 N. + 105. & 130 N. + 30. Interuallum eſt 75. qui fit, ſi libet, ex 3. in 25. quorum ſummæ ſemiſſis quadratus 196. æquatur maiori 130 N. + 105. & fit N. $\frac{7}{10}$.

Cæterùm varietas in operatione & in ſolutione à multis oritur capitibus.

Primò enim inueniri poſſunt infiniti duo numeri, quorum productus adſcita eorum ſumma quadratum faciat, quique vnitate aucti fiant plani ſimiles. Tum quia, vt benè monet Xilander, quod de quadruplis aſſerit Diophantus, poteſt congruenter applicari omnibus aliis numeris ſeruantibus rationem quadrati ad quadratum; ſimiliter enim ſi numerus numeri noncuplum ſuperet octonario, addita vtrimque vnitate, fient plani ſimiles; & ſi numerus numeri ſedecuplum excedat numero 15 adſcita vterque vnitate, fient etiam plani ſimiles, & ſic de aliis. Tum quia numeri quadrato æquandi, qualis eſt in hypotheſi Diophanti 4 Q. + 8 N. + 3. latus diuerſimodè fingi poteſt, vt patet. Secundò ruſus in ſecunda eadem poſitione alia varietas conſiderari poteſt. Primus enim non ſolùm poteſt poni 1 N. ſed & quilibet Numerorum numerus lemmate tamen tradito vtendo congruenter in poſitione ſecundi. Vt ſi ponatur primus 2. N. erit ſecundus 8 N. + 3. vel 32 N. + 15. &c. ſi ponatur primus 3 N. erit ſecundus 12 N. + 3. vel 27 N. + 8 &c.

Tertiò in tertia poſitione iiſdem manentibus primò & ſecundò poteſt etiam tertius infinities variari, & poni non ſolùm 1 N. ſed & quilibet Numerorum numerus, ſed ad hoc intelligemus ampliari lemma traditum hoc pacto.

Si fuerint duo numeri, quorum maior quadruplum minoris ternario ſuperet, & vterque ducatur in tertium numerum, productiſque addatur idem tertius, fient duo plani ſimiles.

Quod ita demonſtrabitur.

A . . . . B . . . C
D . . E F 5
G 55. H 10
K 60 L. 15.

Sit A C ſuperans ternario B C ipſum A B quadruplum ipſius D E. & tertius quilibet numerus F ductus in ipſos A C. D E. faciat G H. quibus addendo ſigillatim ipſum F fiant K L. dico ipſos K L eſſe in ratione quadrupla, atque adeò planos ſimiles. Etenim quia G. qui fit ex F. in A C. [1] æquatur productis ex F. in A B. & B C. At productus ex F. in A B. quadruplus eſt producti ex F. in D E ſeu ipſius H. (cùm A B. D E. ſint in quadrupla ratione) productus autem ex F. in ternarium B C. triplus eſt ipſius F. patet G. continere quadruplum ipſius H. & triplum ipſius F. quare ſi eidem G. addatur F. ſumma K. quadrupla eſt ipſorum H F. ſeu ipſius L. Quod demonſtrandum erat. Non aliter idem oſtendetur de alia qualibet ratione quadrati ad quadratum. Vt ſi A C. ponatur excedere noncuplum vel ſedecuplum ipſius D E. ternario, concludetur & K ipſius L eſſe noncuplum vel ſedecuplum, & ſic de alijs. Quare manifeſtum eſt iiſdem manentibus primò & ſecundò puta $\frac{1}{10}$ & $4\frac{1}{5}$. Tertium poni poſſe 1 N. vel 2 N. vel 3 N. &c.

[1] 1. ſecundi.

*Denique ipſa duplicata æqualitas infinitis modis reſolui poteſt, prout ſumentur alij atque alij numeri, quorum mutuo ductu fiat 75. dummodo horum ſummæ & interualli ſemiſſis quadrati maiores ſint ipſis 105. & 30. vt docuimus ad duodecimam ſecundi.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE tres numeros, ita vt binorum multiplicatione productus dempta amborum ſumma ſit quadratus. Vt in præcedenti ponatur primus 1 N. ſecundus vnitatum quotuis, & eodem modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem Numerorum ad multitudinem Numerorum habeamus ſub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res vt quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu qui fit dempta ambo-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον, ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου. τετάχθω ὁ πρῶτος ςˢ α. ὁ δὲ δεύτερος μο ὅσων δή ποτε, καὶ ἐλευσόμεθα εἰς ἄπορον. ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀπῆκται εἰς τὸ ζητεῖν δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν τοῦ συναμφοτέρου ποιῇ τετραγώνους. καὶ ἔτι οἱ μονάδες ἐλάσσονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετρά-

γώνος πρὸς τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἀριθμοῦ τετραπλασίων ᾖ παρὰ μονάδας τρεῖς, οἱ μονάδι αὐτῶν ἐλάσσονες πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπειδήπερ καὶ τῆς μ° α. ἀφ' ἑκατέρου ἀφαιρουμένης γίνεται ἐλάττωσις μ° δ καὶ α. καὶ δῆλον ὅτι ἀπὸ τετραπλασίων, λόγου τετραπλασίονος ἀφαιρουμένου, καὶ ὁ καταλειπόμενος ἔσται τετραπλασίων, τουτέστιν ὡς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ς° α. μ° α. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ μ° α. καὶ μένει ὁ ὑπ' αὐτῶν τῶν συναμφοτέρων Δ^Υ δ λείψει μ° α ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β λείψει μ° β. τουτέστι Δ^Υ δ μ° δ ⋔ ςς η. καὶ γίνεται ὁ ς° ε η^ων. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιγ η^ων. ὁ δὲ δεύτερος κη η^ων. καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν πρῶτος ἐστι ιγ η^ων. ὁ δὲ δεύτερος γ καὶ ἥμισυ. τάσσω τὸν τρίτον ς° α. καὶ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου συναγόμενος ςς γ α∠. μένει ςς λείψας τὸν συναμφότερον ς α μ° γ α∠ μ° γ α∠. μένει ςς β. α∠ λείψει μ° γ. α∠. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω μονάσι δ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου γίνεται ςς ιγ η^ων. λείψας συναμφότερον γίνεται ςς ε η^ων λείψει μονάδων ιγ η^ων. ἴσος τετραγώνῳ, ἔστω ις. ταῦτα ἑκκαιδεκάκις γίνονται ςς^οι ι λείψει μονάδων κς. ἴσοι τετραγώνῳ καὶ ὁμοίως οἱ ςς^οι β. α∠ λείψει μ° γ α∠ τετράκις, γίνονται ςς^οι ι λείψει μ° ιδ ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μ° ιβ. οὖσα τὸ ὑπὸ μ° β καὶ μ° ς συναμφοτέρων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ° ις ἴσον τῷ μείζονι. τουτέστι ςς^οις ι λείψει μ° ιδ. καὶ γίνεται ς° μ° γ. ἔσται ὁ μὲν τρίτος μ° γ. τουτέστι κδ η^ων. ἔχομεν δὲ τὸν μὲν πρῶτον μ° ιγ η^ων. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων γ. α∠, τουτέστι κη η^ων. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

rum ſumma ſit quadratus, & prætereà ipſi vnitate multati rationem habeant quam quadratus ad quadratum. Enim vero ſi numerus alterum quater, dempto ternario continet, ij vnitate multati rationem habent inter ſe quam quadratus ad quadratum; quia ſcilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis; & patet ſi à quadruplis quadrupla, auferantur, reſidua eſſe quadrupla, atque ideo in ratione quadrati ad quadratum. Pono igitur primum 1 N. + 1. ſecundum 4 N. + 1. & fit productus eorum multiplicatione, dempto vtroque 4 Q. − 1 æqualis quadrato à latere 2 N. − 2. hoc eſt 4 Q. + 4. − 8 N. & fit 1. N. $\frac{5}{8}$. erit ergo primus $\frac{13}{8}$ ſecundus $\frac{28}{8}$. & ſatisfit vni poſtulatorum. Et quoniam primus eſt $\frac{13}{8}$ ſecundus $3\frac{1}{2}$. pono tertium 1 N. & fit ſecundo in tertium $3\frac{1}{2}$ N. & vtroque detracto, puta 1 N. + $3\frac{1}{2}$ reſtat $2.\frac{1}{2}$ N. − $3\frac{1}{2}$ æquandus quadrato. Eſto quadrato 4. Qui autem fit ex tertio in primum eſt $\frac{13}{8}$ N. & vtroque dempto reſtat $\frac{5}{8}$ N. − $\frac{13}{8}$ æquandus quadrato. Eſto ipſi 16. & per hunc iſtud multiplicetur fit 10 N. − 26, æquandus quadrato. Similiter $2\frac{1}{2}$ N. − $3.\frac{1}{2}$ ducantur in 4. fit 10 N. − 14. æqualis quadrato. Horum interuallum 12. quod fit mutuo ductu ipſorum 2. & 6. quorum ſummæ ſemiſſis in ſe facit 16. æqualem maiori, puta 10 N. − 14. & fit 1 N. 3. Ergo tertius eſt 3. ſeu $\frac{24}{8}$. habebamus autem primum $\frac{13}{8}$. ſecundum $3\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{28}{8}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XIX.

OMNIA quæ ad præcedentem adnotata ſunt, hîc etiam locum habent. Modus vtendi duplicata æqualitate idem eſt, & lemma quod aſſumit Diophantus eadem ratione demonſtratur, ipſiuſque demonſtrationis fundamentum attigit Diophantus his verbis. *Quia ſcilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternary, inde vnitatis, & patet ſi à quadruplis quadrupla auferantur, reſidua eſſe quadrupla.*

Operationis quoque & ſolutionis varietas totidem modis contingere poteſt, vt diutiùs pigeat immorari in re manifeſta.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ

INVENIRE duos numerus, vt productus eorum multiplicatione ſiue alterutrum, ſiue ſummam ipſorum adſciſcat,

faciat quadratum. Ponatur alter 1 N. alter 4 N. − 1. Quoniam ſi numerus ſit numeri quadruplus dempta vnitate, productus eorum multiplicatione adſumens minorem facit quadratum. Iam duo poſtulatorum reſtant implenda, vt ſcilicet productus eorum multiplicatione adſcito ſecundo, & vtroque ſimul faciat quadratum. Sed productus adſumens ſecundum fit 4 Q. + 3 N. − 1. æqualis quadrato. Et idem productus vtroque addito fit 4 Q. + 4 N. − 1. æquandus quadrato. Et eſt duplicata æqualitas. Horum interuallum 1 N. quod fit ex $\frac{1}{4}$ in 4 N. & fit 1 N. $\frac{65}{224}$. Erit igitur primus $\frac{65}{224}$. ſecundus $\frac{36}{224}$. & ſoluunt quæſtionem.

μὲν ϛ^ο α̅. ὁ δὲ ϛϛ^οὶ δ̅ ⋔ μ^ο α̅. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὑπ' αὐτῶν περιλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον. ἑξῆς δεῖ καὶ τὰ λοιπὰ δύο ἐπιτάγματα κατασκευάσαι. ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν περιλαβόντα τὸν δεύτερον, καὶ ἔτι συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν περιλαβὼν τὸν δεύτερον γίνεται δ^υ δ̅ ϛϛ^οὶ γ̅ λείψει μ^ο α̅. ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιλαβὼν συναμφότερον γίνεται δ^υ δ̅ ϛϛ^οὶ δ̅ λείψει μ^ο α̅. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, καὶ περιέχεται ὑπὸ μ^ο α̅^δ. καὶ ἀριθμῶν δ̅. καὶ συνάγεται ὁ ϛ^ο ξε̅ ^{σκδ}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ξε̅ ^{σκδ}. ὁ δὲ δεύτερος λϛ̅ ^{σκδ}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

Magna eſt conformitas huius quæſtionis cum vigeſima-ſeptima ſecundi. Vbi quæruntur duo numeri, quorum productus adſcito alterutro quadratum faciat. Sed hîc præterea poſtulatur vt idem productus adſumpta amborum ſumma faciat quadratum. Itaque ſuas poſitiones eodem modo inſtituit Diophantus, & eorundem lemmatum quæ ibi demonſtrauimus hîc vſus eſſe poteſt.

Porro notandus hic modus vtendi duplicata æqualitate, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum conſtat ex ſolis numeris. Tunc enim neceſſe eſt in numeris quadrato æquandis reperiri quadratorum numerum quadratum, vt hîc 4 Q. Numeros autem quorum mutuo ductu fiat interuallum 1 N. accipit Diophantus 4 N. & $\frac{1}{4}$ ob ſimilem cauſam illius quam attulimus ad decimam quintam huius. Oportuit enim talem ſumi numerorum numerum, cuius ſemiſſis quadratum efficeret 4 Q. Quare debuit pro altero ſumi 4 N. vnde ſequitur alterum neceſſario eſſe $\frac{1}{4}$ vt eorum mutuo ductu fiat 1 N.

Cæterùm tota diuerſitas in primis poſitionibus conſiſtit, quas diuerſimodè fieri poſſe conſtat auxilio lemmatum ad vigeſimam ſeptimam ſecundi allatorum.

QVÆSTIO XXI.

Invenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ſiue alterutro ſiue vtriuſque ſumma multatus quadratum faciat. Ponatur alter 1 N. + 1. alter 4 N. Quandoquidem ſi numerus numeri ſit quadruplus, demptis quatuor vnitatibus, productus eorum multiplicatione detracto maiore quadratum facit. Reſtat itaque vt productum multiplicationis ſiue minore, ſiue vtriuſque ſumma multatus, faciat quadratum. Sed productum illud dempto minore fit 4 Q. + 3 N. − 1. Et idem productum dempto vtroque fit 4 Q. − 1 N. − 1. Horum vtrumque quadrato æquale eſt. Interuallum 4 N. Statuo illud mutuo ductu producentes 4 N. & 1. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{4}$. Erit ergo primus 2 $\frac{1}{4}$. ſecundus 5. & manifeſta eſt demonſtratio.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε λήψῃ ἑκάτερον, ἐάν τε συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ϛ^ο α̅ μ^ο α̅. ὁ δὲ ϛϛ^οὶ δ̅. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μ^ο δ̅. ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον λοιπὸν δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν ⋔ τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν ἐλάσσονα γίνεται δ^υ δ̅ ϛϛ^οὶ γ̅ λείψει μ^ο α̅. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον δ^υ δ̅ λείψει ϛ^ο α̅ μ^ο α̅. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ ϛϛ^οὶ δ̅. τάσσω τὸν μὲν ϛϛ^οὶ δ̅. τὸν δὲ μ^ο α̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο μ^ο α̅. α̅^δ. καὶ ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο β̅. α̅^δ. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο ε̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXI.

EADEM aut ſimilia dici poſſunt de hac quæſtione, quæ de ſuperiore dicta ſunt vide quàm ſit conformis vigeſimæ octauæ ſecundi, & quomodo vtrobique eodem vtens lemmate Diohantus, eodem modo ſuas inſtituat poſitiones. Modus vtendi duplicata æqualitate idem eſt, quo vſus eſt in præcedente,& eaſdem ob cauſas ad conficiendum interuallum 4 N. ſumpſit 4 N. & 1.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τεσσάρων τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν δὶς ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. τὸ δ' αὐτό ἐστι τετράγωνόν τινα διελεῖν τετράκις εἰς δύο τετραγώνους. καὶ ἐμάθομεν τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς β τετραγώνους ἀπειραχῶς. νῦν ἤτοι ἐκθώμεθα δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν οἷον γ. δ. ε. ε. ιβ. ιγ. καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ἐκκειμένων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑτέρου, καὶ ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τρίγωνον λθ. νβ. ξε. τὸ δὲ δεύτερον κε. ξ. ξε. καὶ ἔστιν ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἔτι δὲ φυσικῶς ὁ ξε διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους διχῶς εἴς τε τὸν ιϛ, καὶ τὸν μθ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ξδ. καὶ τὴν μονάδα, τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ ξε ἀριθμὸς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ιγ καὶ τοῦ ε. ὧν ἕκαστος διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους. νῦν τῶν ἐκκειμένων τοῦ τε μθ. καὶ τοῦ ιϛ. λαμβάνω τὰς πλευράς, εἰσὶ δὲ ζ καὶ δ. καὶ πλάσσω τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο τοῦ τε ζ καὶ τοῦ δ. καί ἐστι λγ. νϛ. ξε. ὁμοίως καὶ τοῦ ξδ. καὶ τῆς μονάδος αἱ πλευραὶ η καὶ α. καὶ πλάσσω πάλιν ἀπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ ιϛ. ξγ. ξε. καὶ γίνεται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας, ἐλθὼν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τεσσάρων ςς ξε. ἕκαστον δὲ τούτων τῶν τεσσάρων δυνάμεων τοσούτων, ὅσων ἐστὶ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ. τὸν μὲν πρῶτον δυ ͵δνϛ. τὸν δὲ δεύτερον δυ ͵γ. τὸν τρίτον δυ ͵γχϟϛ καὶ ἔτι τὸν τέταρτον δυνάμεις ͵βιϛ. καὶ εἰσὶν αἱ τέσσαρες δυ μγ. α. ͵βψξη. ἴσαι ςς ξε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ°

INVENIRE quatuor numeros vt compoſiti ex omnibus quadratis, ſingulorum tam adiectione quàm detractione faciat quadratum. Quoniam in quolibet triangulo rectangulo quadratus hypotenuſæ ſiue auctus, ſiue multatus duplô eius quod fit è multiplicatione laterum circa rectum, facit quadratum. Quæro primum quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenuſas. Hoc ipſum verò eſt, quadratum aliquem diuidere quater in duos quadratos. Atqui didiſcimus datum quadratum diuidere in duos quadratos infinitis modis. Nunc ergo exponamus duo triangula rectangula in minimis numeris, quales ſunt 3. 4. 5. & 5. 12. 13. & multiplicetur vnumquodque ipſorum per hypotenuſam alterius, & erit primum triangulum 39. 52. 65. ſecundum 25. 60. 65. & ſunt rectangula æquales habentia hypotenuſas. Adhuc autem ſuapte natura numerus 65. diuiditur bis in duos quadratos, nempe in 16. & 49. Et rurſus in 64. & 1. quod ei contingit quia fit ex multiplicatione mutua 5. & 13. quorum vterque in duos diuiditur quadratos. Nunc expoſitorum 49 & 16. ſumo latera, ſunt autem 7. & 4. & formo triangulum rectangulum à duobus numeris 7. & 4. & eſt 33. 56. 65. Similiter ipſorum 64. & 1. latera ſunt 8. & 1. à quibus rurſus formo triangulum rectangulum, cuius latera ſunt 16. 63. 65. & fiunt quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenuſas. Refero me igitur ad propoſitam initio quæſtionem, & pono compoſitum ex quatuor numeris 65 N. Quemlibet verò ipſorum quatuor pono tot quadratorum quot continet vnitates quadruplum areæ. Primum quidem 4056 Q. Secundum autem 3000. Q. Tertium 3696 Q. Quartum denique 2016 Q. & eſt illi

lorum ſumma 12768 Q. æqualis 65 N. & fit 1 N. [illegible]. Ad poſitiones. Erit primus 17136600. Secundus 12675000. ſub eiuſdē partis denominatione. Tertius 15615600. ſub eiuſdem partis denominatione. Quartus 8517600. ſub eiuſdem partis denominatione. Eſt autem partis denominator 163021824.

ξε ... ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μυ̃ αψιγ. μονάδες ͵ςχ. ὁ δὲ δεύτερος μυ̃. αρξζ. μ° ε μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος μυ̃. αφξα. μ° ͵εχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τέταρτος μυ̃. ωνα. μ° ζχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. τὸ δὲ μόριον μυ. α. μυ̃. ͵ςτβ. μ° ͵αωκδ.

IN QVAESTONEM XXII.

PVLCHERRIMVM eſt hoc problema & raræ ſubtilitatis, in quo cùm multum deſudarit Xilander, perfectam tamen eius enodationem afferre non potuit, deſtitutus ſcilicet ope poriſmatum quæ ad hoc requiruntur. Quoniam ergo gloriam rei perobſcuræ explicandæ nobis libenter reliquit, nos eam libentiùs amplectamur. Et vt omnia clariora fiant, ſingula quæque notatu digna ordine proſequamur.

Aduerte itaque primò lemma quod aſſumit Diophantus de triangulis rectangulis idem ferè eſſe licet aliis verbis enunciatum, quod iam vſurpauit trigeſima prima ſecundi, vbi & monuimus, quod hic repetere non pigebit, illo nil aliud contineri, quàm quod oſtenditur quarta ſecundi Euclidis, & quarta ſecundi poriſmatum. Etenim per quartam ſecundi, conſtat ſummam quadratorum à duobus numeris adſumpto duplo producti laterum efficere quadratum ſummam laterum. At per quartam ſecundi poriſmatum patet duplum producti laterum detractum à ſumma quadratorum, relinquere quadratum interualli laterum. Quare cùm in triangulo rectangulo quadratus hypotenuſæ ſit æqualis quadratis laterum circa rectum, manifeſtum eſt, quod ait Diophantus, quadratum hypotenuſæ ſiue adſumpto, ſiue detracto duplo producti laterum circa rectum, facere vtrimque quadratum. Proinde rectè Diophantus ſummam quatuor quæſitorum numerorum conſtituit hypotenuſam alicuius trianguli rectanguli, vnumquemque verò ipſorum numerorum ponit duplum producti laterum circa rectum, ſeu quadruplum areæ trianguli, vt conſtat ex tertia definitione tertij poriſmatum, ſic enim optimè ſatisfit poſtulatis. Quamobrem vt ipſi numeri diuerſi reperiantur, ſupereſt vt inueniamus quatuor triangula rectangula, quorum eadem ſit hypotenuſa.

Aduerte igitur ſecundò, vt benè monet Diophantus, repetire quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenuſam, nil aliud eſſe quàm quadratum quemlibet diuidere quater in duos quadratos. Quare niſi fractiones in operando vitare voluiſſet, poterat rem abſoluere per octauam ſecundi, qua docuit quadratum quemlibet infinities diuidere in duos quadratos. Vt autem fractiones in operatione vitentur, ſubtili ſanè artificio quadratum inueſtigat author, qui quater diuidatur in duos quadratos integros. Exponit ſcilicet duo triangula rectangula non ſimilia, puta 3. 4. 5. & 5. 12. 13. Tunc vtriuſque latera per alterius hypotenuſam multiplicans, inuenit alia duo triangula, quorum eadem eſt hypotenuſa, nimirum 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Nam & hæc eſſe latera trianguli rectanguli patet per primam tertij poriſmatum, cùm fiant lateribus trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicatis. Quod autem dixi exponenda eſſe triangula non ſimilia, id factum eſt, quia ſi triangula ſimilia ſint, non iam alia duo hac ratione formabuntur ab his triangula, ſed vnicum duntaxat. Quod ſic demonſtratur. Sint triangula ſimilia A B C. D E F. & ducta hypotenuſa F in ſingula alterius latera fiat triangulum G. H. K. dico idem triangulum G H K, & non aliud, fieri, ſi hypotenuſa C. ducatur in ſingula latera alterius D E F. Nam primo ex hypotheſi ex C in F fiet K. Deinde quia eſt A ad D vt C ad F. fiet, vtique idem G ex C in D qui fit ex A in F. ſimiliter quia eſt B ad E vt C ad F. fiet rurſus idem H ex C in E qui fit ex B in F. Quare conſtat propoſitum. defin. 4. 3. poriſm. 1. ſeptimi.

A 3. B 4. C 5.
D 6. E 8. F 10.
G 30. H 40. K 50.

Aduerte tertiò. Vt rurſus inueniatur alia duo triangula, quorum ſit eadem hypotenuſa 65. Diophantum vti poriſmate, quod demonſtrauimus propoſitione ſeptima libri tertij nimirum. Si duo numeri ex duobus quadratis compoſiti inter ſe ducantur, productus componetur bis ex duobus quadratis. Hac de cauſa triangula initio expoſita ita delegit, author, vt cuiuſlibet hypotenuſa componatur ex duobus quadratis, puta 5. ex quadratis 1. & 4. ac 13. ex quadratis 4. & 9. vnde optimè concludit 65. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ſemel ex 16. & 49. Atque iterum ex 1. & 64. Hi autem quadrati vt reperiantur oſtendit ſeptima tertij poriſmatum. Sed illius limitationes attendendæ ſunt, quarum prima requirit, vt quilibet expoſitorum numerorum componatur ex duobus quadratis inæqualibus; nam ſi alter ex duobus æqualibus quadratis compoſitus ſit, productus eorum multiplicatione componetur tantùm ſemel ex duobus quadratis, vt ſi ſumantur 5. & 8. quorum 8 componitur ex æqualibus quadratis 4. & 4. erit productus 40. ſemel tantùm ex duobus quadratis compoſitus, puta ex 36. & 4. ſecunda verò limitatio requirit, vt expoſitj numeri componantur ex quadratis minimè pro-

portionalibus , alioquin idem ſequitur incommodum , vt ſi ſumantur 5. & 20. compoſiti ex quadratis proportionalibus 1. 4. 4. 16. erit productus 100. ex duobus quadratis ſemel duntaxat compoſitus, videlicet ex 64. & 36. Quæ omnia loco citato demonſtrantur.

Aduerte quartò. Inuentis quadratis 16. & 49. itemque 1. & 64. ex quibus 65. componitur ex iis Diophantum formare triangula rectangula duo, quorum eadem eſt hypotenuſa 65. eo quem demonſtrauimus modò tertia vel quinta tertij poriſmatum. Etenim ſi per tertiam libeat operari à quadratis 16. & 49. fiet triangulum cuius hypotenuſa erit ſumma ipſorum puta 65. baſis verò interuallum eorundem puta 33. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis , puta 56. Rurſus à quadratis 1. & 64. formabitur triangulum , cuius hypotenuſa erit ſumma ipſorum , puta 65. Baſis verò interuallum eorundem , puta 63. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis , puta 16. & ſic habebuntur triangula duo quæſita 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Quæ eadem reperientur per quintam tertij poriſm. Verùm hic notandus eſt Caſus , cùm productus ex mutuo ductu duorum numerorum ex duobus quadratis, compoſitorum , componitur quidem bis ex duobus quadratis, ſed vna compoſitione componitur ex duobus quadratis æqualibus, vt ſumptis 5. & 10. productus 50. componitur quidem ſemel ex quadratis 1. & 49. inæqualibus. Sed componitur iterum ex æqualibus 25. & 25. Vnde per hanc compoſitionem inutilis redditur operationi Diophanti , non enim inde concludi poteſt eius quadratum componi ex duobus quadratis, cùm ipſorum 25 & 25. nullum ſit interuallum, quod deberet eſſe latus vnius quadratorum illorum. Porro id ſemper accidit, quando tales ſumuntur duo numeri ex duobus quadratis compoſiti , vt quod fit ex interuallo laterum vnius , in interuallum laterum alterius , æquetur duplo producti ex minore latere in minus latus. Quod ita demonſtratur.

C 6.
A 3. B 9. M 90.
F 1.
D 1. E. 2. N 5.
G 3. H 9. K 6. L 18.

Sint A B latera quadratorum vnius , quorum interuallum C. & ſint D E latera quadratorum alterius, quorum interuallum F. & productus ex C. in F æquetur duplo producti ex A in D. Porro compoſitus ex quadratis ipſorum A B eſto M. & productis eſſe quadratis ipſorum 1 D E eſto N. dico productum ex M in N. componi quidem bis ex duobus quadratis , ſed vna compoſitione componi ex duobus æqualibus quadratis. Etenim ducto D in ipſos A B. fiant G H. & ducto E in eoſdem A B. fiant K L. Patet ex demonſtratis ſeptima tertij poriſmatum , productum ex M. in N. componi tum ex quadrato ſummæ amborum G L. & & ex quadrato interualli ipſorum G K. Tum ex quadrato ſummæ amborum H K. & ex quadrato interualli ipſorum H L. Verùm aio ſummam ipſorum H K. æquari interuallo ipſorum G L, ac proinde productum ex M in N. hac compoſitione conſtare ex duobus quadratis æqualibus. Quia enim L fit ex E in B. ſeu ex duobus D F. in duos A C. ſi hinc auferatur productus ex D in A. puta G. patet interuallum ipſorum G L. æquari productis ex A in F, ex C in D, & ex C in F. & loco producti ex C in F. ſumendo duplum producti ex A in D illi æqualem ex hypotheſi , erit prædictum interuallum æquale duplo producti ex A in D. & productis ex D in C. & ex A in F. Sed eiſdem productis patet æqualem eſſe ſummam ipſorum H K. Nam H fit ex D in B. ſeu ex D in A. & ex D in C. At K fit ex A in E. ſeu ex A in D. & ex A in F. Vnde conſtat duorum H K. ſummam æquari duplo producti ex A in D, & productis ex D in C. & ex A in F. Igitur ipſorum H K ſumma æquatur interuallo ipſorum G L. Quod demonſtrandum erat.

Aduerte quintò. Textus Græci lacunas à me eſſe repletas , tum deficientes numeros reſtituendo, tum corruptos emendando , & ne fortè hæreas in numeris Græcis , moneo Diophantum maximos numeros in quibus ingens Myriadum multitudo continetur , ſic exprimere vt Myriadas à reliquis vnitatibus diſtinguat perſpicuitatis ergo , ſignum autem Myriadibus apponit μυ Myriadibus myriadum μμ. duplex μ. At reliquis vnitatibus ſignum conſuetum μο. Sic vides numerum 163021824. ſic ab eo exprimi , μμ α. ideſt Myrias vna myriadum. μυ. ϛτβ id eſt Myriades 6302. μο ͵αωκδ. ideſt vnitates 1824. Et ſic de aliis.

Aduerte poſtremò , ſiue poriſmate Diophanti æquè benè inueniri poſſe in integris quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenuſam , auxilio decimæ tertij poriſmatum. Etenim expoſitis triangulis non ſimilibus 3. 4. 5. & 5. 12. 13. ſi cum Diophanto formes ex his alia duo ducendo vtramque hypotenuſam in alterius latera , habebis 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Tum ſi per decimam tertij poriſm. ex iiſdem triangulis prius expoſitis formes alia duo modo ibi tradito , fient vtique 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Immò ex ibi demonſtratis licebit ampliare Poriſma Diophanti , & illud extendere non ſolùm ad numeros ex duobus quadratis compoſitos , ſed etiam ad duos ex duobus planis ſimilibus compoſitos , & vniuerſaliſſimè proponere.

Si numerus ex duobus planis ſimilibus compoſitus, ducatur in alium ex duobus planis ſimilibus compoſitum , qui non ſint proportionales iis ex quibus primus componitur ; producetur numerus cuius quadratus componetur quater ex duobus quadratis.

A 24. B 45. C 51.
D 9. E 12. F 15.

Sint enim C F ex duobus planis ſimilibus vterque compoſitus , qui non ſint proportionales. Et ex C in F fiat T. dico T quater componi ex duobus quadratis. Etenim quia C componitur ex duobus planis ſimilibus , erit hy-

G 693. K 324.
L 756. M 117. T 765
N 675. P 360.
Q 612. R 459.

potenuſa trianguli rectanguli per tertiam tertij poriſmatum. Sint ergo latera circa rectum A. B. ſimiliter F oſtenditur hypotenuſa trianguli rectanguli, cuius latera circa rectum D E. Igitur à duobus triangulis A B C D E F. formentur alia duo ducendo hypotenuſam vtramque in alterius latera, erunt triangula N P T. Q R T. Rurſus formentur alia duo per decimam tertij poriſmatum, erunt hæc G K T. L M T. Quare conſtat propoſitum.

Cæterùm animaduerſione quoque dignum eſt, quæſtionem hanc ad quotlibet numeros eadem arte extendi poſſe, cùm ſi fractiones quidem minimè vitentur, quilibet quadratus infinitis modis diuidi poſſit in duos quadratos. Si verò etiain per integros rem abſoluere libeat, facilè ſit Diophanti artificium imitando quadratum reperire, qui quoties quis juſſerit componatur ex duobus quadratis integris, quandoquidem per poriſma quod aſſumit Diophantus, quodque demonſtratum eſt ſeptima tertij poriſmatum licet numerum iuuenire quoties quis juſſerit ex duobus quadratis compoſitum. Nam ſicut per illud poriſma inuenitur nunietus bis compoſitus ex duobus quadratis, ducendo numerum ſemel ex duobus quadratis compoſitum, in alium item ſemel ex duobus quadratis compoſitum, ita ſi numerus bis compoſitus vt 65. ducatur in alium ſemel compoſitum, quales ſunt 5 13. 10. 17. productus ter aut quater ex duobus quadratis componetur, ter quidem ſi 65. ducatur in 5. vel in 13. ex quorum mutuo ductu ipſe fit, vel in aliquem illorum multiplicem. Quater autem ſi ſecus. Verbi gratia productus ex 5. in 65. puta 325. tet tantum componitut ex duobus quadratis, nempe ex 225. & 100. ex 324. & 1. ex 289. & 36. Quod aceidit quia 5. & 65. componuntur ex duobus quadratis. Quare ſi intelligamus 65. componi ex 49. & 16 neceſſe eſt productum ex 5. in 65. puta 325. componi ex duobus quadratis qui ſunt 225. & 100. 324. & 1 Rurſus verò ſi capiamus 65. vt compoſitum ex 64. & 1. neceſſe eſt productum ex 5. in 65. puta 325. componi etiam bis ex duobus quadratis, nimirum ex 289. & 36. & ex 225. & 100. Sed quia hi coincidunt cum duobus ob priorem multiplicationem inuentis, conſtat 325. tet tantùm diuidi in duos quadratos. At ſi ducas 17. in 65. fiet 1105. quater compoſitus ex duobus quadratis nimirum ex 576. & 529. quorum latera 24. 23. ex 1024. & 81. quorum latera 32. 9. ex 961. 144. quorum latera 31. & 12. Ac demum ex 1089. & 16. quorum latera 33. & 4.

Quod ſi velis numerum ſexies compoſitum ex duobus quadratis, ſume aliquem ter compoſitum vt 325. eumque ducito in ſemel compoſirum, dum non ſit aliquis eorum qui metiuntut 325. vel multiplex eorum, ſed ſume v. g. 17. quo ducto in 325. fit 5525. ſexies compoſirus ex duobus quadratis, nempe ex 3025. 2500. quorum latera 55. 50. ex 3844. 2681. quorum latera 62. 41. ex 4900. 625. quorum latera 70. 25. ex 5041. 484. quorum latera 71. 22. ex 5329. 196. quorum latera 73 14. Ac demum ex 5476. 49. quorum latera 74. 7.

Ita ſi velis numerum octies ex duobus quadratis compoſitum, duces compoſitum quater in compoſitum ſemel, vel bis compoſitum in bis compoſitum, dummodo inter eos nulla ſit communicatio, & ſic in infinitum. Qua de cauſa ſi ducas 5525. ſexies compoſitum, vt oſtenſum eſt, in 1073. bis compoſirum, nimirum ex binis quorum latera 32. & 7. Et rurſus ex binis quorum latera 28. 17. fiet 5928325. compoſitus (quod mirabile eſt) viceſies & quater ex duobus quadratis, quorum accipe binorum latera.

2110	2426	2417	2390	2362	2191	1985	2118
1215	207	294	465	591	1062	1410	1201
2319	2335	1823	1953	2415	2434	2271	2385
742	690	1614	1454	310	63	878	490
2282	2202	2065	2238	1746	1890	1633	2433
849	1039	1290	959	1697	1635	1806	94

OBSERVATIO D. P. F. AD COMMENTARIVM, præcipuè ad locum illum, Aduerte tertio, &c.

NVmerus primus qui ſuperat vnitate quaternarii multiplicem ſemel tantùm eſt hypotenuſa trianguli rectanguli, eius quadratus bis, cubus 3. quadratoquadratus 4 &c. in infinitum.

Idem numerus primus & ipſius quadratus componuntur ſemel ex duobus quadratis: eius cubus & quadratoquadratus, bis: quadratocubus & cubocubus ter &c. in infinitum.

Si numerus primus ex duobus quadratis compoſitus ducatur in alium primum

*etiam ex duobus compoſitum qnadratis , productum componetur bis ex dnobus qua-
dratis : ſi ducatur in quadratum eiuſdem primi : productum componetur ter ex duo-
bus quadratis : ſi ducatur in cubum eiuſdem primi prodnctnm componetur quaterex
dnobus quadratis , & ſic in infinitum.*

*Hinc facile eſt determinare quoties numerus datns ſit hypotenuſa trianguli rectan-
gnli , ſnmantur omnes primi quaternarÿ multiplicem vnitate ſuperantes qui datum
numernm metiuntur v. g. 5. 13. 17. Quod ſi poteſtates dictorum primorum metiantur
datum numerum , Diſponantur vna cum reliquis loci laterum v. g. metiantur datum
numerum 5. per cubum, 53. perquadratum & 17. per latus ſimpliciter.*

*Snmantur exponentes omnium diuiſornm Nempe numeri 5. exponens eſt 3. propter
cubum , numeri 53. exponent eſt 2. propter quadratum & numeri 57. vnitas tantum:
ordinentur igitur vt volueris dicti omnes exponentes vt ſi velis. 3. 2. 1. ducatur pri-
mus in ſecundnm bis & producto adjiciendo ſummam primi & ſecnndi fit 17. du-
catur iam 57. in tertium bis & producto adiiciendo ſummam 17 & tertij fit 52. datus
igitnr nnmerns erit hypotenuſa 52. triangulornm rectangulorum , nec eſt diſsimilis
in qnotcnnqne diuiſoribus & ipſorum poteſtatibus methodus.*

*Reliqui numeri primi qui quaternarii multiplicem vnitate non ſuperant nihil
ant addunt qnaſtioni ant detrahunt neque ipſorum poteſtates.*

*Inuenire numerum qui quoties quis velit ſit hypotennſa : quaratnr numerus qui ſit
ſepties hypotennſa , numerus 7. ductus dupletur fit 14. adiice vnitatem fit 55. ſume
omnes primos qui menſnrant 15. ſunt hi 3. & 5. ab vnoqnoqne demptâ vnitate
ſume reliqui dimidium , fiunt 1. 2. qnarantur tot primi diuerſi qnot hic ſunt nu-
meri nempe duo & ſecundum exponentes 1 & 2 inter ſe multiplicentur nempe vnus
in quadratnm alterius , in hoc caſn ſatisfiet quaſtioni modò primi quos ſumis ſupe-
rent quaternarinm vnitate , ex his conſtat facilè poſſe inueniri numerum minimum
qni quoties quis velit ſit hypotenuſa.*

*Inuenire numernm qui qnoties quis velit componatnr ex duobus quadratis : ſit
datus numerus 10. eius duplum 20. cuius omnes partes prima ſnmantur, 2. 2. 5.
ab vnaquaqne tolle vnitatem fiunt 1. 1. 4. ſnmantnr igitur 3. nnmeri primi,
(qui nempe vnitate ſuperant quaternarium ,) v. g. 5. 13. 17. & quadratoqnadratus
vnius propter exponentem 4. ducatur in reliquos dnos. Fict numerus quaſitus. Vt
autem dignoſcatur qnoties datus nnmerus ex duobns quadratis componitur. Sit datus
numerus 325. numeri primi qui enm componunt (nempe quaternarium vnitate ſupe-
rantes) ſunt 5. 13. hic ſemel, ille per quadratnm. Exponentes diſponantur 2. 1. produ-
ctns multiplicatione iungatur ſumma, fit 5. cui adiunctâ vnitate fit 6. cuius dimidium
3. toties igitur numerus datus componitur ex duobus quadratis, ſi eſſent 3. exponentes
vt 2. 2. 1. Ita procedendum, productnm ſub prioribus adiunctum ſumma facit 8. duca-
tnr 8. in tertium & iungatur productum ſumma fit 17. cni iunge vnitatem fit 18.
cnius dimidium dat 9. toties iſte ſecundus numerus componetnr ex duobns quadratis;
ex his facile poteſt inueniri minimus numerns qui quoties quis velit componatnr ex
dnobus quadratis. Si vltimns numerns biſariam diuidendus eſſet impar, tunc demptâ
vnitate reliqui dimidium ſnmi debet.*

*Sed proponatur ſi placet ſeqnens quaſtio. Inuenire numernm in integris qui adſump-
to dato numero conficiat quadratum , & ſit hypotenuſa qnotlibet triangulorum re-
ctangnlorum. Hæc quæſtio ardua eſt, proponatur v. g. inueniendus nnmerus qni ſit bis
hypotenuſa , & adſumpto binario conficiat quadratum. Erit qnaſitns nnmerns 2023.
& ſunt alÿ infiniti idem praſtantes , vt 3362. &c.*

QVAESTIO XXIII.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui dempta vtraque parte diuiſi faciat quadratum. Eſto datus 10. Ponatur inueniendus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Is ſiue ei adimas 2 N. + 1. ſiue 4 N. remanebit quadratus. Statuo igitur primum 2 N. + 1. ſecundum 4. N. Oportet horum ſummam æquari dato numero. Sed horum ſumma eſt 6 N. + 1. Hoc ergo æquatur 10. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit primus 4. Secundus 6. Quadratus autem $6\frac{1}{4}$.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς λείψας ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ δοθεὶς μο ῑ. τετάχθω ὁ προσζητούμενος τετράγωνος δυ ᾱ ςς β̄. μο ᾱ. οὗτος ἐὰν μὲν λείψῃ ςς οὺ β̄ μο ᾱ. καταλείπεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ ςς οὺ δ̄. πάλιν καταλείπεται τετράγωνος. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ςς δ̄. ταῦτα δεῖ συντεθέντα ποιεῖν τὸν δοθέντα, ἀλλὰ συντεθέντα ἐστὶ ςς οἱ ς̄ μο ᾱ. ταῦτα ἴσα μο ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς ὸς μο ᾱ. ∠′. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ς̄ ὁ δὲ τετράγωνος μο ς̄. ᾱ δ′.

IN QVÆSTIONEM XXIII.

MIROR Xilandrum non aduertiſſe quæſtionem hanc eandem eſſe cùm decima ſexta ſecundi, ſicut & ſequens non differt à decima quinta eiuſdem libri. Operatio quidem eſt paulò diuerſa Sed eodem fermè recidit.

Cæterùm varietas ſolutionis in eo conſiſtit quod quadrati inueniendi latus poteſt fingi diuerſimodè, nimirum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus ſit minor numero diuidendo, puta in hypotheſi Diophanti 1 N. + 1. vel 1 N. + 3. vel 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 10. ſic enim totidem diuerſæ contingent ſolutiones quot modis variabitur vnitatum numerus, præterquàm in vno caſu, cùm ſcilicet tales duo ſumentur vnitatum numeri, vt vtriuſque quadratum auferendo à dato numero, & reſidua diuidendo per ſextuplum ſumptorum numerorum, fient quotientes eodem diſtantes interuallo, quo diſtant ſumpti numeri. Vt ſi ſumantur numeri 1. & 2. in noſtra hypotheſi; nam ab eodem 10. auferendo quadratos eorum, puta 1. & 4. remanent 9. & 6. quibus diuiſis per ſextuplum ipſorum numerorum, puta 9. per 6. & 6. per 12. fiunt quotientes $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ quorum interuallum idem eſt atque ipſorum 1 & 2. Quamobrem ſiue fingas latus quadrati quæſiti 1 N. + 1. ſiue 1 N. + 2. eadem continget ſolutio, cuius ſymptomatis cauſam ex ipſa operatione paulò attentiùs conſiderata facilè deprehendes.

Sed & animaduerſione dignum eſt eodem poſito vnitatum numero in latere Quadrati, eandem ſemper contingere ſolutionem, quantumlibet varietur Numerorum numerus. Sic in hypotheſi Diophanti, ſiue latus fingatur 1 N. + 1. ſiue 2 N. + 1 ſiue 3 N. + 1 &c. ſemper eadem fiet ſolutio, eruntque quæſitæ partes 6. & 4. & quadrati latus $2\frac{1}{2}$. Similiter ſiue quadrati latus ponatur 1 N. + 3. ſiue 2. N. + 3. ſiue 3 N. + 3. &c. ſemper erit eadem ſolutio, quippe quæſitæ partes inuenientur $\frac{2}{3}$ & $9\frac{1}{3}$. At quadrati latus [illegible]. Huius quoque ſymptomatis cauſam ex ipſamet operatione deprehendes, & ab huiuſmodi theoremate.

Si fuerint tres numeri, & à primo detrahatur quadratus ſecundi, & reſiduum diuidatur per ſextuplum producti ex ſecundo in tertium, ac quotiens ducatur in tertium, idem ſemper procreatur numerus quamtumlibet varietur tertius primo & ſecundo inuariatis.

Hoc verò nil aliud eſt quàm ex eodem numero per ſextuplum eiuſdem numeri diuiſo eundem ſemper procreari numerum, vt tibi conſiderandum relinquo. Porro hinc talem elicio Canonem.

A dato numero aufer quadratum quemlibet, reſiduum diuide per ſextuplum lateris illius, quotiens auctus eodem latere, erit latus quæſiti quadrati: eiuſdem verò quotientis quadruplum erit altera quæſitarum partium.

Moneo demum, etiam eodem modo facta poſitione quæſiti quadrati, ipſarum partium poſitiones variari poſſe. Nam poſito quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. ſicut alteram partium Diophantus poſuit 4 N. qua detracta à quadrato poſito, remanet quadratus 1 Q. − 2 N. + 1. ſic & aliam ponere potuiſſet 6 N. − 3. vel 8 N. − 8. &c. quibus ab eodem quadrato detractis remanent quadrati 1 Q. − 4 N. + 4. & 1 Q. − 6 N. + 9. Ita ſi ponas quæſitas partes 4 N. & 6 N. − 3. fiet horum ſumma 10 N. − 3. æqualis 10. & erit 1 N. $\frac{13}{10}$. & quæſitæ partes $\frac{26}{5}$ & $\frac{24}{5}$. latus quadrati $\frac{23}{10}$. Qua ratione operan-

do, neceſſe non eſt in quadrato quæſito reperiri plures vnitates quàm in dato numero. Nam ponatur quadratus quæſitus 1 Q. + 8 N. + 16. & ponantur partes quæſitæ 16 N. & 18 N. − 9. nam his ab expoſito quadrato detractis, remanent quadrati 1 Q. − 8 N. + 16. & 1 Q. − 10. N. + 25. Partium ſumma eſt 34 N. − 9. æqualis 10. & fit 1 N. $\frac{19}{34}$. ſunt ergo partes quæſitæ $\frac{304}{34}$ $\frac{36}{34}$. latus vero quadrati $\frac{155}{34}$.

QVÆSTIO XXIV.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς δύο, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο κ̄. καὶ τετάχθω ὁ τετράγωνος δυ ᾱ. ςς β̄. μο ᾱ. τούτῳ δὲ ἐὰν προσθῶ ςς οὺς β̄. μο γ̄. ἔστι τετράγωνος. ἀλλὰ μὴν καὶ ἐὰν προσθῶ ςς οὺς δ̄. μο η̄. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ςς β̄ μο γ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ̄. μο η̄ συναμφότερος ἄρα ἔσται ςς ς̄ μο ια̅ ταῦτα ἴσα μο κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ. 𐅵. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τῶν διῃρημένων μο ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ιδ. ὁ δὲ τετράγωνος μο ς̄ δ'. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Datvm numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui vtralibet diuiſi parte aſſumpta faciat quadratum. Eſto datus 20. Ponatur quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Huic ſiue addas 2 N. + 3. ſiue 4 N. + 8. fit quadratus. Statuatur ergo primus 2 N. + 3. Secundus 4 N. + 8. Erit vtriuſque ſumma 6 N. + 11. Hoc æquatur 20. & fit 1 N. 1$\frac{1}{2}$. Erit itaque primus 6. Secundus 14. Quadratus autem 6$\frac{1}{4}$. & demonſtratio eſt euidens.

IN QVAESTIONEM XXIV.

Eadem eſt hæc quæſtio cum decima quinta ſecundi, ſed operatio aliquantulum diuerſa. Poſitio quadrati variari poteſt infinitis modis, dummodo partes dati numeri ſic ponantur, vt vnitates in iis contentæ ſimul ſumptæ minores ſint dato numero. Pro partibus etiam dati numeri variæ fieri poſſunt poſitiones, ſed cum eadem cautione. Denique Canon ad decimam quintam traditus, ex huius etiam operatione formari poterat.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER QVARTVS.

QVÆSTIO I.

Datvm numerum diuidere in duos cubos, quorum laterum ſumma data ſit. Oporteat numerum 370. diuidere in duos cubos, quorum latera faciant 10. Ponatur prioris cubi latus 1 N. + 5. hoc eſt dimidium ſummæ laterum. Relinquitur ergo alterius cubi latus 5 − 1 N. Ipſi autem cubi erunt ſimul 30 Q. + 250. Hæc æquantur 370. dato ſcilicet numero, & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit prioris cubi latus 7. ſecundi 3. Ipſi autem cubi 343. & 27.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραὶ εἰσὶ δοθεῖσαι. ἔστω δὴ τ̄ο̄ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους, ὧν αἱ πλευραὶ μ° ῑ. τετάχθω ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^ο ᾱ μ° ε̄. τουτέστι τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν. λοιπὸν ἄρα ἡ τοῦ ἑτέρου κύβου πλευρὰ ἔσται μ° ε̄ ⋔ ς^ο ᾱ. αὐτοὶ ἔσονται οἱ κύβοι δ^υ λ̄ μ° σν̄. ταῦτα ἴσα μ° τ̄ο̄ τουτέστι τῷ δοθέντι, καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ° β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ μ° ζ̄. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ° γ̄. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν πρῶτος τμγ̄. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄.

In IV. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

Binomiorvm 1 N. + 5. & 5 − 1 N. cubos ſumit Xilander modo communi, ſumendo ſcilicet prius eorum quadratos, & eos ducendo in ipſa binomia. Verùm compendioſius erit, huiuſmodi binomiorum cubos ſumere per vigeſimam ſecundi poriſmatum. Qua oſtenſum eſt cubum totius æquari cubis partium, & productis ter ex quadrato cuiuſlibet in alterum, ita ſi velis cubum ipſius 1 N. + 5. ſumes partium cubos, puta 1 C. & 125. Tum duces ter quadratum primæ partis in ſecundam, fient 15 Q. Denique duces ter quadratum ſecundæ partis in primam fient 75. N. Quamobrem erit cubus totus 1 C. + 15 Q. + 75 N. + 125. Eadem arte inuenies cubum reſidui 5 − 1 N. nimirum 125 + 15 Q. − 75. N. − 1 C. Vbi animaduerſione dignum eſt in binomij, & in reſidui cubis duas ſemper ſpecies eodem ſigno, duas verò contrario affici. Nam partis quæ in vtroque latere afficitur ſigno + cubus etiam idem ſignum retinet vt in hypotheſi 125. At partis affectæ ſigno − cubus etiam idem ſignum habet in cubo reſidui, puta in 1 C. Productus verò ter ex parte affecta ſigno + in quadratum alterius, idem retinet ſignum, puta 15 Q. At productus ter ex parte affecta ſigno − in quadratum alterius, habet etiam ſignum − in cubo reſidui, nimirum 75 N. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiuſmodi Canon.

Aufer cubum ſumma laterum à quadruplo ſumma cuborum, reſiduum diuide per triplum ſumma laterum, orietur quadratus interualli laterum.

Habens itaque ſummam numerorum, & eorum interuallum, inuenies numeros per primam primi, ſed & alium non deteriorem Canonem elicere poſſumus ex decima nona ſecundi poriſmatum. Nimirum.

Aufer ſummam cuborum à cubo ſumma laterum, reſiduum diuide per triplum ſumma laterum, orietur planus ſub lateribus.

Habens autem ſummam numerorum, & productum multiplicationis eorundem, inuenies Numeros per trigeſimam primi.

Denique tam ex operatione Diophanti, quàm ex priore Canone colligitur, huic quæſtioni hanc conditionem debere adiici.

Oportet quadruplum ſummæ cuborum, multatum cubo ſummæ laterum, diuiſum per triplum ſummæ laterum, quotientem dare quadratum.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή. ἔστω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιεῖν μο ϛ̅. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων μο φδ̅. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ςο α̅ μο γ̅ τοῦ δὲ ἐλάσσονος ςο α̅ ⋔ μο γ̅. καὶ μένει αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ αὐτόθι ἐστὶ μο ϛ̅. λοιπὸν δεῖ τῶν κύβων τὴν ὑπεροχὴν εἶναι μο φδ̅. ἀλλ' ἡ τῶν κύβων ὑπεροχή ἐστι δυ ιη̅ μο νδ̅. ταῦτα ἴσα μο φδ̅. καὶ γίνεται ὁ ςο μο ε̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἡ μὲν τοῦ μείζονος κύβου πλευρά ἐστι μο η̅. ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος μο β̅. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὃς μὲν φιβ̅. ὃς δὲ η̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt illorum interuallum datum faciat numerum, & cuborum quoque ab ipſis ortorum ſit quod præſcribitur interuallum. Eſto interuallum numerorum 6. interuallum verò cuborum 504. Ponatur rurſus maioris cubi latus 1 N. + 3. minoris verò 1 N. − 3. & manet illorum interuallum 6. Supereſt vt cuborum interuallum ſit 504. ſed cuborum interuallum eſt 18 Q. + 54. Hæc ergo æquantur 504. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit maioris cubi latus 8. minoris verò 2. Ipſi autem cubi 512. & 8. & euidens eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM II.

HIc ex operatione Diophanti eliciemus huiuſmodi Canonem.

Diuide quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur quadratus ſumma laterum.

Cùm autem habueris ſummam numerorum & eorum interuallum, inuenies ipſos numeros per primam primi, ſed & alium Canonem non deteriorem eliciemus ex vigeſima prima ſecundi poriſmatum, nimirum.

Diuide interuallum cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur planus ſub lateribus.

Porro cùm habueris interuallum numerorum, & productum eorum multiplicatione, inuenies ipſos numeros per trigeſimam tertiam primi. Colliges etiam tam ex operatione Diophanti quàm ex priore Canone, huiuſmodi conditionem huic quæſtioni præſcribi debere.

Oportet quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, diuiſum per triplum interualli laterum, quotientem dare quadratum.

Quæſtiones etiam aliquot hîc deſiderantur ad hanc materiam pertinentes, quas ſubiicere non grauabor.

QVAESTIO PRIMA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum ſumma æqualis ſit datorum interuallo. Oportet autem duplum minoris cubi non ſuperare maiorem.

Sint dati cubi 8. & 1. quorum interuallum 7. Oportet igitur diuidere 7. in duos cubos. Eſto latus vnius, latus maioris datorum cuborum − 1 N. puta 2. − 1 N. & fingatur alterius latus à certo Numerorum numero − latere minoris cubi, dum talis ſit numerus Numerorum, vt fiat diuidendo quadratum maioris lateris per quadratum minoris. Eſto itaque latus ſecundi cubi 4 N. − 1. Eſt ergo ſumma cuborum 7 + 63 C. − 42 Q. æqualis 7. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. ſuntque latera quæſitorum cuborum $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$. ipſi cubi $\frac{64}{27}$. $\frac{125}{27}$.

Aliter. fingatur latus vnius quæſitorum cuborum 1 N. − latere minoris datorum, puta 1 N. − 1. Alterius verò latus ponatur latus maioris cubi − tot Numeris, quot fiunt diuidendo quadratum minoris lateris per quadratum maioris, ponatur itaque 2 − $\frac{1}{4}$ N. fiet ſumma Cuborum 7 + $\frac{63}{64}$ C. − $\frac{21}{8}$ Q. æqualis 7. & fit 1 N. 2 $\frac{2}{3}$ ſuntque cubi quæſiti qui prius. Hîc moneo in tyronum gratiam

ingenioſè fingi cuborum latera, vt maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos. Idcirco ſtatuitur in vno laterum fictiorum maius datorum laterum cum ſigno + & in altero latere fictitio ponitur minus datorum laterum cum ſigno − vt facta additione cuborum, maneant tantùm vnitates 7 quæ aboleantur per æqualem vnitatum numerum, qui eſt ex alia parte, æquationis. Deinde tales vtrobique ponuntur numeri Numerorum vt in vno cubo totidem inueniantur Numeri cum ſigno + quot reperiuntur in alio, cum ſigno −. vt his etiam per additionem ſe mutuo elidentibus, maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos, cùm quadrati ob ſignum − adiunctum tranſeant in aliam æquationis partem.

Ex vtraque autem operatione formatur huiuſmodi Canon.

Vtrumque datorum cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per ſummam cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à maiore latere, relinquentur cuborum quæſitorum latera.

Hinc conditionis adiectæ ratio deduci poteſt. Nam ſi maior cubus ad minorem ſit in dupla ratione, vel etiam in minore, non poſſe perfici quod iubet hic Canon, ſic demonſtratur. Sint cubi A minor, & B duplus illius, quorum latera C D. ductoque A in D ter fiat E. quo diuiſo per F ſummam cuborum A B. fit quotiens G. Ergo per hunc Canonem, vt habeamus latus vnius quæſitorum cuborum, oportet auferre G ab ipſo D. Sed hac ſubtractione nil relinqui ſic probatur. Quia B eſt duplus ipſius A. patet ſummam ipſorum A B, puta F triplam eſſe ipſius A. At E eſt triplum producti ex A in D. Cæterùm idem quotiens G fiet ſiue E diuidatur per F. ſiue triens ipſius E per trientem ipſius F. diuidi concipiatur. Sed diuidendo productum ex A in D. per A. fit quotiens D. igitur ipſi D G. ſunt æquales, ac proinde auferendo G ab ipſo D nil remanet pro latere vnius quæſitorum Cuborum. Quod erat propoſitum. Multo minus perfici poterit quod iubet Canon, ſi B ponatur minor duplo ipſius A, tunc enim G maior eſſe oſtendetur quàm D, ac proinde ſubtractio nullo modo perfici poterit. Si enim B minor eſt duplo ipſius A. erit & F minor triplo ipſius A. Quare cùm triens ipſius E nempe productus ex A in D. diuidetur per trientem F qui minor erit quàm A quotiens vtique puta G. maior erit ipſo D. Nam ſi productus ex A in D. per A. diuideretur, fieret quotiens D, Quare ſi idem productus diuidatur per numerum minorem quàm A, fiet vtique quotiens maior quàm D. Quare patet propoſitum.

A 1. B 2. C 1. D R C. 2.
E R C. 54. F 3. G R C. 2.

Hinc quoque pendet modus inueniendi tres cubos, qui ſimul additi cubum efficiant, quod fit hac arte.

Sume duos cubos quorum maior ſuperet duplum minoris, & ducito maius latus in ſummam cuborum, fiet latus cubi ſummam trium æquantis. Ducito minus latus in ſummam cuborum. Itemque maius latus in ſuum cubum multatum duplo minoris cubi. Ac denique minus latus in duplum maioris cubi multatum minore cubo, fient latera trium quæſitorum cuborum.

Iſta pluribus explicare operæ pretium fuit, quoniam hæc quæſtio, tanquam poriſma eſt ad decimam nonam quinti, vt ſuo loco docebimus.

OBSERVATIO D. P. F.

Determinationem operationis iteratione facillimè tollimus & generaliter tum hanc quæſtionem tum ſequentes quæſtiones conſtruimus, quod nec Bachetus nec ipſe Vieta expedire potuit. Sint dati cubi 64 & 125. inueniendi alij duo quorum ſumma æqualis ſit datorum interuallo. Ex quæſtione tertiâ folio ſequenti quærantur duo alij cubi quorum differentia æquet differentiam datorum. Illos Bachetus inuenit & ſunt $\frac{15252992}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$ iſti duo cubi ex conſtructione habent interuallum æquale interuallo datorum. Sed iſti duo cubi inuenti per quæſtionis tertiæ operationem poſſunt iam transferri ad quæſtionem primam cum duplum minoris non ſuperet maiorem, datis itaque his duobus cubis quærantur alij duo quorum ſumma æquetur interuallo datorum, id quidem licet per determinationem huius quæſtionis primæ. At interuallum datorum horum cuborum eſt per quæſtionem tertiam æquale interuallo cuborum prius ſumptorum 64. & 125. igitur conſtruere nihil vetat duos cubos quorum ſumma æqualis ſit interuallo datorum 64. & 125. quod ſanè miraretur ipſe Bachetus. Imo ſi tres iſtæ quæſtiones eant in circulum & iterentur in infinitum, dabuntur duo cubi in infinitum idem præſtantes, ex inuentis enim vltimo duobus cubis quorum ſumma æquet

differentiam datorum, per quæſtionis ſecundæ operationem quæremus duos alios quorum differentia æquet ſummam vltimorum, hoc eſt, interuallum priorum & ex hac differentiâ rurſum quæremus ſummam & ſic in infinitum.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum differentia æquet ſummam datorum.

Sint dati 8. & 1. oporteat inuenire duos alios cubos, quorum interuallum ſit 9. Ponatur latus vnius 2 + 1 N. alterius verò 4 N. − 1. ob cauſas in præcedente explicatas. Erit igitur Cuborum interuallum 9 + 54 Q. − 63 C. æqualis 9. & fiet 1 N. $\frac{6}{7}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{20}{7}$. & $\frac{17}{7}$. Ipſi cubi $\frac{8000}{343}$. & $\frac{4913}{343}$.

Aliter ponatur latus vnius cubi 1 N. − 1. alterius verò 2 + $\frac{1}{4}$ N. erit interuallum cuborum 9 + 3 $\frac{3}{8}$ Q. − $\frac{63}{64}$ C. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{24}{7}$. ſuntque cubi qui prius. Ex vtraque operatione elicitur huiuſmodi Canon.

Vtrunque datorum Cuborum ducito ter in latus alterius, productes diuide per interuallum cuborum, & minori quotienti adde maius latus. Atque à maiore quotiente aufer minus latus, ſumma & reſiduum exhibebunt quæſitorum latera cuborum.

Hinc etiam aliùs colligitur modus inueniendi tres cubos, quorum ſumma cubum faciat, qui talis eſt.

Sume duos quoſuis numeros, & ducito maiorem in ſuum cubum auctum duplo minoris cubi, fiet latus cubi æquantis ſummam trium. Rurſus ducito eundem maiorem numerum in interuallum cuborum. Itemque ducito minorem numerum, tum in duplum maioris cubi auctum cubo minoris tum in cuborum interuallum, fient latera trium quæſitorum cuborum.

Cæterùm moneo inuentis ſemel tribus cubis, ſiue per hanc, ſiue per præcedentem quorum ſumma cubum faciat, ſi eorum latera ſigillatim per quemlibet numerum vel multiplicentur vel diuidantur, fore vt & productorum & quotientum cubi idem præſtent. Quod facile eſt demonſtrare
12. *octaui.* ex eo quod cubi ſunt in triplicata ratione laterum, vnde ſequitur numerorum proportionalium cubos eſſe proportionales, & propoſitum nullo negotio concluditur. Ita cùm per priorem regulam inuenti ſunt cubi à lateribus 9. 12. 15. qui æquantur cubo à latere 18. ſi ſingula latera diuidantur per 3. fient rurſus latera 3. 4. 5. quorum cubi ſimul æquabuntur cubo ipſius 6.

QVÆSTIO TERTIA.

Datis duobus cubis, inuenire alios duos, quorum differentia æquet datorum differentiam. Oportet autem duplum minoris excedere maiorem.

Sint dati cubi 64. & 125. quorum differentia 61. & quærendi ſint alij duo cubi, quorum itidem interuallum ſit 61. Ponatur vnius latus 1 N. − latere minoris cubi, puta 1 N. − 4. Et ponatur latus alterius tot Numerorum quot ſunt vnitates in quotiente diuiſionis quadrati à minore latere per quadratum maioris − latere maioris cubi. Sit ergo huiuſmodi latus $\frac{16}{25}$ N. − 5. Cuborum interuallum eſt $\frac{11529}{15625}$ C. − $\frac{3660}{625}$ Q. + 61. quod æquatur 61. & fit 1 N. $\frac{11437500}{1441125}$ ſeu in minimis $\frac{500}{63}$ Sunt igitur latera cuborum $\frac{248}{63}$ & $\frac{5}{63}$. Ipſi verò cubi $\frac{15252992}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$ quorum interuallum $\frac{15252867}{250047}$ ſeu 61. vt poſtulabatur.

Aliter. Ponatur latus vnius cubi 1 N. − 5. Alterius verò $\frac{25}{16}$ N. − 4. & eadem reperietur ſolutio. Quamobrem ex vtraque operatione hic formatur Canon.

Productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per ſummam cuborum. A maiore quotiente aufer minus latus, à minore quotiente aufer maius latus, relinquentur latera quæſitorum cuborum.

Porrò inde conditionis adiectæ ratio patet argumentando eodem prorſus modo quo ad primam iſtarum factum eſt. Nam ſimiliter oſtendetur ſi maior cubus ſit duplus minoris, minorem quotientem æquari maiori lateri, & ſi maior cubus minoris ſit plus quàm duplus demonſtrabitur minorem quotientem, minorem eſſe maiore latere, ac proinde ſubtractionem huius ab illo fieri non poſſe.

Hinc etiam colligitur modus inueniendi quatuor cubos, vt bini binis ſint æquales. nimirum.

Sume duos numeros, ita vt duplum cubi minoris ſuperet maioris cubum. Deinde ducito minorem numerum tum in duplum cubi maioris multatum cubo minore, tum in ſummam cuborum, fient latera duorum cuborum quæſitorum. Rurſus ducito maiorem numerum, tum in duplum minoris cubi multatum cubo maiore, tum in ſummam cuborum, fient reliquorum cuborum latera.

Ita ſi ſumas numeros 5. & 4. fient cubi à lateribus 744. 756. æquales cubis à lateribus 945. & 15. Et diuidendo omnia latera per 3. erunt cubi à lateribus 248. & 252. æquales cubis à lateribus 315. & 5.

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæſtionis determinationem non eſſe legitimam ſimili quâ vſi in primâ quæſtione ſumus operatione aperiemus.

Imo ex ſupradictis quæſtionem quam Bachetus ignorauit, feliciter conſtruemus, datum numerum ex duobus cubis compoſitum in duos alios cubos diuidere, idque infinitis modis per operationum continuatam vt ſupra monuimus, operationem.

Sint duo cubi quibus alij duo æquales inueniendi 8. & 1. primum ex quæſtione ſecunda quærantur duo cubi quorum differentia æquet ſummam datorum, eruntque $\frac{8000}{343}$ *&* $\frac{4913}{343}$ *Quia duplum minoris excedit maiorem, res deducitur ad tertiam quæſtionem quæ demum reducetur ad primam & conſtabit propoſitio, ſi velis ſecundam ſolutionem rurſus quæſtio redibit ad ſecundam &c.*

Vt autem pateat quæſtionis tertiæ determinationem non eſſe legitimam. datis duobus cubis 8. & 1. inueniendi alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum. Sanè Bachetus impoſſibilem hanc quæſtionem pronuntiaret, cubi tamen duo per noſtram methodum inuenti ſunt ſequentes quorum nempe differentia æquatur 7. differentiæ 8. & 1. cubi autem illi duo, ſunt $\frac{2024284625}{6128487}$ *&* $\frac{1981385216}{6128487}$*. latera ipſorum* $\frac{1265}{183}$ *&* $\frac{1256}{183}$*.*

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt ſumma cuborum ab ipſis ortorum, & productus eorum multiplicatione, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quadrato ſummæ cuborum, auferendo quadruplum cubi producti multiplicationis remaneat quadratus.

Eſto ſumma cuborum 72. productus 8. Pone alterum cuborum 36 + 1 N. alterum 36 − 1 N. Quia igitur productus ex mutuo ductu duorum cuborum æquatur cubo plani ſub lateribus, ſi ducas 36 + 1 N. in 36 − 1 N. fiet 1296 − 1 Q. æqualis 512. Ac proinde 1 N. eſt 28. ſuntque cubi quæſiti 64. & 8. & ipſa latera 4. & 2. Hinc fit Canon.

A quadrato ſemiſſis ſummæ cuborum aufer cubum producti, reſidui latus quadratum adde & adime ſemiſſi ſummæ cuborum, habebis cubos quæſitos.

Vel etiam.

A quadrato ſummæ cuborum aufer quadruplum cubi producti, reſidui latus quadratum adde & adime ſummæ cuborum, aggregati & reſidui ſemiſſes quæſitos exhibebunt cubos.

Vnde patet conditionem propoſitioni adiectam non omnino ſufficere, vt ſolutio contingat rationalis. Sed oportet vt à quadrato ſummæ cuborum auferendo quadruplum cubi à producto, remaneat quadratus, cujus latus addendo & adimendo ſummæ cuborum, aggregati & reſidui ſemiſſes ſint cubi numeri.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum cuborum ab ipſis ortorum, & productus eorum multiplicatione datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadrato interualli addendo quadruplum cubi producti, quadratus fiat.

Eſto interuallum cuborum 56. productus 8 Ponatur alter cuborum 1 N. + 28. alter 1 N. − 28. Ergo productus eorum multiplicatione 1 Q. − 784. æquatur cubo ipſius 8. puta 512. & fit 1 N. 36. Sunt ergo cubi quæſiti 64. & 8. vt prius. Hinc fit Canon.

Quadrato ſemiſſis interualli cuborum adde cubum producti, ſummæ latus quadratum adde & adime ſemiſſi interualli cuborum, fient cubi quæſiti.

Vel etiam.

Quadrato interualli cuborum adde quadruplum cubi producti, ſummæ latus quadratum adde & adime interuallo cuborum, aggregati & reſidui ſemiſſes ſunt cubi quæſiti.

Hîc quoque conditio adiecta non ſufficit, vt ſolutio ſit omnino rationalis. Sed oportet vt quadrato interualli cuborum, addendo quadruplum cubi producti, fiat quadratus cuius latus addendo & adimendo interuallo cuborum, aggregati & reſidui ſemiſſes ſint cubi numeri.

Porrò ex nonnullis harum quæſtionum deducuntur Regulæ Algebræ de cubo affecto ſub latere, vt abundè docuit Vieta noſter libro de Recognitione æquationum.

QVÆSTIO III.

ΕΠΙ τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πλευρὰν πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὴν μὲν πλευρὰν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον πλευρὰν τοῦ κύβου. τετάχθω ὁ μὲν τετράγωνος δ^υ ᾱ. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ς^ο εἷς, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ὢν μ^ο κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ η̄. ˣ. ᶜ. ἐπὶ μὲν οὖν τὸν δ^υ ᾱ. πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν ςς^οὶ η̄. ἐπὶ δὲ τὸν ς^ο ᾱ. πολλαπλασιάσαντες εὑρίσκομεν μ^ο η̄. θέλομεν δὴ τοὺς ςς^οὶ η̄. κυβικὴν εἶναι πλευρὰν τῶν μ^ο η̄. μονάδες ἄρα β̄ ἴσαι ςς^οῖς η̄. * καὶ γίνεται ὁ ς^ο β̄. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ς^ο λβ̄ μ^ο λβ̄. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ^ο μὴ ἐπιτεθεῖναι, εὑρήσομεν ςς^οὶ η̄ ἴσους μ^ο β̄. * καὶ γίνεται ὁ ς^ο ᾱ δ^ˣ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος ᾱ ις^ˣ. ἡ δὲ πλευρὰ ᾱ δ^ˣ. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ὁ λβ. εἰ γὰρ ὁ ς^ο ἐστὶ ᾱ δ^ˣ. τὸ δὲ ἀριθμοστὸν ἐστὶ μ^ο δ̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN quadratum numerum, & in latus eius eundem multiplicare numerum, & facere ex latere quidem, cubum; ex quadrato autem, latus cubi. Ponatur quadratus 1 Q. Erit igitur latus illius 1 N. Qui in hos ducendus eſt, ſit vnitatum cubicarum quotcunque per 1 N. diuiſarum, eſto $\frac{8}{N}$. Hunc igitur ducentes in 1 Q. inueniemus 8. N. adducentes in 1 N. inueniemus 8. volumus itaque 8 N. eſſe latus cubicum de 8. Proinde 2. æquantur 8 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$ Ad poſitiones. Erit quidem quadratus $\frac{1}{16}$. eius latus $\frac{1}{4}$. Qui in illos ducetur erit 32. Si enim 1 N. eſt $\frac{1}{4}$. vtique $\frac{8}{N}$. eſt 4. & demonſtratio euidens.

IN QVAESTIONEM III.

QVÆSTIONES huius tractationem non percepit Xilander, eò quod ſignum Numeri malè hic inſutum putauit, non videns numerum qui ducendus eſt in quadratum, & in eius latus non eſſe ſimpliciter vnitates 8. ſed $\frac{8}{1N}$. Allucinatus autem eſt Xilander, & hic & vbicunque ferè fractiones Numericas adhibuit Diophantus, quia (vt iam monuimus ad duodecimam tertij) huiuſmodi fractiones in textu Græco paſſim ambiguè exprimuntur, vt ex hoc quoque loco colligere eſt. Nam legitur in manu exarato codice, ὁ πολλαπλασιαζόμενος μᾱ. ς^ο τῶν κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ ηη η̄. quæ more noſtro emendauimus ſic, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ὢν μ^ο κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ η^ων ς^ο. Benè autem vidit idem Xilander, vt adulterina expungenda eſſe verba illa. καὶ γίνεται ὁ ς^ο β̄. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ς^ο. λβ. μ^ο λβ. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ^ο μὴ ἐπιτεθεῖναι, εὑρήσομεν ςς^ους μ^ο β̄. quæ idcirco aſteriſcis incluſimus. Cæterùm emendato textu, vt fecimus in noſtra verſione, operatio Diophanti facilis eſt & peſpicua. Vnde huiuſmodi Canon elicitur.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per ſuum cubum, orietur latus quæſiti quadrati. Numerus autem in vtrumque ducendus, eſt quadratocubus ſumpti initio numeri.

Hic etiam deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

In quadratum numerum & in latus eius, multiplicare eundem numerum, & facere ex quadrato cubum, ex latere latus eiuſdem cubi.

Statuatur quadratus 1 Q. erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, eſto quilibet Numerorum numerus cubicus, puta 8 N. Eum ſi in 1 Q. ducas fient 8 C. ſi in 1 N. fient 8 Q. Debent ergo 8 Q. eſſe latus cubicum cubi 8 C. id autem eſt 2 N. Igitur 2 N. æquantur 8 Q. & fit 1. N. $\frac{1}{4}$. Ad poſitiones. Quadratus eſt $\frac{1}{16}$. latus eius $\frac{1}{4}$. Is qui in vtrumque ducitur 2. Hinc formatur huiuſmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per ſuum cubum, orietur latus quadrati quæſiti. Numerus autem in vtrumque ducendus, eſt ſumptus initio Numerus.

Simili artificio ſoluemus quæſtiones ſequentes.

QVÆSTIO PRIMA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex cubo quadrato quadratum, ex latere latus quadrato quadrati.

Sit cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus in vtrumque ducendus ſit vnitatum quotlibet, puta 2. Igitur 2 N. erunt latus quadrato quadraticum de 2 C. ac proinde 16 QQ. æquabuntur 2 C. & fiet 1 N. $\frac{1}{8}$. eruntque quæſiti numeri $\frac{1}{512}$. $\frac{1}{8}$. 2.

Et

Et ſic inuenietur numerus qui ductus in quadrato quadratum, & in latus eius faciat ex quadrato quadrato quadratocubum, & ex latere latus quadratocubi. Ac demum inuenietur numerus qui ductus in quadratocubum & in latus eius, faciat ex quadratocubo cubocubum, & ex latere latus cubocubi. Vnde fit Canon vniuerſalis.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per gradum ipſius, ſimilem ei qui poſtulatur fieri, orietur latus quæſitæ poteſtatis. Numerus autem in vtrumque ducendus, erit ſumptus numerus.

QVÆSTIO SECVNDA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex latere quadratoquadratum, ex cubo latus quadratoquadrati.

Eſto cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus autem in vtrumque ducendus ſit fractio Numerica vnitatum quadratocubocubicarum, puta $\frac{256}{[illegible]}$. fient ergo ex multiplicatione 256. Q. & 256. & ille huius eſſe debet latus quadratoquadraticum, quare 256. Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{8}$ quæſitum latus, igitur cubus eſt $\frac{1}{512}$ Numerus in vtrumque ducendus 2048. ſic quoque inuenietur Numerus qui ductus in quadratoquadratum & in latus eius, faciat ex latere quadratocubum, & ex quadratoquadrato latus quadratocubi. Ac denique reperietur numerus qui ductus in quadratocubum, & in latus eius, faciat ex latere cubocubum, & ex quadratocubo latus cubocubi.

QVÆSTIO IV.

QVADRATO & lateri eius eundem adiicere numerum, & eadem facere. Eſto quadratus 1 Q. ergo latus erit 1 N. Addendus autem eſto tot quadratorum, vt additus ad 1 Q. faciat quadratum, eſto 3 Q. Is adiectus ad 1 Q. facit quadratum 4 Q. Additus autem ad 1 N. facit 3. Q. + 1 N. Hæc æquantur lateri quadrati 4 Q. hoc eſt 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad hypoſtaſes. Erit quadratus $\frac{1}{9}$. latus eius $\frac{1}{3}$ Addendus $\frac{3}{9}$.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος δυ ᾱ. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ςου ᾱ. ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω δυνάμεων τοσούτων, ἵνα μετὰ δυ ᾱ. ποιῇ τετράγωνον, ἔστω δυ γ. αὗται προστεθεῖσαι τῇ μὲν δυ ᾱ. ποιοῦσι τετράγωνον τὸν δυ δ. τῷ δὲ ςῷ ᾱ. ποιοῦσι δυ γ. ςου ᾱ. ταῦτα ἴσα τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τῷ δυ δ. τουτέστι ςοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ςος ᾱ γχ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος ᾱ θχ. ἡ δὲ πλευρὰ ᾱ γχ. ὁ δὲ προστιθέμενος γ̄ θχ.

IN QVAESTIONEM IV.

HIC ποιεῖν τὰ αὐτὰ nil aliud eſt quàm quadrato & lateri eius talem addere numerum, vt hac additione fiant rurſus quadratus & latus eius. Cætera ſunt perſpicua, & ex operatione formatur huiuſmodi Canon.

Duorum quorumlibet numerorum interuallum diuide per interuallum quadratorum, quotientem ducito in minorem numerum, fiet latus quæſiti quadrati. Eiuſdem quotientis quadratum ducito in quadratorum interuallum, fiet addendus numerus.

QVÆSTIO V.

QVADRATO & lateri addere eundem numerum & eadem facere ordine inuerſo. Eſto quadratus 1 Q. latus ergo erit 1 N. Addendus autem vt ex latere quadratum faciat, eſto aliquot quadratorum quadrato numero, cum defectu Numerorum qui ſunt in latere prioris quadrati; eſto itaque 4 Q. − 1 N. & ſi adiiciatur quadrato fit 5 Q. − 1 N. Hæc æquantur 2 N. lateri ſcilicet facti quadrati ex priori additione, & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ τετράγωνος δυ ᾱ. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ςου ᾱ. ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα τῇ πλευρᾷ ποιῇ τετράγωνον. δυνάμεων τετραγωνικῶν λείψει ἀριθμῶν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς. ἔστω δὲ δυ δ̄ λείψει ςου ᾱ. καὶ ἐπεὶ προστεθῇ τῷ τετραγώνῳ, γίνεται δυ ε̄ λείψει ςου ᾱ. ταῦτα ἴσα ςοῖς δυσὶ τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου τοῦ γεγενημένου ἐκ τῆς προσθέσεως. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ εχ. ἐπὶ

τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος ϛ^{κε}. ἡ δὲ πλευρὰ γ^{ε}. ὁ δὲ προστιθέμενος κα^{κε}.

positiones. Erit quadratus $\frac{9}{25}$. latus autem $\frac{3}{5}$. Addendus $\frac{21}{25}$.

IN QVAESTIONEM V.

TA ἐναλλὰξ idem eſt quod reciprocè, ſeu inuerſo ordine, vult enim vt quadrato & lateri addendo eundem numerum, fiat ex latere quadratus, ex quadrato latus quadrati. Operatio euidens eſt, & ex ea elicitur iſte Canon.

Sume quadratum aliquem, & per eum vnitate auctum, diuide latus eius vnitate auctum, orietur latus quæſiti quadrati. At quæſitum quadratum ducito in quadratum initio ſumptum, & à producto aufer latus quæſiti quadrati, reſiduum erit addendus numerus.

QVÆSTIO VI.

KΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβου α̅. ὁ δὲ τετράγωνος δυνάμεων ὅσων δή ποτε τετραγωνικῶν ἔστω δὲ δ^{υ} θ̅. καὶ ἐπεὶ θέλομεν τετράγωνόν τινα μετὰ δ^{υ} θ̅ ποιεῖν τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπό ἐστι μ° θ̅. ἔστω δὴ μ° α̅ καὶ μ° θ̅. ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ τῶν μ° θ̅. τὴν μονάδα, καὶ τῶν λοιπῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιάσω, ἕξω μ° ιϛ̅. ἅτινα προσλαβόντα τὸν θ̅ ποιεῖ τετράγωνον, τάσσω οὖν τὸν προστιθέμενον τετράγωνον δ^{υ} ιϛ̅. κἂν μὲν ταῖς δ^{υ} θ̅ προστεθῇ, γίνεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ τῷ κύβῳ α̅. γίνεται κύβος α̅. δ^{υ} ιϛ̅ ταῦτα ἴσα κύβῳ, ἔστω τοῖς κύβοις η̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ̅^{ζ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος δϙϛ̅^{τμγ}. ὁ δὲ τετράγωνος βτδ^{μθ} ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος αϛκδ̅^{μθ}.

CVbo & quadrato adiicere eundem quadratum, & eadem facere. Eſto cubus 1 C. Quadratus autem quotcunque quadratorum numero quadrato. Eſto itaque 9 Q. Et quia volumus aliquem quadratum adiectis 9 Q facere quadratum, exponamus duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9. puta 9. & 1. Si ergo aufero 1 de 9. & reſidui ſemiſſem in ſe duco habeo 16. qui adſumpto 9. facit quadratum. Pono igitur addendum quadratum 16 Q. Et ſane ſi addatur ad 9 Q. facit quadratum. ſi autem adiiciatur ad 1 C. fit 1 C. + 16. Q. Hæc cubo æquantur. Eſto 8 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad poſitiones. Erit cubus $\frac{4096}{343}$. Quadratus $\frac{2304}{49}$. Addendus autem ipſis quadratus $\frac{1024}{49}$.

IN QVAESTIONEM VI.

MODVS quo hîc inuenit Diophantus quadratum qui ad 9. additus quadratum efficiat, idem eſt prorſus cum Canone vltimo ad vndecimam ſecundi tradito. Cæterùm poſitiones quadrupliciter variari poſſunt.

Primò enim cubus quæſitus ſtatui poteſt quilibet cuborum numerus cubicus, puta 1 C. 8 C. 27. C. &c.

Secundò quadratus quæſitus poni poteſt quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c.

Tertiò addendus quadratus etiam infinitis modis variari poteſt, nam verbi gratia in hypotheſi Diophanti, per vndecimam ſecundi infiniti quadrati reperiri poterant, qui ad 9. additi facerent quadratum.

Denique vltima æquatio inſtitui poteſt cum quolibet cuborum numero cubico maiore quàm cubus initio ſumptus v. g. 1 C. + 16 Q. æquari poſſunt 8 C. 27. C. 64 C. vel cuilibet cuborum numero cubico maiori quàm 1.

QVÆSTIO VII.

KΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ὁ τρίτος καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν προστιθέμενον τε-

CVbo & quadrato addere eundem quadratum, & eadem facere ordine inuerſo. Eſto cubus , primus. Quadratus, ſecundus. Addendus autem quadratus, tertius. Et quia volo addendum qua-

dratum, nempe tertium, additũ quadrato, nempe ſecundo, facere cubum: faciat cubum nempe primum: Ita vt primus ſuperet ſecundum, tertio, nimirum quadrato, cùm tertius quadratus ſit. Iam quoſcunque duos numeros expoſuero, eorum quadrati adiecto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciunt. Debeo ergo expoſitis duobus numeris ponere pro primo ſummam quadratorum (quia primus æqualis eſt duobus quadratis, quæſito, & addendo; qui ſunt ſecundus & tertius) duplum autem producti multiplicationis, pro tertio. Atqui tertius debet eſſe quadratus, quare & duplum producti multiplicationis, quadratum eſſe oportet. Ponatur ergo alter 1 N. alter 2 N. vt duplum producti ſit quadratus. Sumens igitur ſummam quadratorum, ſtatuo primum 5 Q. Tertium vero duplum producti multiplicationis nempe 4 Q. vnde relinquitur ſecundus 1 Q. (quia is vnà cum tertio æquatur primo) ſupereſt vt primus ſit cubus. Proinde 5 Q. æquantur 1 C. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit cubus ſeu primus 125. Quadratus ſeu ſecundus 25. Addendus autem quadratus, ſeu tertius 100. & manifeſta eſt demonſtratio.

γωνον τὸν τρίτον, τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, ποιεῖν κύβον. ποιείτω κύβος τὸν πρῶτον, ὥστε ὁ πρῶτος ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου τῷ τρίτῳ, τουτέστι τετραγώνῳ. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ τετράγωνος. εἰσὶ δὲ αὖ ἐκθῶμαι δύο ἀριθμοὺς, οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι προσλαβόντες τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιοῦσι τετράγωνον. ὀφείλω οὖν ἐκθέμενος δύο ἀριθμοὺς, τοὺς μὲν ἀπ' αὐτῶν τάσσειν τὸν πρῶτον, ἐπεὶ ὁ πρῶτος τοῖς δυσὶ τετραγώνοις ἴσος ἐστὶ τῷ ζητουμένῳ καὶ τῷ προστιθεμένῳ τῷ τρίτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ. τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν τρίτον, ἐστὶ δὲ ὁ τρίτος τετράγωνος. ὥστε καὶ ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἐστι τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ϛ^ος α. ὁ δὲ ϛϛ β. ἵνα ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. λαβὼν οὖν τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους. τάσσω τὸν πρῶτον δυ ε. τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν τρίτον δυ δ. λοιπὸν ἄρα ἔσται τὸν δεύτερον εἶναι δυ α. μετὰ γὰρ τοῦ τρίτου ἴσος ἐστὶ τῷ πρώτῳ. λοιπόν ἐστι τὸν πρῶτον ποιεῖν κύβον. δυ ἄρα ε ἴσαι κυ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κυ ὁ πρῶτος μο ρκε. ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος κε. ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος μο ρ. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM VII.

MAGNO artificio Diophantus ſuas ita inſtituit poſitiones, vt tandem æquatio procedat inter 5 Q. & 1 C. vnde ſequitur primum numerum reperiri cubum, vt poſtulatur. Itemque ſummam ſecundi & tertij cubum conficere, quia ſcilicet fit æqualis primo. Supereſt igitur videre qua ratione reliquis propoſiti partibus ſatisfiat. Nimirum, quomodo ſecundus & tertius ſit vterque quadratus, & ſimul additi ſint æquales primo. Ac demum tertius ipſe primo additus quadratum conſtituat. Hæc autem omnia neceſſariò euenire operando cum Diophanto, ſic demonſtrabimus.

A 2. B 4.
C 20. D 4. E 16.

Sumantur duo quilibet oumeri A B. ita vt duplum producti eorum E ſit quadratus numerus. Et ſumma quadratorum ab ipſis A B ſit C. At numerus quo C ſuperat E ſit D. Dico ſi C ponatur primus D ſecundus E tertius ſatisfactum eſſe omnibus propoſitæ quæſtionis partibus, illa excepta qua requiritur primum C eſſe cubum. Primò enim D E ſimul conficiunt C ex conſtructione. Quare ſi C fiat cubus, erit & ſumma ipſorum D E cubus, vt poſtulatur. Secuodò E quadratus eſt ex conſtructione, nam ſuppono tales ſumptos eſſe A B, vt duplum producti eorum E ſit quadratus, tales autem numeri qui facilè inueniantur infrà docebo. Tertiò ipſum D eſſe quadratum conſtat ex quarta ſecundi poriſmatum. Nam ex ſumma quadratorum C. auferendo E duplum producti, ſupereſt D quadratus interualli laterum. Denique E additum ipſi C facere quadratum concluditur per quartam ſecundi Euclidis, quam ideo aſſumpſit Diophantus. Nam ſumma quadratorum C & duplum producti E ſimul faciunt quadratum ſummæ laterum. Quamobrem patet ex omni parte propoſitum, & reſtat tantùm, vt C cubo æquetur quod facilè fit ſupponendo ipſos C D E nota Q. inſignitos eſſe, vt ſint 20 Q. 4 Q. 16 Q. Tunc enim 20. Q. æquabuntur cuilibet cuborum numero cubico, puta 1. c. 8. c. &c. Inueniuntur autem facilè duo numeri qui bis inuicem ducti quadratum faciant, ſi ſumpto ſemiſſe cuiuſlibet quadrati, quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Ita Diophantus ſumpto 2. ſemiſſe quadrati 4. inuenit numeros 1 & 2. quorum mutuo ductu fit 2. Et nos in ſuperiore diagrammate ſumpto 8. ſemiſſe quadrati 16. inuenimus numeros 2. & 4. quorum mutuo ductu fit 8. Poteramus etiam ſumere 1. & 8. & alios infinitos mutuo ductu producentes 8.

QVÆSTIO VIII.

ΕΣΤΩ κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος. ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν προστιθέμενον τετράγωνον προστιθέντα τῷ δευτέρῳ τουτέστι τετραγώνῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω τὸν πρῶτον. ἐπεὶ δὲ πάλιν θέλω τὸν πρῶτον συντιθέντα τῷ τρίτῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἡ σύνθεσις μετὰ ἑνὸς αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. διὰ τοῦτο δὲ καὶ οἱ δύο τετράγωνοι, ὅτι προστιθέμενος τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ δεύτερος ποιοῦσι κύβον. τουτέστι τὸν πρῶτον. τετάχθωσαν οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος Δ^Υ α. ὁ δὲ δεύτερος μ° δ. καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν μετὰ ἑνὸς αὐτῶν γίνεται Δ^Υ β μ° δ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β ⋔ μ° β. γίνεται ὁ τετράγωνος Δ^Υ δ μ° δ λείψει ςς η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν δ. ὁ δὲ ις. νῦν τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον αὐτοῖς τετράγωνον Δ^Υ ις. τὸν δὲ δεύτερον Δ^Υ δ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται Δ^Υ κ. θέλομεν γὰρ συναμφοτέρῳ εἶναι αὐτὸν ἴσον. λοιπὸν δεῖ Δ^Υ κ ἴσας εἶναι Κ^Υ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ͵η. ὁ δὲ δεύτερος ͵αχ. ὁ δὲ προστιθέμενος ͵ςυ. τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

ESTO cubus, primus: Quadratus, ſecundus: at adiiciendus quadratus, tertius. Quia igitur volo quadratum adiiciendum, additum ſecundo, hoc eſt quadrato facere cubum, faciat primum. Rurſus itaque quia volo primum additum tertio, facere quadratum, id mihi oneris incumbit, vt inueniam duos quadratos, quorum ſumma cum altero ipſorum coniuncta quadratum exhibeat, & præterea duo quadrati addendus ſcilicet ſecundo, & ipſe ſecundus ſimul faciant cubum, videlicet primum. Ponantur duo quadrati, primus quidem 1 Q. ſecundus 4. & ſumma ipſorum cum altero iuncta facit 2 Q. + 4. æqualem quadrato à latere 2 N − 2. fitque quadratus 4 Q. + 4 − 8 N. & fit 1 N. 4. Ad poſitiones. Erit alter 4. alter 16. Nunc ergo ſtatuo quadratum addendum 16 Q. ſecundum autem 4 Q. Primus ergo erit 20. Q. quia volumus eum ambobus æqualem eſſe. Supereſt vt 20 Q. æquentur 1 C. & fit 1 N. 20. Ad poſitiones. Erit primus 8000. ſecundus 1600. tertius addendus 6400. & infinitis modis ſoluitur quæſtio.

IN QVAESTIONEM VIII.

EADEM eſt hæc quæſtio cum præcedente. Sed operatio pauló diuerſa lemma quod aſſumit Diophantus ad inueniendum duos quadratos, quorum ſumma adſcito altero ipſorum quadratum faciat, poterat reduci ad vndecimam ſecundi, ſi propoſitum fuiſſet hoc modo. Inuenire duos quadratos, quorum interuallum ſit duplum alicuius quadrati. Hoc enim idem eſſe manifeſtum eſt: Quia cùm ſummæ quadratorum addetur alter, hoc aggregatum continebit additum bis, & alterum ſemel. Portò ex operatione formatur huiuſmodi Canon.

Sume duos quadratos quorum ſumma cum altero ipſorum quadratum faciat. Horum ſumma cubus eſt primus quæſitorum. Eiuſdem ſumma quadratus ductus in ſumptos quadratos, dat reliquos numeros.

QVÆSTIO IX.

ΚΥΒΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ προστιθέμενος ς° α. ἡ δὲ τοῦ κύβου πλευρὰ ςς ὅσων δήποτε. ἔστω ςς β. ὁ ἄρα κύβος ἐστὶ Κ^Υ η. ἐὰν ἄρα ς° α προστεθῇ ςς^οῖ β. γίνονται ςς^οὶ γ, ἐὰν δὲ τοῖς Κ^Υ η. γίνεται Κ^Υ η ς° α. ταῦτα ἴσα Κ^Υ κζ. ἀφῃρήσθωσαν οἱ Κ^Υ η. λοιποὶ ἄρα Κ^Υ ιθ. ἴσοι ςῷ ἑνί. πάντα παρὰ ς° Δ^Υ ἄρα ιθ. ἴσαι μ° α. καὶ ἔστι ἡ μία μονὰς τετράγωνος. εἰ δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ιθ Δ^Υ ἦν τε-

CVBO & lateri eius eundem addere numerum, & eadem facere. Sit addendus numerus 1 N. latus verò cubi Numerorum quotlibet. Eſto 2 N. Ergo cubus eſt 8 C. Iam ſi 1 N. addatur ad 2 N. fiunt 3 N. ſi ad 8 C. fit 8. C. + 1 N. hæc æquantur 27 C. Auferantur vtrinque 8 C. relinquuntur 19 C. æquales 1 N. Omnia per numerum diuidantur 19 Q. æquantur 1. & eſt vnitas quadratus & ſi 19. nu-

merus quadratorum quadratus eſſet, explicari æquatio poſſet. Sed 19 Q. proueniunt ab exceſſu quo 27 C. ſuperant 8 C. & 27. C. eſt cubus à latere 3 N. At 8 C. eſt cubus a latere 2 N. Proinde 19 Q. facti ſunt ex exceſſu quo cubus à 3 N. ſuperat cubum à 2 N. Atqui 2 N. habentur ex poſitione, & 3 N. fiunt vnitate addita ad ipſos poſitionis numeros. Eò ergo res redit, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, vt interuallum cuborum ab ipſis, ſit quadratus numerus. Eſto alter 1 N. alter 1 N. + 1. & interuallum cuborum eſt 3 Q. + 3 N. + 1. Hæc æquantur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad poſitiones. Erit alter 7. alter 8. Iam redeo ad poſtulata ab initio, & pono adiiciendum numerum 1 N. latus autem cubi 7 N. Igitur cubus erit 343 C. & ſi 1 N. vtrique adiiciatur, facit hunc quidem 8 N. illum verò 343 C. + 1 N. Volumus ergo hunc eſſe cubum, cujus latus ſit 8 N. Quare 512 C. æquantur 343 C. + 1 N. & 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad poſitiones. Erit cubus $\frac{343}{2197}$. latus autem $\frac{7}{13}$. Adiiciendus $\frac{1}{13}$.

τράγωνος λέλυτο ἂν ἡ ἰσότης. ἀλλ' αἱ δυ ιθ. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ἧς ὑπερέχουσι κυ κζ. κυ η. καὶ αἱ μὲν κυ κζ. ἀπὸ ςς γ. κύβος εἰσίν. αἱ δὲ κυ η ἀπὸ ςς β. κυ ἐστὶ. ὥστε τὰ ιθ γίνονται ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ ἀπὸ ςς γ κύβος, τοῦ ἀπὸ ςς β κύβου. ἀλλ' οἱ μὲν ςςοι β. τῆς ὑποθέσεως εἰσίν, οἱ δὲ τρεῖς ἀεὶ μονάδι μείζονες τοῦ τυχόντος πλήθους τῶν τεθέντων ςς. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν β ἀριθμοὺς μονάδι ᾱ ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν ςος ᾱ. ὁ δὲ ςος ᾱ. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ἐστὶ δυ γ. ςς γ. μο ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μο ᾱ. λείψει ςς β. καὶ γίνεται ὁ ςος μο ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ. ὁ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. καὶ τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον ςς ᾱ. τὴν δὲ τοῦ κύβου πλευρὰν ςςων ζ. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κυ τμγ. καὶ ὁ ςος ᾱ. προστεθεὶς ἑκατέρῳ αὐτῶν ποιεῖ, ὃν μὲν ςς η. ὃν δὲ κυ τμγ. ςος ᾱ. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι κύβον πλευρὰν ἔχοντα ςςων η. κυ ἄρα φιβ. ἴσοι κυ τμγ. ἀριθμῷ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ςος ᾱ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κυ τμγ. ͵βρϟζ. ἡ δὲ πλευρὰ ζ. ιγ. ὁ δὲ προστιθέμενος ᾱ ιγ.

IN QVAESTIONEM IX.

VERBA Diophanti perſpicua ſunt, & ad erudiendum aptiſſima. Cùm enim in prima operatione poſitionibus ad libitum factis, ad æquationem inexplicabilem deueniatur, vbi 19 Q. æquantur 1. & ſolutio eſt irrationalis, repetitis analyſeos veſtigiis conſiderat vnde 19. prouenerit, ſit quippe ex interuallo cuborum 8. & 27. vnde rectè infert quærendos eſſe duos cubos quadrato diſtantes, ita vt & cuborum latera vnitate diſtent. Quod tamen lemma poterat etiam vniuerſalius proponi, nimirum ſic.

Duos cubos inuenire quorum interuallum ſit quadratus Numerus, & quorum latera diſtent etiam quadrato numero.

Sit vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 4. vt laterum interuallum ſit quadratus numerus, erit cuborum interuallum 64 + 12 Q. + 48 N. quod æquatur quadrato. Fingatur eius latus 6 N − 8. fiet 1 N. 6. Erunt ergo cuborum latera 6. & 10. Ipſi cubi 216. & 1000. quorum interuallum 784. quadratus à latere 28. Huius autem lemmatis ope licebit etiam variare poſitionem numeri adiiciendi, nam poni poterit quilibet Numerorum numerus quadratus. Verbi gratia ponatur 4 N. Quærendi ergo erunt duo cubi, vt laterum interuallum ſit 4. & cuborum interuallum ſit quadratus numerus. Hi ſunt per allatum lemma 6. & 10. Quare ponetur quæſiti cubi latus 6 N. ipſe cubus 216 C. & vtrique adiiciendo 4 N. fient 10. N. & 216. C. + 4 N. quorum hic cubus eſſe debet, ille vero latus huius cubi. Igitur 216 C. + 4 N. æquantur 1000. C. & tandem 4 N. æquantur 784 C. & fit 1 N. $\frac{1}{14}$. Eſt igitur cubi quæſiti latus $\frac{3}{7}$ ipſe cubus $\frac{27}{343}$. Adiiciendus verò numerus $\frac{2}{7}$ quo vtrique addito fiunt $\frac{5}{7}$ & $\frac{125}{343}$ Cubus ſcilicet & latus eius.

Cæterùm licebit etiam ſoluere huiuſmodi quæſtiones ad hanc materiam pertinentes.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi quadrato diſtent numero.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera Cuborum 1 N. & 2 N. erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadrato. Eſto is quilibet numerus Quadratorum quadratus, puta 49 Q.

fiet 1 N. 7. Sunt igitur latera cuborum 7. & 14. & ſatisfaciunt propoſito.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi diſtent numero quadratoquadrato.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera cuborum 1 N. & 2 N. Erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadratoquadrato. Eſto is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus, puta 1 QQ. fit 1 N. 7. & ſunt latera cuborum vt prius 7. & 14.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos cubos quadrato diſtantes, quorum latera diſtent cubo numero.

Sit vnius cubi latus 1 N. alterius verò 1 N. + quolibet cubocubo puta 1 N. + 64. erit cuborum interuallum 262144 + 12288 N. + 192 Q. æquale quadrato, fingatur eius latus 512. – 14 N. fiet quadratus 262144 – 14336 N. + 196 Q. & fiet 1 N. 6656. Sunt igitur cuborum latera 6656. & 6720. quorum interuallum eſt cubus 64. Sunt autem cubi 294876348416 & 303464448000. quorum interuallum 8588099584. quadratus eſt à latere 92672.

Eodem artificio inuenientur duo cubi quadrato diſtantes, quorum latera diſtent cubocubo, erunt enim iidem proximè inuenti. Similiter inuenientur duo cubi quadrato diſtantes, quorum latera diſtent quadratoquadrato, ſi ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + quolibet quadratoquadrato, puta 1 N. + 16. Ac demum inuenientur duo cubi quadrato diſtantes, quorum latera diſtent quadratocubo, ſi ponatur vnius latus 1 N. Alterius verò 1 N. + quolibet numero quadrato ſimul & quadratocubo, puta 1 N. + 1024.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Interuallum autem laterum ſit datus numerus.

Eſto interuallum laterum 3. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 1 N. + 3. erit cuborum interuallum 27. + 27 N. + 9 Q. quod cùm ad 3. debeat habere rationem quadrati ad quadratum, diuiſo eo per 3. fiet 9 + 9 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 – 2 N. fiet 1 N. 21. Sunt ergo cuborum latera 21 & 24. & ſatisfit propoſito.

Huius vltimæ quæſtionis auxilio vniuerſalius adhuc quàm per lemmata ſuprà tradita ſoluetur Diophantæum problema. Licebit enim adiiciendum numerum ponere quemlibet Numerorum numerum, puta 3 N. ſed tunc quærendi erunt duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ſit vt quadratus ad quadratum. Interuallum autem laterum ſit 3. & reperientur qui ſuprà. Quare ponetur latus cubi 21 N. ipſe cubus 9261 C. quibus ſi addas ſigillatim 3 N. fient 24 N. & 9261 C. + 3 N. quorum ille iſtius latus cubicum eſſe debet. Quare 13824 C. æquantur 9261 C. + 3 N. & tandem 4563. C. æquantur 3 N. & fit 1 N. $\frac{1}{39}$. Eſt igitur latus cubi $\frac{7}{13}$ vt apud Diophantum, & adiiciendus numerus $\frac{1}{13}$. Et hîc aduertè inuentis ſemel duobus cubis, quorum interuallum ad laterum interuallum ſit vt quadratus ad quadratum, ſi ſumantur duo alij quicunque numeri in eadem cum lateribus ratione, interuallum quoque cuborum ab ipſis ortorum fore ad ipſorum numerorum interuallum vt quadratus ad quadratum. Ita quoniam 1000. & 216. interuallum 784. ad laterum 10. & 6. interuallum 4. eſt vt quadratus ad quadratum, ſi loco ipſorum 6. & 10. ſumas 3. & 5. cuborum quoque 27. & 125. interuallum 98. ad laterum interuallum 2. eſt vt quadratus 49 ad quadratum 1. cuius rei demonſtratio ex iis quæ ad ſequentem oſtendemus, liquidò conſtabit.

QVAESTIO X.

Κύβῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η κυ. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ςς β. τετάχθω δὲ ὁ προστιθέμενος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε λειψάντων τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰν ἔστω δὴ κυ κζ. λείψει ςς β. καὶ ἐπὶ μὲν τοὺς ςς β προστεθῶσι, ποιοῦσι κυ κζ. καὶ ἔστιν ὁ κύβος ἀπὸ

Cvbo & lateri eundem addere numerum, & eadem facere ordine inuerſo. Eſto cubus cuborum cubicorum quotlibet verbi gratia 8 C. Igitur latus erit 2 N. Ponatur autem adiiciendus, alius cuborum numerus cubicus, minus latere prioris cubi, eſto itaque 27 C. – 2 N. & ſi addatur ad 2 N. fiunt 27 C. qui eſt

bus à latere 3 N. ſi autem addatur ad 8 C. fiunt 35. C. — 2 N. volumus autem hæc eſſe latus cubicum factorum 27 C. hoc eſt 3 N. Proinde 35 C. — 2 N. æquantur 3 N. & fiunt 5 N. æquales 35 C. & ſi omnia per numerum diuidantur 35 Q. æquantur 5. & non contingit ſolutio rationalis, propterea quod ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quam quadratus ad quadratum. Sed 35 Q. eſt ſumma duorum cuborum, ipſius 27. & ipſius 8. vnitates verò 5. eſt ſumma laterum ipſorum. Res itaque eò deducta eſt, vt inueniendi ſint duo cubi, quorum ſumma ad ſummam laterum ipſorum rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sunto latera illorum coniuncta vnitatum quotlibet, verbi gratia 2. & ponatur prioris cubi latus 1 N. Igitur alterius latus erit 2 — 1 N. & cubi illorum iuncti faciunt 6 Q. + 8 — 12 N. volumus ergo hæc ad laterum ſummam, hoc eſt ad 2. habere rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Atqui 2. duplum eſt quadrati. Quare & 6 Q. + 8 — 12 N. duplum oportet eſſe quadrati. Semiſſis igitur, nempe 3 Q. + 4 — 6 N. æquatur quadrato. Eſto quadrato à latere 2 — 4 N. & fit 1 N. $\frac{10}{13}$. Ad poſitiones. Erit alterū latus $\frac{10}{13}$, alterum $\frac{16}{13}$. Tollo decimas tertias, & ſemiſſes ipſorum capio, fiunt cuborum latera 5. & 8. Venio ad propoſitum ab initio, & pono cubi latus 5 N. cubus ergo eſt 125 C. Addendum verò ſtatuo cubum à latere 8 N. minus latere prioris cubi, nimirum 512 C. — 5 N. & additus quidem ad 5. N. facit cubum, additus verò ad 125 C. facit 637 C. — 5 N. Volumus ergo hæc eſſe latus cubicum de 512 C. Quare 8 N. æquantur 637 C. — 5 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad poſitiones. Erit cubus $\frac{125}{343}$. latus verò $\frac{5}{7}$. At numerus adiiciendus $\frac{267}{343}$.

πλευρᾶς ςς γ. ἐὰν δὲ τοῖς κ^υ η. ποιοῦσι κ^υ λε. λείψει ςς β. θέλομεν δὴ ταῦτα πλευρὰν εἶναι κυβικὴν τῶν γινομένων κ^υ κζ. τουτέστι ςς^{ῶν} γ. κ^υ ἄρα λε λείψει ςς β. ἴσοι ςς^{οῖς} γ. καὶ γίνονται ςς^{οὶ} ε. ἴσοι κ^υ λε. καὶ πάντα παρὰ ς^ν. δ^υ ἄρα λε. ἴσαι μ^ο ε. καὶ γίνεται ὁ ς^ος οὐ ῥητὸς, διὰ τὸ μὴ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλ᾽ αἱ μὲν δ^υ λε. σύνθεσίς εἰσι δύο κύβων τοῦ τε κζ. καὶ τοῦ η. αἱ δὲ μ^ο ε. ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους οἳ συντεθέντες πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας λόγον ἕξουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν συντεθεῖσαι μονάδες ὅσαι δήποτε. ἔστωσαν δὲ β. καὶ τετάχθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^ο α. ἡ ἄρα τοῦ ἑτέρου ἔσται μ^ο β λείψει ἀριθμοῦ α. καὶ οἱ αὐτῶν κύβοι συντεθέντες ποιοῦσι δυνάμεις ς μ^ο η λείψει ςς ιβ. θέλομεν οὖν ταῦτα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, τουτέστι πρὸς μονάδας β λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ εἰσὶ δύο μονάδες διπλάσιαι τετραγώνου. ὥστε καὶ δ^υ ς μ^ο η λείψει ςς ιβ. διπλάσιαί εἰσι τετραγώνου. τὸ ἄρα ἥμισυ αὐτῶν ἴσον τετραγώνῳ. τουτέστι δ^υ γ μ^ο δ λείψει ςς ς. ἴσαι γίνονται τῷ ἀπὸ μ^ο β ↑ ςς δ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος ι^{ιγ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ μὲν ι^{ιγ}. ἡ δὲ ιϛ^{ιγ}. αἴρω τὰ τρισκαιδέκατα, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῶν λαμβάνω, γίνονται τῶν κύβων αἱ πλευραί, ἡ μὲν ε. ἡ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. καὶ τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ςς ε. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κ^υ ρκε. ὁ δὲ προστιθέμενος κύβος ἀπὸ τῶν η ςς λείψει τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου κύβου. τουτέστι κ^υ φιβ λείψει ςς ε. καὶ προστεθεὶς ἀριθμοῖς ε ποιεῖ κύβον. τοῖς δὲ κ^υ ρκε. ποιεῖ κ^υ χλζ λείψει ςς ε. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι πλευρὰν κ^υ φιβ. ἀριθμοὶ ἄρα η ἴσοι εἰσὶ κ^υ χλζ ↑ ςς ε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ζ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος ρκε^{τμγ}. ἡ δὲ πλευρὰ ε ζ. ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς σξζ^{τμγ}.

IN QVAESTIONEM X.

IPSO initio Græca deprauatiſſima erant. Nam legebatur, κύβον καὶ πλευρὰν προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, pro quo repoſui, κύβῳ καὶ πλευρᾷ, &c. Deinde legebatur, ἔστω ὁ μὲν κύβος μονάδων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η. pro quo repoſui, κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ κ^υ η. Præterea deerant multa, quæ omnino flagitante ſententia fuerunt adiicienda, quæ omnia more noſtro virgulis incluſimus. Denique denominatores paſſim omiſſi erant quos reſtituimus.

Porrò manifeſtum eſt quæſtionem pendere à lemmate quod aſſumit Diophantus, quo ſcilicet

quærit duos Cubos, quorum ſumma ad ſummam laterum ſit vt quadratus ad quadratum. Quod quia ſequenti quoque quæſtioni inſeruit, & multa ſunt notatu digna in eius enodatione, pluribus à nobis explicabitur.

Aduerte igitur primò laterum ſummam poni potuiſſe non ſolùm 2. vt fecit Diophantus, ſed & quemlibet vnitatum numerum, puta 3. 4. 5. &c.

Aduerte ſecundò ſummam cuborum 6 Q. + 8 − 12 N. diuidi per laterum ſummam 2. & quotientem 3 Q. + 4 − 6 N. æquari quadrato. Quia ſumma cuborum & ſumma laterum debent eſſe plani ſimiles. At ex duorum planorum ſimilium mutua multiplicatione vel diuiſione quadratum fieri manifeſtum eſt.

Aduerte tertiò non potuiſſe fingi latus ipſius 3 Q. + 4 − 6 N. niſi vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus fuiſſet; vt in ſimili iam ſæpe docuimus. Quare videndum quomodo vnitatum numerus 4. inueniatur quadratus, ne caſu non arte certa id fieri putetur. Proueniunt autem vnitates 4. ex cubo 8. diuiſo per ſuum latus 2. Quamobrem cùm quolibet cubo per latus ſuum diuiſo, oriatur quadratus ab eodem latere, patet vtique propoſitum.

Aduerte quartò cautè admodum formandum eſſe latus ſupradicti numeri 3 Q. + 4 − 6 N. Etenim cùm alterum laterum poſitum ſit 2 − 1 N. patet valorem Numeri debere eſſe minorem quàm 2. ſit autem valor Numeri, à quodam quadrato ſubtrahendo ternarium, & per reſiduum diuidendo quadruplum lateris multatum ſenario. Quare ſi ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. patet $\frac{4 N. - 6}{1 Q. - 3}$ debere eſſe minus quàm 2. At proinde 4 N. − 6. minus ſunt quàm 2. Q. − 6. & tandem 4 N. minore, eſſe debent quàm 2 Q. At ſi æquarentur fieret 1 N. 2. Igitur patet quæſiti quadrati latus maius eſſe debere quàm 2. Quare ipſius 3 Q. + 4 − 6 N. latus fingendum erit à 2 − quotlibet numeris, quorum multitudo ſit maior quàm 2. ſic Diophantus finxit hoc latus 2 − 4 N. & fingi poſſet 2 − 5 N. 2. − 6 N. &c.

Præterea cauendum eſt ne cuborum latera æqualia reperiantur, atque adeo ne ipſi cubi ſint æquales, quamuis enim ſi hoc accidat, lemma propoſitum nihilominus ſoluatur, quia quilibet cubus ad ſuum latus rationem habet quadrati ad quadratum, cùm inter eos cadat medius proportionalis quadratus ab eodem latere, ac proinde duplum cubi ad duplum lateris ſit in eadem ratione, attamen per huiuſmodi æquales cubos quæſtio propoſita nequit commodè explicari, quoniam reſoluendo hypoſtaſes numerus additius inuenitur nihilum. Quamobrem non temerè additum eſt in textu. *Ponatur adiiciendus alius cuborum numerus*, &c. Etenim ponatur verbi gratia cubus quæſitus 8 C. cuius latus 2 N. & ponatur addendus numerus 8 C. − 2 N. patet tandem æquationem procedere inter 16 C. & 4 N. ſeu inter 16 Q. & 4 vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$ per quem reſoluendo hypoſtaſes fit cubus quæſitus 1. latus 1. Addendus verò numerus fit 1 − 1. id eſt nihil. Idemque ſemper eueniet, ſi in additio numero ponatur idem cuborum numerus qui ponitur pro cubo quæſito, vt facilè eſt demonſtrare, quia hypoſtaſis additij numeri eſt ſemper in hoc caſu numerus ille cuborum cubicus, minus ſuo latere. Quare cùm ita operando cubus ſemper inueniatur 1. ac proinde latus 1. neceſſe eſt additicium numerum eſſe 1 − 1. Ne igitur in hoc abſurdum deueniamus, cauendum eſt in lemmatis ſolutione ne quæſiti cubis æquales reperiantur, hoc eſt ne valor Numeri ſit æqualis ſemiſſi ſummæ laterum, vt in hypotheſi Diophanti vbi ſumma laterum ponitur 2. cauendum eſt ne valor Numeri ſit 1. ſit autem valor Numeri, vt iam oſtenſum eſt $\frac{4 N. - 6}{1 Q. - 3}$ hoc ergo non debet æquari vnitati, ſed ſi ponatur æquari vnitati, fient 4 N. − 6. æquales 1 Q. − 3. & tandem 4 N. æquabuntur 1 Q. + 3. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. 3. Quamobrem ad vtramque cautionem ſimul reſpiciendo fingendum eſt latus quadrati 3 Q. + 4 − 6 N. à 2. − tot Numeris qui excedant 2. dum non ſint 3.

Aduerte poſtremò cur Diophantus inuentis cuborum lateribus $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ adiiciat denominatorem, & ſumat ſemiſſes Numeratorum, eam non eſſe cauſam quam affert Xilander, hæc enim ex parte nil aliud eſt quàm manifeſta petitio principij; ex parte verò neſcio quid ad rem prorſus impertinens. Nam quod loco ipſorum $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ ſumantur ſemiſſes eorum, nempe $\frac{5}{26}$ & $\frac{4}{13}$ eam dicit eſſe cauſam quod oporteat eorum cubos æquari quadrato, quod ſanè non facit ad rem, non enim quæruntur duo Numeri, quorum cubi ſimul æquentur quadrato, ſed quorum cubi ſimul ad ipſorum numerorum ſummam ſint in ratione quadrati ad quadratum. Deinde quòd adiecto communi denominatore, ſumantur numeratores 5. & 8. eam reddit rationem quod denominator communis eſt, vt ſi de cubis numeratorum conſtet eos ad ipſorum numeratorum ſummam habere rationem quadrati ad quadratum, abundè ſit rei ſatisfactum. Hoc verò eſt petere principium, cùm hoc vnum ſit quod controuertitur, non enim oſtendit cubos numeratorum ad laterum ſummam eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Atqui certum eſt cubos ipſorum $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ ad vnitatem quæ eſt ſumma ipſorum, longè diuerſam rationem habere, ea quam habent cubi numerorum 5. & 8. ad ſummam ipſorum 13. quamuis ſit vtrobique ratio quadrati ad quadratum. Huius ergo rei cauſam adæquatam afferemus hoc demonſtrato Theoremate.

Si fuerint duo numeri, quorum cubi ſimul ad ſummam numerorum rationem habeant

beant quadrari ad quadratum, ſi ſumantur alij duo numeri in eadem ratione, circa illos, ipſorumque cubos idem eueniet.

C 125.		A 5.	
D 512.		B 8.	
			R 2
F 637.	G 91.	E 13.	
			S 4.
L 1000.		H 10.	T 8.
M 4096.		K 16.	
P 5096.	Q 364.	N 16.	

Sint duo numeri A B. quorum cubi C D. & ipſorum C D ſumma eſto F. ipſorum A B. ſumma eſto E ſintque F E plani ſimiles, ſumanturque H K in ratione ipſorum A B. & ſint eorum cubi L M. quorum ſumma P. ipſorum verò H K ſumma eſto N. Dico ipſos quoque P N. eſſe planos ſimiles, ſumatur R denominator rationis ipſorum H K. ad ipſos A B. ita vt ducto R in ipſos A B. fiant H K. & ſit S quadratus ipſius R. & T. eiuſdem cubus. Patet ergo ex cubo T in cubos C D. fieri etiam cubos L M. At quia ex R in A B. fiunt H K. ex eodem R in E ſummam ipſorum A B. fiet vtique N. ſumma ipſorum H K. Eademque de cauſa ex T in F. fiet P. Itaque quoniam F E ponuntur plani ſimiles, [1] cadet inter eos vnus medius proportionalis, eſto is G. quo ducto in S fiat Q. Igitur quia F G E ſunt continuè proportionales, & ipſi quoque R S T. continuè proportionales ſunt, & ex primo R. in primum F. fit P. At ex ſecundo S in ſecundum G fit Q. Ac demum ex tertio T in tertium E fit N, [2] erunt & ipſi P Q N. continuè proportionales. Quare cùm inter ipſos P. N. cadat vnius medius proportionalis Q. [3] ſunt ipſi P N. plani ſimiles. Quod demonſtrandum erat.

[1] 18. *octaui.* [2] 14. 1. *poriſm.* [3] 20. *octaui.*

Hinc patet cur loco ipſorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ ſumantur 5. & 8. quia ſcilicet hi ſunt in eadem ratione cum illis, quia fiunt ducendo vtrumque in 13. tum productos 10. & 16. diuidendo per 2. Hinc etiam conſtat demonſtratio eius quod diximus ad quartam earum quas attulimus ad præcedentem, nimirum. *Si fuerint duo numeri quorum interuallum ad interuallum cuborum ab ipſis ortorum ſit in ratione quadrati ad quadratum, idem eueniet aliis quibuſcunque numeris in eadem ratione ſumptis.* Nam eadem ratione oſtendetur ex R in interuallum ipſorum A B fieri interuallum ipſorum H K. & ex T in interuallum cuborum C D. produci interuallum cuborum L M. & rurſus ex S in medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum C D. & interuallum laterum A B procreari medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum L M. & interuallum laterum H K. Quamobrem eodem argumento concluderet propoſitum.

Porro loco lemmatis à Diophanto aſſumpti, licebat aſſumere aliud lemma ſimile illi quo vſus eſt ad præcedentem, nimirum.

Inuenire duos cubos, quorum ſumma ſit quadratus numerus, & laterum ſumma ſit etiam quadratus numerus.

Ponatur laterum ſumma 4. vt ſit quadratus, & ſit alterum 1 N. alterum 4 − 1 N. Erit ſumma cuborum 64. + 12 Q. − 48 N. æqualis quadrato, cuius latus fingetur 8 − tot Numeris vt fiat valor Numeri minor quàm 4. dum is non ſit 2. ob cauſas ſuprà explicatas aduertendo quarto. Quare ſimili artificio determinando numerum hunc Numerorum in latere fictitio ponendum inueniemus eum maiorem eſſe debere quàm 4. dum non ſit 6. Ponatur ergo latus fictitium 8 − 12 N. fiet quadratus 64 + 144 Q. − 192 N. æqualis 64 + 12 Q. − 48 N. & fit 1 N. $\frac{12}{11}$ Sunt igitur cuborum latera $\frac{12}{11}$ $\frac{32}{11}$ quorum ſumma 4. Ipſi verò cubi $\frac{1728}{1331}$ & $\frac{32768}{1331}$ quorum ſumma $\frac{3136}{121}$ quadratus à latere $\frac{56}{11}$. Itaque ſi libeat his vti cubis ad ſoluendum problema Diophantæum pones cubum quæſitum $\frac{1728}{1331}$ C. cuius latus $\frac{12}{11}$ N. additicius numerus erit $\frac{32768}{1331}$ C. − $\frac{12}{11}$ N. quem addendo lateri fit cubus $\frac{32768}{1331}$ C. & eum addendo cubo fit $\frac{3136}{121}$ C − $\frac{12}{11}$ N. æqualis $\frac{12}{11}$ N. Quare tandem $\frac{3136}{121}$ Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{11}{28}$. Eſt ergo latus cubi quæſiti $\frac{3}{7}$ ipſe cubus $\frac{27}{343}$ Numerus additicius $\frac{365}{343}$ & conſtat.

Hic etiam poſſumus afferre nonnullas quæſtiones ad inſtar earum quas ad præcedentem attulimus videlicet.

QVÆSTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi ſimul quadratum conficiant.

Eſto data ratio tripla, ſit vnus 1 N. alter 3 N. horum cubi ſimul conficiunt 28 C. quod æquatur quadrato. Sit is quilibet numerus quadratorum quadratus, puta 196 Q. fit 1 N. 7. Sunt ergo quæſiti numeri 7. & 21. quorum cubi 343. & 9261. quorum ſumma 9604. quadratus eſt à latere 98.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi ſimul quadrato quadratum conficiant.

Eſto data ratio dupla, ſit alter 1 N. alter 2 N. horum cubi ſimul conficiunt 9. C. æquales quadratoquadrato. Sit is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus puta 1 Q Q. fit 1

N. 9. Sunt ergo quæſiti numeri 9. & 18. quorum cubi 729. & 5832. quorum ſumma 6561. quadratoquadratus eſt à latere 9.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros cubum ſimul conficientes, quorum cubi ſimul quadratum faciant.

Ponatur ſumma quæſitorum Numerorum numerus cubocubus, puta 64. & ſit alter 1 N. alter 64 − 1 N. horum cubi faciunt 262144 + 192 Q. − 12288 N. quod æquatur quadrato, cuius latus debet fingi 512. − tot Numeris, vt valor Numeri repetiatur minor quàm 64. Quare per artificium traditum aduertendo quarto, inuenietur hanc Numerorum multitudinem quæ ponenda eſt in latere fictitio, maiorem eſſe debere quàm 16. fingatur ergo huiuſmodi latus 512 − 18 N. fiet 1 N. $\frac{512}{11}$. Sunt igitur quæſiti numeri $\frac{512}{11}$ & $\frac{192}{11}$ quorum ſumma 64. At eorum cubi ſunt $\frac{134217728}{1331}$ $\frac{7077888}{1331}$ quorum ſumma $\frac{141295616}{1331}$ ſeu in minimis $\frac{12845056}{121}$ quadratus eſt à latere $\frac{3584}{11}$.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ἴσους ταῖς ἰδίαις πλευραῖς. ἔστωσαν δὴ αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἐν ἀριθμοῖς. ἡ μὲν ἀριθμῶν β̄. ἡ δὲ ςς̄ γ̄. οἱ ἄρα κύβοι συντεθέντες ποιήσουσι κ^υ λε̄ ἴσους ταῖς πλευραῖς, τουτέστιν ἀριθμοῖς ε̄. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. δυνάμεις ἄρα λε̄ ἴσαι μ° ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς° οὐ ῥητός. ἀλλ᾽ αἱ δ^υ λε̄ σύνθεσίς εἰσι κύβων δύο, τοῦτ᾽ ἔστι η̄ καὶ τοῦ κζ̄. οἱ δὲ ςς^οι ε̄ συντεθεισῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν κύβους δύο οἳ συντεθέντες καὶ μερισθέντες εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν ποιῶσι τὴν παραβολὴν τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ςς̄ η̄. ἡ δὲ ςς̄ ε̄. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, ἣν μὲν ςς̄ η̄. ἣν δὲ ςς̄ ε̄. καὶ οἱ κύβοι συντεθέντες γίνονται κ^υ χλζ̄. ταῦτα ἴσα ταῖς πλευραῖς τουτέστιν ςς^οις ιγ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° α̅ ^ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ε̄ ^ζ. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου η̄ ^ζ αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν ρκε̄ ^τμγ. ὃς δὲ φιβ̄ ^τμγ.

INVENIRE duos cubos ſuis æquales lateribus. Statuantur cuborum latera in numeris, alterum 2 N. alterum 3 N. Ipſi ergo cubi coniuncti facient 35 C. æquales ſummæ laterum, hoc eſt 5. N. & omnia per numerum diuidantur. Igitur 35 Q. æquantur 5. Et non fit numerus rationalis. Atqui 35 Q. ſumma ſunt duorum cuborum 8. & 27. & 5. N. eſt ſumma laterum ipſorum. Itaque res eò rediit, vt inueniendi ſint duo cubi quorum ſumma per laterum ſummam diuiſa, quotientem faciat quadratum. Hoc autem iam oſtenſum eſt, & ſunt cuborum latera 8. & 5. Redeo igitur ad propoſitum ab initio, & pono latera cuborum 8 N. & 5 N. & fit ſumma cuborum 637 C. ſummæ laterum æqualis nimirum 13 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad poſitiones. Erit prioris cubi latus $\frac{5}{7}$. alterius $\frac{8}{7}$. Ipſi verò cubi $\frac{125}{343}$. & $\frac{512}{343}$.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis eſt & perſpicua, & tota innititur lemmati ad præcedentem explicato. Cæterùm eodem ferè artificio ſoluemus huiuſmodi quæſtionem.

Inuenire duos cubos, quorum ſumma ad ſummam laterum ſit in data ratione, dummodo denominator rationis ſit quadratus, vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

Eadem addenda huic determinationi quæ in notis ſequentis addidimus, & miror Bachetum non quod methodum generalem, quæ ſanè eſt difficilis, non viderit, ſed quod ſaltem non admonuerit lectores hanc quæ ab ipſo traditur, non eſſe generalem.

Sit primùm data ratio quadrupla, cuius denominator quadratus eſt. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 2 N. erit ſumma cuborum 9 C. æqualis quadruplo ſummæ laterum, puta 12 N. & eſt ſolutio irrationalis, quia 9. ad 12. non habet rationem quadrati ad quadratum. Quærendi ergo prius

ſunt duo cubi, quorum ſumma ad quadruplum ſummæ laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur ſumma laterum quilibet vnitatum Numerus, puta 6. & ſit vnum 1 N. alterum 6 − 1 N. erit ſumma cuborum 216 + 18 Q. − 108 N. quæ ad quadruplum ſummæ laterum, nimirum ad 24. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altera ſumma per alteram diuiſa, fiet 9 + $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{18}{4}$ N. æqualis quadrato, & omnia ducendo in 4. fiet 36 + 3 Q. − 18. N. æquandus quadrato. Et per artificium ad præcedentem explicatum inuenies fingendum latus 6 − tot numeris qui ſuperent 2. fingatur 6 − 5 N. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Sunt ergo cuborum latera $\frac{21}{11}$ & $\frac{45}{11}$. & ſumendo minimos in eadem ratione, fient cuborum latera 7 & 15. Redeo igitur ad propoſitam initio quæſtionem, & pono quæſitorum latera cuborum 7 N. & 15 N. fit ſumma cuborum 3718 C. laterum 22 N. cuius quadruplum 88. N. æquatur 3718 C. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{14}{13}$ & $\frac{30}{13}$. & ſatisfaciunt propoſito.

Deinde ſit data ratio tripla, cuius denominator 3. eſt triens quadrati 9. erunt vt prius quærendi duo cubi, quorum ſumma ad triplum ſummæ laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur latus vnius vt ſupra 1 N. alterius 6 − 1 N. igitur ſumma cuborum 18 Q. + 216 − 108. N. ad triplum ſummæ laterum 18. debet habere rationem quadrati ad quadratum, vnde altera ſumma per alteram diuiſa fit 1 Q + 12 − 6 N. æqualis quadrato cuius latus fingendum eſt 1 N. − tot vnitatibus, vt ſuperet 3 ½ latus ipſius 12. ita tamen vt valor Numeri ſit minor quàm 6. Quare cùm per artificium ad præcedentem explicatum conſtet vnitates ponendas in latere fictitio debere eſſe minores quàm ½: Patet fingendum latus 1 N. tot vnitatibus, vt cadant inter 3 ½ & 9. ½. Fingatur 1 N. − 6. fiet quadratus 1 Q. + 36 − 12 N. æqualis 1 Q. + 12 − 6 N. & fit 1 N. 4. Sunt ergo latera cuborum 4. & 2. vel in minimis 2. & 1. Venio itaque ad initio propoſitam quæſtionem. Et pono latera cuborum 1 N. & 2 N. fiuntque 9 C. æquales 9 N. vnde fit 1 N. 1. & patet cubos 1. & 8. ſoluere quæſtionem. Quod ſi quadrati 1 Q + 12. − 6 N. fingas latus 1 N. − 8. fiet 1 N. $\frac{26}{5}$ & latera cuborum quorum ſumma ad triplum ſummæ laterum habet rationem quadrati ad quadratum, erunt in minimis 2 & 13. Quibus vtendo pones quæſitorum cuborum latera 2 N. & 13 N. vnde fient tandem 2205 C. æquales 45 N. & fiet 1 N. $\frac{1}{7}$ erunt ergo latera cuborum $\frac{2}{7}$ & $\frac{13}{7}$ quæ ſoluent quæſtionem.

QVÆSTIO XII.

INVENIRE duos cubos quorum interuallum æquale ſit interuallo laterum ipſorum. Sunto latera 2 N. & 3. N. & erit interuallum cuborum 19 C. Interuallum autem laterum 1 N. Igitur 1 N. æquatur 19 C. Et non eſt numerus rationalis, quia ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quæ eſt quadrati ad quadratum. Eò itaque ſum redactus, vt inueniam duos cubos, vt ipſorum interuallum ad interuallum laterum rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Sunto latera cuborum 1 N. & 1 N. + 1. vt & ipſorum interuallum ſit quadratus, nimirum 1. & quoniam vnum latus eſt 1 N. alterum 1 N. + 1. erit quidem laterum interuallum 1. cuborum vero 3 Q. + 3 N. + 1. Volumus ergo 3 Q. + 3 N. + 1. ad vnitatem, interuallum ſcilicet laterum, rationem habere quam habet quadratus ad quadratum. Igitur productum eorum multiplicatione oportet eſſe quadratum. Eſt autem hoc productum 3 Q. + 3 N. + 1. Hoc æquatur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad poſitiones. Sunt cubi 343. & 512. quorum latera 7. &

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχῇ. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν. ἡ μὲν ςς β̄ ἡ δὲ ςς γ̄. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων κυ ιθ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν ςς ᾱ. ςς ἄρα ᾱ. ἴσος κύβοις ιθ̄. καὶ γίνεται ὁ ςς οὐ ῥητὸς παρὰ τὸ μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν β̄ κύβους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ςς ᾱ. ἡ δὲ ςς ᾱ μο ᾱ. ἵνα καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ᾖ τετράγωνος τουτέστι μο ᾱ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τοῦ μὲν πλευρὰ ςς ᾱ. τοῦ δὲ ςς ᾱ μο ᾱ. ἔσται ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν μο ᾱ. τῶν δὲ κύβων δυ γ̄. ςςοἱ γ̄. μο ᾱ. θέλομεν οὖν δυ γ̄. ςς γ̄. μο ᾱ. πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τὸν ἄρα ὑπ' αὐτῶν δεῖ εἶναι τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ ὑπ' αὐτῶν δυ γ̄ ςς γ̄ μο ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μο ᾱ λεῖψει ςς β̄. καὶ γίνεται ὁ ςς μο ζ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται οἱ κύβοι, ὃς μὲν τμγ̄. ὃς δὲ φιβ̄ ὧν αἱ πλευραὶ ἡ μὲν ζ̄. ἡ δὲ η̄. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰς

πλευρὰς τῶν κύβων, ὧν μὲν ϛ ζ. ὧν δὲ ϛ η. καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχή ἐστιν ϛ α. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχὴ κ^υ ρξθ. κύβοι δὲ ρξθ ἴσοι ϛ α. καὶ γίνεται ὁ ϛ α ιγ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ ιγ^{ων}. ἡ δὲ η ιγ^{ων}.

8. Venio ad id quod initio propoſitũ erat, & pono latera cuborum 7 N. & 8 N. & eſt horum interuallum 1 N. At interuallum cuborum ab ipſis ortorum eſt 169 C. igitur 169. C. æquantur 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad poſitiones. Erunt latera cuborum $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

OBSERVATIO D. P. F.

VTrum verò inuenire liceat duo quadratoquadrata quorum interuallum æquale ſit interuallo laterum ipſorum, de hoc inquiratur & tentetur artificium noſtræ methodi, quod haud dubiè ſuccedet.

Quærantur enim duo quadratoquadrata ita vt differentia laterum ſit 1. & differentia quadratoquadratorum ſit cubus. Erunt latera per primam operationem $-\frac{9}{22}$ & $\frac{13}{22}$. Sed quia primus numerus notatur ſigno − iteretur operatio iuxta noſtram methodum & ponatur primum latus 1 N $-\frac{9}{22}$ ſecundum erit 1 N $+\frac{13}{22}$ & incidetur in nouam æquationem quæ in veris numeris quæſtioni ſatisfaciet.

IN QVAESTIONEM XII.

LEMMA Diophanti eſt idem penitus cum quarta quæſtione earum, quas ad nonam huius attulimus, quamuis vniuerſalius operati ſimus ibi, quàm hîc faciat Diophantus, vult enim interuallum cuborum poni quadratum, cùm nos interuallum cuborum poni poſſe quemlibet numerum docuerimus. Itaque vide quæ ibi adnotauimus. Cæterùm, ſicut ad præcedentem factum eſt, proponetur etiam hæc quæſtio vniuerſalius, nimirum ſic.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum datam habeat rationem, dummodo denominator rationis ſit quadratus vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

DEterminatio eſt illegitima, quia non generalis, addendum igitur, vel multiplus per numeros primos qui ſuperant vnitate ternarij multiplices, aut ab ipſis compoſitos vt 7. 13. 19. 37. &c. vel 21. 91. &c. demonſtratio & conſtructio ex noſtra methodo petenda.

Primùm ſit data ratio quadrupla, cuius denominator 4. quadratus eſt. Hîc etiam eò redigimur, vt inueniamus duos cubos, quorum interuallum ad quadruplum interualli laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N + 2. Erit cuborum interuallum 8. + 12 N. + 6 Q. laterum 2. cuius quadruplum 8 ad cuborum interuallum debet habere rationem quadrati ad quadratum. Proinde illo per hunc diuiſo fiet 1 + $\frac{3}{2}$ N. + $\frac{3}{4}$ Q. æquandus quadrato, & omnia per 4. multiplicando, fit 4 + 6 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Eſto latus eius 2 − 3 N. fiet 1 N. 3. Sunt ergo cuborum latera 3. & 5. Venio ad propoſitam quæſtionem, & pono quæſitorum cuborum latera 3 N. & 5 N. fit cuborum interuallum 98 C. æquale quadruplo interualli laterum 8 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{7}$ ſunt ergo cuborum latera $\frac{6}{7}$ & $\frac{10}{7}$. quæ ſoluunt quæſtionem.

Deinde ſit data ratio tripla, cuius denominator 3. eſt triens quadrati 9. Sunt vt prius quærendi duo cubi, quorum interuallum ad triplum interualli laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 2. erit cuborum interuallum 6 Q. + 12 N. + 8. ad triplum interualli laterum, nimirum ad 6. in ratione quadrati ad quadratum, quare illo per hunc diuiſo fiet 1 Q. + 2 N. + $\frac{4}{3}$ æquandus quadrato, & omnia per 9. multiplicando fiet 9 Q. + 18 N. + 12. æquandus quadrato, fingatur eius latus 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{2}{21}$ Sunt ergo cuborum latera $\frac{2}{21}$ & $\frac{44}{21}$ ſeu in minimis 1. & 22. Redeo ergo ad propoſitam initio quæſtionem, & pono quæſitorum cuborum latera 1 N. 22 N. cuborum interuallum eſt 10647 C. quod æquatur triplo interualli laterum, puta 63 N. & fit N. $\frac{1}{13}$ ſunt latera cuborum $\frac{1}{13}$ & $\frac{22}{13}$. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE duos numeros, vt maioris cubus adſcito minore numero, ſit æqualis cubo minoris adſciſcenti maiorem numerum. Eſto alter 2 N. alter 3 N. maioris cubus adſcito minore numero fit 27 C. + 2 N. At minoris cubus adſcito maiore numero facit 8 C. + 3 N. Igitur 8. C. + 3. N. æquantur 27 C. + 2 N. Omnia per numerum diuidantur, fiunt 19 Q. æquales 1 N. & non prouenit 1 N. rationalis. At 19 Q. ſunt interuallum duorum cuborum. Vnitas verò eſt laterum differentia. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ipſorum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Hoc autem ſupra demonſtratum eſt, & ſunt cuborum latera 7. & 8. Venio ergo ad id quod primò quærebatur, & pono alterum 7 N. alterum 8 N. fiunt 343. C. + 8 N. æquales 512. C. + 7 N. & fit 1. N. $\frac{1}{13}$. Ad poſitiones. Erit alter $\frac{7}{13}$. alter $\frac{8}{13}$. & demonſtratio euidens.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβῳ προσλαβόντι τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἔστω ὁ μὲν ϛϛ β. ὁ δὲ ϛϛ γ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ κυ κζ ϛϛοὺς β. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ κυ η ἀριθμοὺς γ. κύβοι ἄρα η ϛϛοὶ γ ἴσοι εἰσὶ κυ κζ. ϛϛοῖς β. καὶ πάντα παρὰ ϛ. καὶ γίνονται δυ ιθ ἴσαι μο α. καὶ ὁ ϛ οὐ ῥητός. ἀλλ᾽ αἱ μὲν δυ ιθ εἰσὶ δύο κύβων ὑπεροχή. ἡ δὲ μο α τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐστὶν ὑπεροχή. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχὴν λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ. ἡ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω ὃν μὲν ϛϛ ζ. ὃν δὲ ϛϛ η. καὶ γίνεται κυ τμγ ϛϛοὶ η. ἴσοι κυ φιβ ϛϛοῖς ζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ ιγ. ὁ δὲ η ιγ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XIII.

OPERATIO Diophanti nil habet difficultatis. Verùm moneo abſque noua operatione poſſe ſolui quæſtionem hanc auxilio præcedentis, nam numeri quicunque præcedenti ſatisfacientes, hanc quoque ſoluunt, quod ſic demonſtro.

A $\frac{512}{2197}$. B $\frac{343}{2197}$
C $\frac{8}{13}$. D $\frac{7}{13}$

Sint Numeri ſatisfacientes præcedenti, nimirum cubi A B. & eorum latera C D. ita vt cuborum A B interuallum ſit æquale interuallo laterum C D. Dico per eoſdem numeros huic quæſtioni ſatisfieri, nimirum maiorem cubum A adſciſcentem minus latus D, æquari minori cubo B. adſciſcenti maius latus C. Etenim ob æqualitatem interuallorum eſt in medietate Arithmetica A ad B. vt C ad D. [a] Quare extremorum A D ſumma æqualis eſt ſummæ mediorum B C. Quod erat propoſitum. 4. 1. poriſm.

Similiter per præcedentem ſoluetur adhuc huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos cubos, vt interuallum maioris cubi & maioris lateris, interuallo minoris cubi, & minoris lateris æquale ſit.

Sint enim iidem qui ſuprà numeri ſatisfacientes præcedenti, dico interuallum maioris cubi A & maioris lateris C. æquale eſſe interuallo minoris cubi B. & minoris lateris D. Quia enim eſt in medietate Arithmetica A ad B vt C ad D. [b] Erit & permutando A ad C vt B ad D. Quod demonſtrandum erat. 7. 1. poriſm.

Non aliter per vndecimam huius ſoluetur quæſtio ſequens.

Inuenire duos cubos, vt maior eodem interuallo ſuperet latus minoris, quo latus maioris ſuperat minorem cubum.

A $\frac{512}{343}$. B $\frac{8}{7}$.
C $\frac{125}{343}$. D $\frac{5}{7}$.

Sit maior cubus A. & eius latus B. ſitque minor cubus C. & eius latus D. ſitque ſumma cuborum A C. æqualis ſummæ laterum B D. vt requirit vndecima. Dico eodem interuallo A ſuperare D. quo B ſuperat C. Quia enim extremorum A C ſumma ſummæ mediorum D B æqualis eſt, eſt in medietate Arithmetica A ad D vt B ad C. Quod erat oſtendendum. 4. 1. poriſm.

QVAESTIO XIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ συναμφότερος, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν μετὰ μ° α̅. ποιῇ τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μ° α̅ ἕξω πρῶτον. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς̅ ὅσων δήποτε καὶ μ° α̅. καὶ ἔστω ἀπὸ ἀριθμῶν γ̅ μ° α̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ^υ θ̅ ςς̅ ς̅ μ° α̅. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὴν μ° α̅ τάσσω τὸν πρῶτον δ^υ θ̅ ςς̅ ς̅. πάλιν ἐπεὶ θέλομεν τὸν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον μετὰ μ° α̅ ποιεῖν τετράγωνον. * ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μ° α̅ καὶ δ^υ θ̅. ϥϥ ς̅ ς̅. * ὁ δὲ δεύτερος μετὰ μ° α̅ ἐστὶ τετράγωνος. γέγονέ μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος μετὰ δ^υ θ̅ ςς̅ ς̅. ποιεῖ τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἡ δυνάμεις θ̅ ςς^οι ς̅. καὶ εἰσὶ ςς^οι θ̅ μ° ς̅ καὶ ς^ι α̅. ὧν ὑπεροχὴ ςς^οι η̅ μ° ς̅. καὶ αὐτῆς τὸ ἥμισυ ς° δ̅ μ° γ̅. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται δυνάμεις ις̅ ἀριθμοὶ κδ̅ μ° θ̅. ἀφαιρῶ μ° α̅. καὶ τάσσω τὸν δεύτερον δ^υ ις̅ ςς̅ κδ̅. μ° η̅. ἐστὶ δὲ καὶ ὁ πρῶτος δ^υ θ̅ ςς̅ ς̅. καὶ ἑκάτερος καὶ συναμφότερος μετὰ μ° α̅ ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν μετὰ μ° α̅ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι ἄρα δ^υ ζ̅ ςς̅ ιη̅ μονάδες θ̅ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων γ̅ λεῖψει ἀριθμῶν γ̅ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιη̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ὁ μὲν πρῶτος. ͵γκδ̅. ὁ δὲ δεύτερος ͵εχκδ̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt alteruter, & amborum ſumma, ſed & ipſorum interuallum addita vnitate quadratum faciat. Si vnitatem auferam ab aliquo quadrato, habebo primum. Formo quadratum aliquem a numeris quotlibet & vnitate, eſto à 3 N. + 1. ipſe erit 9 Q. + 6 N. + 1. & ſi inde auferam vnitatem, ponam primum 9 Q. + 6 N. Rurſus quia volumus primum & ſecundum ſimul, addita vnitate facere quadratum; ſed & ſecundum adſcita vnitate eſſe quadratum, quærendum mihi obtigit quis quadratus coniunctus cum 9 Q. + 6 N. faciat quadratum. Expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 6 N. & ſunt 9. N. + 6. & 1 N. horum interuallum 8 N. + 6. cuius ſemiſſis 4 N. + 3. quo in ſe ducto fit 16 Q. + 24 N. + 9. Hinc aufero vnitatem, & pono ſecundum 16 Q. + 24 N. + 8. Eſt autem primus 9 Q. + 6 N. & alteruter, & vterque ſimul addita vnitate facit quadratum. Supereſt vt & interuallum ipſorum adſcita vnitate faciat quadratum. Igitur 7 Q. + 18 N. + 9. æquantur quadrato a latere 3 − 3 N. & fit 1 N. 18. Ad poſitiones. Erit primus 3024. ſecundus 5624. & demonſtratio manifeſta.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa aſteriſcis incluſa, *ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μ° α̅ καὶ δ^υ θ̅ ϥϥς̅.* ſubreptitia ſunt, & omnino reiicienda. Vt contrà fuerunt adiicienda illa quæ virgulis incluſa vides. Sic emendato textu nulla eſt hîc difficultas. Ad inueniendum quadratum qui additus ad 9 Q. + 6 N. faciat quadratum, non recurrit ad duplicatam æqualitatem Diophantus, vt malè arbitratur Xilander, non enim ſunt hîc duo numeri quadrato æquandi. Sed vtitur Canone vltimo vndecimæ ſecundi, cuius etiam vſus eſt in duplicata æqualitate ad reperiendum duos quadratos dato interuallo differentes. Diuerſitas autem operationis, & ſolutionis à triplici capite oritur. Primò enim primus diuerſimodè poni poteſt, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus + duplo lateri illius. Vt 9 Q. + 6 N. vel 4 Q + 4 N. vel 16 Q. + 8 N. &c. Secundò eodem manente primo, ſecundus variari poteſt in infinitum, quia verbi gratia in hypotheſi Diophanti per vndecimam ſecundi, reperiri poſſunt infiniti quadrati diuerſi, qui cum 9 Q. + 6 N. quadratum faciant, quorum ſinguli multati vnitate ſtatui poterunt pro ſecundo. Denique in fingendo latere quadrati qui numerorum interuallo æquetur, mira contingere poteſt varietas. Nam verbi gratia in hypotheſi Diophanti quadrati 7 Q. + 18 N. + 9. latus fingi poteſt à 3 − quolibet Numerorum numero, cuius quadratus ſuperet 7.

Non eſt etiam diſſimulandum quæſtionem hanc ad quemlibet quadratum extendi, ac proinde vniuerſalius proponi poſſe hoc pacto.

Quærantur duo numeri, quorum ſumma, ipſorum vterque, ſed & interuallum

ipſorum addito dato quadrato, quadratum faciant.

Eſto datus quadratus 4.

Si auferam 4. ab aliquo quadrato habebo primum. Formo quadratum à Numeris quotlibet + 2. latere dati quadrati. Eſto à 3 N. + 2. ipſi erit 9 Q. + 12 N. + 4. hinc auferendo 4. ſtatuo primum 9 Q. + 12 N. Iam vt habeam ſecundum, quæram quis quadratus adſumpto 9 Q. + 12 N. faciat quadratum. Expono duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 12 N. hi ſunt 9 N. + 12. & 1 N. horum interualli ſemiſſis eſt 4 N. + 6. cuius quadratus 16 Q. + 48 N. + 36. vnde ſi auferam 4. reſtabit pro ſecundo numero 16 Q. + 48 N. + 32. Primus autem eſt 9. Q. + 12 N. Et hi tribus poſtulati partibus ſatisfaciunt, nam & alteruter, & vtriuſque ſumma adſumpto 4. quadratum facit. Reſtat vt & eorum interuallum adiecto 4. quadratum faciat, facit autem 7 Q. + 36 N. + 36 Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 6 − 3 N. & fit 1 N. 36. ſunt igitur quæſiti numeri 12096. & 22496. qui ſoluunt quæſtionem, nam vtrique ſigillatim addendo 4. fiunt quadrati 12100, & 22500. quorum latera 110. & 150. At ſi ſummæ amborum, & interuallo eorundem addatur rurſus 4. fiunt quadrati 34596. & 10404. quorum latera 186 & 102.

QVÆSTIO XV.

INVENIRE tres numeros quadratos, qui coniuncti æquales ſint interuallis ipſorum coniunctis. Quoniam differentia maximi & medij, & differentia medij & minimi, & differentia maximi & minimi, ſimul iunctæ tribus numeris æquantur, at tres differentiæ ſunt duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplũ differentiæ maximi & minimi æquatur tribus numeris. Ponatur minimus quadratus 1. maximus 1 Q. + 2 N. + 1. iam duplum interualli maximi & minimi eſt 2 Q. + 4 N. Ergo tres quadrati ſimul ſunt 2 Q. + 4 N. quorum duo cùm ſint 1 Q. + 2 N. + 2. relinquitur vtique medius 1 Q. + 2 N. − 2 Oportet igitur hæc æquari quadrato. Eſto quadrato à latere 1 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{9}{5}$. Ad poſitiones. Erit maximus $\frac{196}{25}$. medius $\frac{121}{25}$. minimus 1. & omnia per 25. erit maximus 196. medius 121. minimus 25.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους οἳ συντεθέντες ἴσοι ἔσονται ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ μέσου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἴση ἐστὶ τοῖς τρισὶν, ἀλλ' αἱ τῶν τριῶν ὑπεροχαὶ δίς ἐστιν ἡ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ, δὶς ἄρα ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τοῖς τρισί. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τετράγωνος μο ᾱ. ὁ δὲ μέγιστος δυ ᾱ ςς β̄ μο ᾱ. καὶ δὶς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δυ β̄ ςς δ̄. εἰσὶ ἄρα οἱ τρεῖς τετράγωνοι δυ β̄ ςς δ̄. ὧν οἱ δύο εἰσὶ δυ ᾱ ςς β̄ μο β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ μέσος ἔσται δυ ᾱ ςς β̄ ⋔ μο β̄. δεῖ ἄρα ταῦτα ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ᾱ ⋔ μο δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μο θ ε^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϟς κε^ων. ὁ δὲ μέσος ρκα κε^ων. ὁ δὲ ἐλάχιστος μο ᾱ. καὶ πάντα κε. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϟς. ὁ δὲ μέσος ρκᾱ. ὁ δὲ ἐλάχιστος κε.

IN QVAESTIONEM XV.

TEXTV reſtituto, vt nos fecimus, non magna eſt hîc difficultas. Aduertendum tamen quod nec attigit Diophantus, nec vidit Xilander in fingendo latere quadrati 1 Q. + 2 N. − 2 aliquam adhibendam eſſe cautionem. Cùm enim tres inæquales numeri quærantur, oportet vtique medium maiorem eſſe minimo. At minimus poſitus eſt 1. medius 1 Q. + 2 N. − 2. Oportet igitur talem inueniri valorem Numeri, vt per eum reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. + 2 N. − 2. ſit plus quàm 1. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. + 2 N. excedere ternarium, & hoc etiam vt contingat, oportet valorem Numeri excedere vnitatem, vt manifeſtum eſt. Porrò fit valor Numeri à quodam quadrato binario aucto, & diuiſo per duplum ſui lateris binario auctum. Quare ſi ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. fiet valor Numeri $\frac{1 Q. + 2}{2 N. + 2}$. Hoc ergo cùm maius eſſe oporteat vnitate, erit & 1 Q. + 2. maior quàm 2 N. + 2. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2. N. vnde conſtat vnitates in latere fictitio ponendas plures eſſe debere quàm 2. Ita Diophantus finxit huiuſmodi latus 1 N. − 4. Poterat etiam poni 1 N. − 3. vel 1 N. − 5. &c. Sed ſi ponas 1 N. − 1. vel 1 N. − 2. incides vtique in aliquod abſurdum.

Aduertendum præterea minimum quæſitorum, non ſolùm poni poſſe 1. ſed & alium quemlibet quadratum, puta 8. 9. 25. &c. Sed tunc maximi latus ponetur certus Numerorum numerus +

latere eiuſdem quadrati, qui pro minimo poſitus erit. Et tandem in fingendo latere quadrati qui pro medio ſtatuetur, adhibenda erit eadem cautio, de qua ſupra eſt actum, erit enim neceſſe vt per valorem Numeri reſoluendo hypoſtaſes, medius inueniatur maior minimo.

Denique communi denominatore abiecto, ſolos numeratores retinet Diophantus, quia hi æquè bene ſoluunt quæſtionem. Cuius rei ratio eſt, quod in fractionibus eiuſdem denominationis, tam ſumma quàm interuallum penes ſolos Numeratores conſideratur, vnde ad hoc vt trium fractionum eiuſdem denominationis ſumma æqualis ſit ipſarum interuallis, neceſſe eſt prius Numeratorum ſummam, ipſorum interuallis æquari. Sed & vniuerſaliter veriſſimum eſt. Quamcunque rationem trium Numerorum ſumma habeat ad ipſorum interualla, eandem habere, ſummam trium aliorum in eadem ratione ſumptorum, ad ipſorum interualla, vt facile eſt demonſtrare. Sed hoc tyronibus exercitationis gratia relinquatur.

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. ἐπιτετάχθω δὴ συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν μο λε. συναμφότερον δὲ τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν μο κζ. καὶ ἔτι συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μο λβ. τετάχθω ὁ τρίτος ς α. λοιπὸν ἄρα ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος λε ςx. ἔστω ὁ πρῶτος ι ςx. ὁ δεύτερος ἄρα ἔσται κε ςx. καὶ λοιπὰ ἐστι δύο ἐπιτάγματα τὸ συναμφότερον τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖν μο κζ. τό τε συναμφότερον τὸν τρίτον καὶ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μο λβ ἀλλ' ὁ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ι καὶ σν δυx. μονάδες ἄρα ι μετὰ σν δυx ἴσαι μο κζ. ὁ δὲ τρίτος καὶ ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖ μο κε καὶ σν δυx. μονάδες ἄρα κε μετὰ σν δυx ἴσαι μο λβ. καὶ μο καὶ σν δυx ἴσαι μο κζ. καὶ ὑπερέχουσιν αἱ μονάδες τὰς μονάδας μο ε. ὡς εἰ καὶ αἱ μο κε. καὶ σν δυx ὑπερεῖχον μο ε. ἦν ἂν ἴση ἡ ὑπεροχή. ἀλλὰ μο κε ἐκ τοῦ δευτέρου εἰσὶν, αἱ δὲ μο ι ἐκ τοῦ πρώτου εἰσί. θέλομεν οὖν τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μο ε. αὐτοὶ δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος οὐκ εἰσὶ τυχόντες ἀλλὰ συναμφότερος μο λε. γέγονε οὖν μοι τὸν λε διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ἵνα ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ὑπερέχῃ μο ε. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ιε. ὁ δὲ κ. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ιε ςx. τὸν δὲ δεύτερον κ ςx. καὶ συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ιε καὶ τ δυx ἴσας μο κζ. συναμφότερος δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ δεύτερον ποιεῖ μο κ καὶ τ δυx ἴσας μο λβ. καὶ ἐπεὶ μο ιε καὶ τ δυx ἴσωσαι μο κζ. γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο γ. ὁ δὲ δεύτερος μο δ. ὁ δὲ τρίτος μο ε.

INVENIRE tres numeros, quorum bini quilibet coniuncti, & in reliquum ducti, faciant datos numeros. Imperetur vt ſumma primi & ſecundi in tertium ducta faciat 35. ſumma ſecundi & tertij in primum ducta faciat 27. At ſumma primi & tertij in ſecundum faciat 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & ſecundus ſimul erunt $\frac{35}{N}$. Eſto primus $\frac{10}{N}$. ſecundus igitur erit $\frac{25}{N}$. duo adhuc poſtulata reſtant implenda, nimirum vt ſecundus & tertius ſimul in primum ducti faciant 27. & vt tertius & primus ſimul in ſecundum faciant 32. ſed ſecundus & tertius in primum faciunt 10 + $\frac{250}{Q}$. Proinde 10 + $\frac{250}{Q}$. æquantur 27. At tertius & primus in ſecundum faciunt 25. + $\frac{250}{Q}$. Proinde 25 + $\frac{250}{Q}$. æquantur 32. ſed vt oſtenſum eſt, etiam 10 + $\frac{250}{Q}$. æquantur 27. & exceſſus vnitatum ſuper vnitates eſt 5. vt ſi etiam 25. + $\frac{250}{Q}$. vltra 10 + $\frac{250}{Q}$. habuiſſent 5. æqualia vtique fuiſſent interualla. Sed 25. vnitates à ſecundo ſunt, & vnitate 10. à primo. Volumus ergo harum interuallum eſſe 5. Ipſi autem primus & ſecundus non ſunt quiuis, ſed coniuncti faciunt 35. vſu venit ergo mihi vt 35. diuidam in duos numeros, quorum differentia ſit 5. & eſt alter 15. alter 20. Pono ergo primum $\frac{15}{N}$. ſecundum $\frac{20}{N}$. & ſumma ſecundi & tertij in primum ducta facit 15 + $\frac{300}{Q}$. æqualia 27. At ſumma primi & tertij in ſecundum facit 20 + $\frac{300}{Q}$. æqualia 32. & ſi 15 + $\frac{300}{Q}$ æquem 27. fit 1 N. 5. Ad poſitiones, erit primus 3. ſecundus 4. tertius 5.

IN

IN QVAESTIONEM XVI.

TExtvs alio morbo non laborat, niſi quod fractiones Numericæ & Quadraticæ ambiguè exprimuntur, vt iam ſemel atque iterum monuimus paſſim in hoc codice contingere. Sed ex noſtra verſione omnis tollitur ambiguitas. Operatio artificioſa eſt, quam etſi totam ita tradat Xilander, veram tamen eius cauſam, & æquationis reſoluendæ rationem non intellexit, ait enim abiici debere vtrimque 300. & comparandos inuicem antecedentes 15. & 20. itemque conſequentes 27. & 32. quorum idem interuallum 5. valor Numeri. In quo turpiter errat, ſi exiſtimat idcirco 5. eſſe valorem Numeri. Quod fiet manifeſtum ſi ſtatuas ſecundum vel tertium 1 N. quod fieri poſſe docebimus infrà. Tunc enim ſimili prorſus logiſmo inuenies valorem Numeri longè diuerſum ab interuallo ſimilium antecedentium & conſequentium. Itaque reſoluitur æquatio via ordinaria. Comparando verò gratia 15 Q. + 300. cum 27 Q. auferendo ſcilicet vtrimque 15 Q. vnde tandem 12 Q. manent æquales 300. & fit 1 Q. 25. ac proinde 1 N. 5. ſimiliter æquando 20 Q. + 300. & 32 Q. auferendo ſcilicet vtrimque 20 Q. manent vt prius 12 Q. æquales 300. vnde fit rurſus idem valor Numeri 5. Cùm autem vtraque æqualitas neceſſariò inferatur, neceſſe eſt vtique eundem vtrobique reperiri valorem Numeri, in quo totum artificium Diophanti conſiſtit. Si enim auferendo 15 Q. à 27 Q. idem ſuperſit quod ſupereſt auferendo 20 Q. à 32 Q. ſumus in vado, nam illud reſiduum vtrobique æquabitur eidem numero 300. Id autem continget ſi inter 15. & 20. idem ſit interuallum quod inter 27. & 32. Nam datis quatuor Numeris 15. 20. 27. 32. ita vt inter 15. & 20. primum & ſecundum idem ſit interuallum, quod inter 27. & 32. tertium & quartum, [1] erit & permutando idem interuallum, inter 15. & 27. primum & tertium, quod inter 20. & 32. ſecundum & quartum. Quod eſt intentum. Hinc patet vera & germana cauſa totius operationis Diophanti, & cur cogatur diuidere 35. in partes 15. & 20. eodem diſtantes interuallo, quo diſtant 27. & 32.

[1] 7. 1. poriſ.

Cæterùm, vt jam monui, tripliciter variari poteſt operatio, quia 1 N. pro quolibet trium quæſitorum numerorum ſtatui poteſt, quod in tyronum gratiam non pigebit vno exemplo confirmare. Ponatur ſecundus 1 N. erunt igitur primus & tertius ſimul $\frac{32}{1N}$. Iam vt inueniantur primus & tertius ſeparati, & duplicata æqualitas ritè procedat, oportet diuidere $\frac{32}{1N}$ in duas partes, ſeruantes idem interuallum quod eſt inter 35. & 27. nimirum 8. id fiet per primam primi. Erit ergo primus $\frac{12}{1N}$ tertius $\frac{20}{1N}$. Itaque ducendo primum & ſecundum ſimul in tertium fit 20 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 35. Et rurſus ducendo ſecundum & tertium ſimul in primum, fit 12 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 27. & omnia ducendo in 1 Q. fit hinc quidem 20 Q. + 240. æqualis 35 Q. Inde verò 12 Q. + 240. æqualis 27 Q. & vtraque æquatione reſoluta fit vtrobique 1 Q. 16. ac proinde 1 N. 4. ſunt igitur quæſiti numeri qui prius 3. 4. 5. Hinc error Xilandri manifeſtè deprehenditur. Nam ſi vt ipſe argumentatur abiicias vtrimque 240. & comparando antecedentes 20. & 12. itemque conſequentes 35. & 27. quorum interuallum idem 8. Inde colligas valorem Numeri eſſe 8. vides quantum aberres à veritate.

Porrò vt ſolutio ſit rationalis, oportet, vt vno datorum numerorum diuiſo in duas partes, quarum idem ſit interuallum, quod eſt inter duos reliquos numeros, planus ſub dictis partibus comprehenſus habeat rationem quadrati ad quadratum, ad interuallum quo maior dictarum partium ſuperat minorem ex duobus reliquis numeris, vel quo minor pars ſuperatur à maiore duorum reliquorum numerorum.

QVÆSTIO XVII.

INvenire tres numeros æquales quadrato, ita vt quadratus cujuſlibet ipſorum adſcito ſequente numero faciat quadratum. Ponatur medius, Numerorum quotlibet, ac ſit 4 N. & quia volo quadratum primi adſcito ſecundo facere quadratum, eò res redit vt inueniam quis quadratus adiectis 4 N. faciat quadratum. Quæro duos numeros quorum mutuo, ductu fiat 4 N. hi ſunt qui eum metiuntur, nimirum 2 N. & 2. & ſi interualli horum ſemiſſem ſtatuo pro primo, erit is 1 N. − 1. Iam ergo hoc confectum eſt vt primi quadratus cum ſecundo numero fa-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μέσος ςς ὅσων δήποτε, ἔστω ςς δ̅. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται εἰς τὸ εὑρεῖν τίς τετράγωνος προσλαβὼν ςς δ̅ ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπό ἐστι ςς δ̅. μετροῦσιν ςς β̅ καὶ μ° β̅. καὶ ἐὰν τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ ἥμισυ τάξω τὸν πρῶτον. ἔσται ς α̅ λεῖψει μ° α̅. καὶ λέλυταί μοι ὥστε τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, τουτέστι δυ ις̅

μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὰς δυ ις, ἕξω τὸν τρίτον. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῶν δυ ις. τουτέστι ςς δ μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ ις ἀριθμῶν η μο α. ἐὰν ἀφέλω τὰς δυ ις. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ςς η μο α. πάλιν ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ςς ιγ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω τετραγωνικῶν δυ ρξθ. καὶ γίνεται ὁ ς δυ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος δυ ιγ λείψει μο α. ὁ δεύτερος δυ νβ. ὁ τρίτος δυ ρδ μο α. καὶ λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετραγώνου, τουτέστι δυδυ α͵ωις. δυ ση μο α. μετὰ τοῦ πρώτου, τουτέστι δυ ιγ ⋔ μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ποιεῖ δὲ δυδυ α͵ωις, δυ σκα. ἴσα τετραγώνῳ πάντα παρὰ δυνάμεις. γίνονται ἄρα δυ α͵ωις, μο σκα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ρδ μο α. καὶ γίνεται ὁ ς νε ιβων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο γ, ͵ςχκα ͵βψδων ὁ δὲ δεύτερος ιε, ͵ζτ ͵βψδων ὁ δὲ τρίτος μο λα, ͵ζτδ ͵βψδων.

ciat quadratum. Reſtat vt ſecundi quadratus, hoc eſt 16 Q. adſcito tertio faciat quadratum. Si ergo ab aliquo quadrato auſeram 16 Q. habebo tertium. Formo quadratum a latere ipſius 16 Q. nempe abs 4 N. + 1. is erit 16 Q. + 8. N. + 1. hinc ablatis 16 Q. reliquus eſt tertius 8 N + 1. Rurſus quia volo trium ſummam æquari quadrato, eſt autem trium ſumma 13 N. hoc æquabitur quadrato, eſto itaque quadratis numero quadrato, puta 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad poſitiones erit primus 13 Q. − 1. ſecundus 52 Q. tertius 104 Q. + 1. Ita indefinitè impleta ſunt tria poſtulata: Reſtat vt quadratus tertij, nimirum 10816 QQ. + 208 Q. + 1. adſcito primo numero, hoc eſt 13 Q. − 1. faciat quadratum. Facit autem 10816 QQ. + 221 Q. hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fit 10816 Q. + 221. æquale quadrato à latere 104 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{55}{52}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{36621}{2704}$. ſecundus $\frac{157300}{2704}$. tertius $\frac{317304}{2704}$.

OBSERVATIO D. P. F.

ELegantius fortaſsè ita ſoluetur hæc quæſtio, ponatur primus numerus 1. N. ſecundus 2 N + 1 vt cum quadrato primi conficiat quadratum, ponatur tertius quilibet vnitatum & numerorum numerus, eâ conditione vt additus quadrato ſecundi conficiat quadratum, V. G. ſit 4. N. + 3. ita igitur duabus propoſiti partibus fit ſatis, ſupereſt vt ſumma trium, ſed & quadratus tertij vnâ cum primo conficiat quadratum, ſumma trium eſt 4 + 7 N. ſumma verò quadrati tertij & primi eſt. 9 + 25 N + 16 Q. oriturque duplicata æqualitas cuius ſolutio in promptu ſi vnitates quadratas ad eundem numerum quadratum in vtroque numero quadrato adæquando reuoces.

Eademque viâ facillimè extendetur quæſtio ad 4. numeros & infinitos cauendum enim ſolummodo erit vt ſumma vnitatum quæ in ſingulis numeris ponuntur conficiat quadratum quod quidem facillimum eſt.

IN QVAESTIONEM XVII.

ARTIFICIOSISSIMÈ Diophantus per duas operationes propoſitum abſoluit problema. Hic itaque multa ſunt obſeruanda, quæ vel non vidit Xilander, vel parum feliciter adnotauit.

Primo enim medius quæſitorum numerorum poni poterat non ſolùm 4 N. ſed & alius quilibet Numerorum Numerus, vt non obſcurè indicat Diophantus.

Secundò ſumi poſſunt etiam diuerſi numeri, quorum mutuo ductu fiant 4 N. & ſic primi Numeri poſitio variari, cùm inueniri poſſint infiniti quadrati qui adſumptis 4 N. quadratum faciant. Sed hic aliqua cautio adhibenda eſt. Curandum enim vt ex duobus huiuſmodi Numeris, quorum mutuo ductu fient 4 N. ille qui conſtat ex ſolis vnitatibus abſolutis habeat pro ſemiſſe quadratum numerum. Sic Diophantus ſelegit 2 N. & 2. vbi vides ſemiſſem ipſius 2. eſſe 1 quadratum numerum. Sic etiam ſumi poſſent $\frac{1}{2}$ N. & 8. quia ſemiſſis ipſius 8. eſt quadratus 4. & ſic alij infiniti cum eadem cautione deligi poſſunt. Huius verò rei cauſa ſubtili indiget indagatione. Equidem certum eſt ſemiſ-

ſem huiuſmodi vnitatum abſolutarum ſemper reperiri in hypoſtaſi primi numeri cum ſigno — in hypotheſi Diophanti ponitur primus Numerus 1 N. — 1. Etſi ſumpſiſſes $\frac{1}{2}$ & 8. ad conficiendum 4 N. mutuo ductu, ſtatueretur primus Numerus $\frac{1}{4}$ N. — 4. hoc autem accidit, quia primus Numerus habetur ſumendo ſemiſſem interualli duorum numerorum quorum mutuo ductu fiunt 4 N. Cæterùm vnitates quæ ponuntur in primo Numero cum ſigno defectus debere conflare quadratum ex eo colligitur, quod hæ debent æquari illis quæ ponuntur in tertio numero cum ſigno +. vt ſic vnitatibus ſe mutuo elidentibus cùm tres numeri ſimul adduntur, eorum ſumma conſtet ex ſolis Numeris, vt in Diophanto fit hujuſmodi ſumma 13 N. Atqui vnitates quæ ponuntur in tertio numero ſemper quadratas eſſe manifeſtum eſt. Etenim tertius Numerus eſt pars cuiuſdam quadrati, cujus latus conſtat ex Numeris qui ponuntur pro ſecundo + quotlibet vnitatibus, ſic Diophantus poſito ſecundo 4 N. vt inueniat tertium, fingit quadratum à latere 4 N + 1. qui eſt 16 Q. + 8 N. + 1. vnde ablatis 16 Q. ſtatuit tertium 8 N. + 1. Quare manifeſtum eſt vnitates tertij Numeri ſemper eſſe quadratum vnitatum in latere dicti quadrati poſitarum. Vt ergo illis æquentur vnitates primi numeri, illas opportet conficere quadratum eundem.

Tertiò in prima operatione Diophantus æquare potuit 13 N. cuilibet numero quadratorum quadrato, puta 16 Q 25 Q. 36 Q. &c. Sumpſit author 169. Q. ad vitandas fractiones. Voluit autem in hac operatione valorem Numeri exhiberi in Quadratis, quia per eam non inquiritur vltimus valor Numeri per quem propoſita quæſtio ſoluatur, ſed tantùm id agitur vt per eam hypoſtaſes trium quæſitorum uumerorum ita conſtituantur, vt per eas tribus propoſiti partibus indefinitè ſatisfiat, vt diſertis verbis indicat Diophantus. Rectè itaque concludit ſi 13 N. æquentur 169. Q. ſequi 1 N. æquari 13 Q. Quod ex ſola proportionum regula perſpicuum eſt. Deinde ad hanc Numeri æſtimationem reducendo ante factas poſitiones, infert primum qui erat 1 N. — 1. fore iam 13 Q — 1. ſecundum qui erat 4 N. fore iam 52 Q. Ac demum tertium qui erat 8 N. + 1. fore iam 104 Q. + 1. Quare patet allucinari Xilandrum cùm putat 13 N. æquari 169 QQ. qua æquatione quid ad rem conducens conſequi poſſit non video. Siue enim per regulam trium colligat 1 N. æquari 169 QQ. ſiue depreſſis characteribus 13. æquari 169 Q C. vnde fit ſolutio irrationalis; in manifeſtum abſurdum eum incidere neceſſe eſt. Adde in Græco rectè reperiri ad 169. adiectam notam Q. non autem QQ. vt verè dici poſſit corruptum hoc loco Diophantum à Xilandro.

Quartò in vltima æquatione vbi fingitur latus numeri 10816 Q. + 221. qui fit addendo primum numerum ad quadratum tertij, magna etiam cautio eſt adhibenda. Quia enim primus poſitus eſt 13. Q. — 1 oportet talem inueniri valorem Numeri, vt 13 Q. excedant vnitatem. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. maiorem eſſe quàm $\frac{1}{13}$. quare cùm latus vero maius ipſius $\frac{1}{13}$ ſit $\frac{1}{10}$. Oportet valorem Numeri excedere $\frac{1}{10}$. Porro fit valor Numeri auferendo quadratum aliquem à 221. & reſiduum diuidendo per latus eiuſdem quadrati ductum in 208. Quare poſito illo quadrato 1 Q. fit valor Numeri $\frac{221 - 1Q}{208\,N}$ qui debet excedere $\frac{1}{10}$. quare 221 — 1 Q. debet excedere $\frac{310}{1}$ N. & tandem 1 Q debet eſſe maior quàm $\frac{218}{1}$ N. + 221. Quia æquatione per approximationem reſoluta fit 1 N. $\frac{16}{1}$. Quamobrem manifeſtum eſt fingendum latus quadrati 104 N. + tot vnitatibus quæ non excedant $\frac{16}{1}$. Vnde ſi ponas latus illud 104 N. + 4 incides in abſurdum, nam fiet 1 N. $\frac{105}{832}$ per quem reſoluendo hypoſtaſes, primus numerus inuenitur minor nihilo, & ſic de aliis.

Denique ne nos ignauiæ arguat Xilander, examen quæſtionis ſubiicere libet. Summa trium numerorum eſt [illegible] quadratus à latere $\frac{215}{31}$. Quadratus autem primi nempe [illegible] adſcito ſecundo quadratum facit [illegible] à latere [illegible]. Quadratus porrò ſecundi, nempe [illegible] adſcito tertio quadratum facit [illegible] à latere [illegible]. Denique quadratus tertij, nempe [illegible] adſumpto primo quadratum conficit [illegible] à latere [illegible].

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt cuiuſuis ipſorum quadratus dempto qui eum ordine ſequitur, faciat quadratum. Ponatur rurſus medius 4. N. & quia volo primi quadratum dempto ſecundo facere quadratum, oportet inuenire quadratum, qui demptis 4 N. faciat quadratum. Quæro primùm duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 4 N. hi ſunt qui eum metiuntur 2 N. & 2. Nunc ergo ſummæ illorum ſemiſſem capiens,

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος τὸν ἑξῆς λείψας ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ μέσος ἀριθμῶν δ̄. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, λείψει τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τὶς τετράγωνος λείψας ςς^{οὶ} δ̄ ποιεῖ τετράγωνον, καὶ ζητῶ πρότερον ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ ἐστὶ ςς^{ῶν} δ̄. μετροῦσι δὲ ἀριθμοὶ β̄ μ^{ο} β̄ τῶν τῆς συνθέσεως αὐτῶν λαβὼν τὸ ἥμισυ, τάσσω τὸν πρῶτον ἀριθμῶν ᾱ μ^{ο} ᾱ. καὶ λέλυταί·

μοι ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, τουτέστι δυνάμεις ιϛ̄ λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν δυνάμεων ιϛ̄ ἀφέλωμεν τινα τετράγωνον, ἕξομεν τὸν τρίτον. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ἀριθμῶν δ̄ λείψει μονάδος ᾱ. γίνονται δυνάμεις ιϛ̄ μ° ᾱ λείψει ἀριθμῶν η̄. ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ δυ ιϛ̄. λοιπός ἐστι ὁ τρίτος ϛϛ η̄ λείψει μ° ᾱ. καὶ λέλυται ἕτερον ἐπίταγμα. πάλιν ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς, τουτέστι ἀριθμοὺς ιγ̄ ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω δυ ρξθ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δυνάμεις ιγ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος δυ ιγ̄ μ° ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος δυνάμεις νβ̄. ὁ δὲ τρίτος δυ ρδ̄ λείψει μ° ᾱ. καὶ πάλιν λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον ↑ τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετραγώνου λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ δυδυ ͵αωιϛ̄ ↑ δυ σκᾱ. ἴσας τετραγώνῳ, καὶ πάντα παρὰ δύναμιν, γίνονται δυ ͵αωιϛ ↑ μ° σκᾱ ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ ρδ̄ ↑ μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ° ρια̅ ρδ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ιζ. μ° ϡπθ ͵αωιϛ. ὁ δὲ δεύτερος ξδ. μ° ͵χϟβ ͵αωιϛ. ὁ δὲ τρίτος ρκζ. φξη ͵αωιϛ.

pono primum 1 N. + 1. ſic vni poſtulatorum ſatisfit. Rurſus quoniam volo ſecundi quadratum, hoc eſt 16 Q. dempto tertio facere quadratum, ſi abs 16. Q. auferamus aliquem quadratum, habebimus tertium. Formo quadratum à 4 N. − 1. fit 16 Q. + 1 − 8 N. hunc aufero de 16. Q. relinquitur tertius 8 N. − 1. & alteri poſtulato ſatisfactum eſt. Rurſus quia volo trium ſummam, hoc eſt 13 N. æquari, quadrato eſto 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad poſitiones. Erit primus quidem 13 Q. + 1. ſecundus 52 Q. tertius autem 104 Q. − 1. & rurſus indefinitè tribus poſtulatis eſt ſatisfactum. Supereſt vt & tertij quadratus dempto primo faciat quadratum. Sed tertij quadratus dempto primo facit 10816 QQ. − 221 Q. æquale quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fiunt 10816 Q. − 221. æqualia quadrato à latere 104 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{111}{104}$. Erit primus $\frac{170989}{10816}$ ſecundus $\frac{640692}{10816}$ tertius $\frac{1270568}{10816}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Eodem quo in ſuperiori quæſtione vſi ſumus ratiocinio hanc quoque ſoluemus & ad quotlibet numeros extendemus.

IN QVAESTIONEM XVIII.

OMNIA quæ ad præcedentem dicta ſunt, hîc etiam locum habent, vt non opus ſit ea repetere. Eodem errore lapſus eſt Xilander, cùm notam QQ. temerè inſerit loco notæ Q. ſed & falſos exhibet numeros ſolutionis, vt videre eſt ex comparatione verorum quos in Diophanti contextu repoſuimus. Examen quæſtionis tale eſt. Summa trium numerorum fit $\frac{2082249}{10816}$ quadratus à latere $\frac{1443}{104}$. A quadrato primi qui eſt $\frac{29237238121}{116985856}$ ſi auferas ſecundum, ſupereſt quadratus $\frac{22307513449}{116985856}$ à latere $\frac{149357}{10816}$. A quadrato ſecundi qui eſt $\frac{410486238864}{116985856}$ ſi auferas tertium, ſupereſt quadratus $\frac{396743775376}{116985856}$ à latere $\frac{629876}{10816}$. Denique à quadrato tertij qui eſt $\frac{1614343042624}{116985856}$ ſi auferas primum, ſupereſt quadratus $\frac{1612493625600}{116985856}$ à latere $\frac{1269840}{10816}$. Hic etiam vides in Græco ita exprimi ſolutionis numeros, vt Myriades à reliquis vnitatibus diſtinguantur, quod familiare eſſe Diophanto iam monuimus ad vigeſimam ſecundam tertij.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσαι μονάδες κυβικαὶ η̄ λείψει κυ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον

INVENIRE duos numeros, vt primi cubus adſcito ſecundo faciat cubum, at ſecundi quadratus adſcito primo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſecundus ergo erit 8 − 1 C. & cubus prioris adſumens ſecundum fit cubus. Reſtat vt & quadratus ſecundi adſumpto primo fa-

ciat quadratum, ſed ſecundi quadratus adſumpto primo facit 1 CC. + 1 N. + 64 − 16 C. hæc æquantur quadrato a latere 1 C. + 8. hoc eſt 1 CC. + 16 C. + 64. & additis vtrimque communibus defectibus, & auferendo ſimilia à ſimilibus relinquuntur 32 C. æquales 1 N. & omnibus per numerum diuiſis 32 Q. æquantur 1. & eſt 1. quadratus. Quare ſi 32 Q. eſſet quadratus, explicari poſſet æquatio. Sed 32. Q. proueniunt ex duplo 16. C. Ipſi autem 16 C. orti ſunt ex duplo producti 8. in 1. C. hoc eſt ex duplo ipſius 8. Proinde 32 Q. gignuntur ex quadruplo eiuſdem 8. Id ergo mihi incumbit, vt inueniam cubum qui quater ſumptus faciat quadratum. Eſto quæſitus 1 C. hic quater fit 4 C. æquandus quadrato. Eſto 16 Q. fit 1 N. 4. Ad poſitiones erit cubus 64. Pono itaque ſecundum 64. − 1 C. & ſupereſt vt quadratus ſecundi adſumpto primo faciat quadratum. Sed quadratus ſecundi adſumpto primo facit 1 CC. + 4096. + 1 N. − 128 C. hoc ergo æquatur quadrato à latere 1 C. + 64. hoc eſt 1 CC. + 4096 + 128 C. & reliquuntur 256 C. æquales 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. ſecundus $\frac{262143}{4096}$.

κύβος. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυβοκύβον ᾱ ς^ᾱ μο ξδ λείψει κυ ις. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς κυ ᾱ μο η̄. τουτέστι κυ κυ ᾱ κυ ις μο ξδ. καὶ κοινῶν προστιθεμένων τῶν λειπόντων, καὶ ἀφαιρουμένων τῶν ὁμοίων ἀπὸ τῶν ὁμοίων, λοιποὶ κυ λβ ἴσοι ς^ᾱ. καὶ πάντα παρὰ ς^ δυ λβ ἴσοι μο ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μο τετράγωνος, καὶ δυ λβ εἰ ἦσαν τετράγωνος λελυμένη ἄν μοι ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' αἱ δυ λβ εἰσὶ δὶς κυ ις. οἱ δὲ κυ ις εἰσὶν ἀπὸ τοῦ δὶς μο η̄. καὶ τοῦ κυ ᾱ. τουτέστι δὶς τῶν μο η̄. ὥστε αἱ λβ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῶν η̄ μο γίγνονται. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν κύβον ὃς τετράκις γενόμενος ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος κυ ᾱ. οὗτος τετράκις γενόμενος ποιεῖ κυ δ̄ ἴσους τετραγώνῳ. ἔστω δυ ις. καὶ γίνεται ὁ ς μο δ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ κύβος μο ξδ. τάσσω ἄρα τὸν δεύτερον μο ξδ λείψει κυ ᾱ. καὶ λοιπὸν δεῖ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυ κυ ᾱ μο δϛϛ ς^ᾱ ⸕ κυ ρκη. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς κυ ᾱ μο ξδ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος κυ κυ ᾱ μο δϛϛ κυ ρκη. καὶ γίνονται λοιποὶ κυ σνς ἴσοι ἀριθμῷ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ᾱ ις^. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος ᾱ ις^ ὁ δὲ δεύτερος κϛ βρμγ δϛ^.

IN QVAESTIONEM XIX.

TEXTVS lacunas repleuimus, vt vides; quo præſtito parum, aut nihil ſupereſt difficultatis in huius quæſtionis tractatione. Vnum eſt quod moneam numeri quadrato æquandi 1 CC. + 4096 + 1 N. − 128 C. latus ingenioſè fingi 1 C. + 64. vt quadrato vtriuſque partis fiant 1 CC. + 4096. ac proinde cubocubis & vnitatibus vtrimque ſublatis, maneat æquatio inter Cubos & Numeros, vnde fit ſolutio rationalis, quia prouiſum eſt, vt vtraque Cuborum & Numerorum multitudo ſit quadratus Numerus, lemmatis ſcilicet auxilio, quo reperitur cubus, cuius quadruplum, faciat quadratum. Poſſumus etiam ex ipſa operatione ſatis expeditum formare Canonem, hac arte.

Sume $\frac{1}{64}$ cuiuſlibet cubocubi, & per illius latus quadratum, diuide vnitatem, quotiens erit primus quæſitorum. Huius cubum aufer ab $\frac{1}{64}$ ſumpti cubocubi, relinquetur ſecundus.

Vt ſumpto cubocubo 64. erit illius $\frac{1}{16}$. 4. cujus latus 2. per quod ſi diuidas 1. fit $\frac{1}{2}$ primus quæſitorum, cuius cubum $\frac{1}{8}$ ſi auferas ab $\frac{1}{64}$ ipſius 64. videlicet ab 1. relinquetur ſecundus $\frac{7}{8}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{7}{8}$. Nam primi cubus adſumpto ſecundo facit cubum 1. At ſecundi quadratus adſumpto primo, facit quadratum $\frac{81}{64}$.

Quod ſpectat ad verbum δεχαρίνειν, quo in hac & in ſequenti quæſtione, & alibi etiam vſum eſſe Diophantum exiſtimat Xilander, pro eo quod eſt quadruplicare, moneo adulterinam vocem librarij inſcitia, vel oſcitantia in textum Diophanti irrepſiſſe pro vera & germana τετράκις, quam vbique repoſui. Porrò erroris anſam præbuit quod hæc vox vt plurimum expreſſa erat nota quaternarij δ cum κ ſuperſcripto, hoc modò δκ, vnde δεχαρίνειν ſciolus neſcio quis efformauit. Sic propoſitione iſta poſt illa verba, ὥστε αἱ λβ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῶν η̄ μο, ſtatim ſequitur in codice manu exarato, γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν κύβον, ὃς δκ γενόμενος ποιεῖ τετράγωνον.

V iij

Tum paulò poſt. ἐστὶ διακεκριμένος γενόμενος, &c. Vbi patet idem eſſe prorſus quod primo poſitum eſt τετράκις, deinde δὲ demum διακεκριμένος. Vigeſima etiam propoſitione ſequente eadem dictio ter repetitur, vbi euidens eſt eam loco τετράκις eſſe poſitam. Primo enim legitur, ἀλλὰ δὶς οἱ ςς οἱ ἐπὶ δὶς τοὺς ςς ους. ὁ διακεκριμένος ὑπὸ τῶν ςς ἐστι. Deinde θέλω οὖν τὸν διακεκριμένον ὑπ' αὐτῶν, &c. Ac demum, ἀλλὰ μὴν καὶ πάντων δύο ἀριθμῶν ὁ διακεκριμένος ὑπ' αὐτῶν, &c. Vbi etiam, ὁ διακεκριμένος ὑπ' αὐτῶν. mutatur ſtatim in τετράκις ὑπ' αὐτῶν. Sequitur enim ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν, &c. Faceſſat igitur ſubreptitia vox, & eius inſolentiam cum Xilandro miretur nemo. Equidem me non latet verbum διακρίνειν inter ea quibus vtuntur Arithmetici cõnumerari à Polluce lib. 4. cap. 22. ſed quo ſenſu ſoleat vſurpari non docet Pollux. Ergo ſanè nunquam adducar, vt credam ſumi pro eo quod eſt quadruplicare. Quid autem ſignificet doceant eruditi.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μο α. ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὴν μο. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςς ὅσων δήποτε, καὶ μο α. ἔστω ς α. μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ α. ςς β. μο α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μο α. λοιπὸν δυ α. ςς β. ἔσται τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ς α μο β. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον μετὰ μο α. ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μο α. ἕξω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου. πλάσσω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ςς γ μο α. ἔσται ὁ τετράγωνος δυ θ ςς ς. μο α. ἐὰν ἄρα ἀφέλω μο α γίνονται δυ θ ςς ς. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου εἶναι δυ θ ςς ς. ὧν ὁ δεύτερος ἐστι ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς θ. μο ς. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι δυ θ. ςς κδ μο ιγ. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔχω τὰς δυνάμεις τετραγωνικάς, εἰ δὲ καὶ αἱ μονάδες ἦσαν τετραγωνικαί, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν δυνάμεων καὶ τῶν μονάδων ἴσον ἦν τοῖς ἀριθμοῖς, ἦν ἂν ἀορίστως τὰ τρία ἐπιτάγματα λελυμένα. ἀλλ' αἱ μονάδες ιγ. εἰσὶν ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν μο β καὶ μο ς. μετὰ μο α. ἀλλ' αἱ μὲν μο. β. ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ς α καὶ μο α. αἱ δὲ μο ς πάλιν ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ςς γ. καὶ μο α, θέλω οὖν δὶς τοὺς ςς ἐπὶ δὶς τοὺς ςς μετὰ μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ δὶς οἱ ςς ἐπὶ δὶς τοὺς ςς. ὁ τετράκις ὑπὸ τῶν ςς ἐστι. θέλω οὖν τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ μὴν καὶ πάντων δύο

INVENIRE tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, adſcita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in ſecundum addita vnitate facere quadratum, ſi ab aliquo quadrato abſtulero vnitatem, habebo productum ex primo in ſecundum. Formo quadratum à numeris quotcunque & vnitate. Eſto ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. hinc ablata vnitate, quod ſupereſt 1 Q. + 2 N. eſt productum ex primo in ſecundum. Eſto ſecundus 1 N. Primus ergo erit 1 N. + 2. Rurſus quia volo productum ex ſecundo in tertium facere quadratum adſcita vnitate, ſi eodem modo ab aliquo quadrato abſtulero vnitatem, habebo productum ex ſecundo in tertium. Formetur quadratus a 3 N. + 1. erit is 9 Q. + 6 N. + 1. vnde ablata vnitate, relinquuntur 9 Q. + 6 N. Oportet ergo productum ex ſecundo in tertium eſſe 9 Q. + 6 N. At ſecundus eſt 1 N. erit igitur tertius 9 N. + 6. Rurſus quia volo productum ex primo in tertium addita vnitate facere quadratum, erit vtique 9 Q. + 24 N. + 13. æqualis quadrato. Et numerus quadratorum eſt quadratus. Quod ſi etiam vnitates quadratæ eſſent, & duplum producti ex latere quadratorum in latus vnitatum æquale eſſet Numeris, indefinitè iam ſatisfactum eſſet tribus poſtulatis. At vnitates 13. fiunt ducto 2. in 6. & addita vnitate. Porro 2. fit ex 1 N. in 1. bis. At 6. fiunt ex 3 N. in 1. etiam bis. Volo itaque vt bis numeri in bis numeros ducti faciant quadratum adſcita vnitate. Sed bis nume-

ri in bis numeros eſt quadruplum producti ex numeris in numeros. Volo igitur quadruplum hoc addita vnitate facere quadratum. Enimuero quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti, quadruplum cum quadrato interualli ipſorum facit quadratum. Proinde ſi quadratum interualli conſtituamus vnitatem, quadruplum producti adſcita vnitate faciet quadratum. Atqui ſi quadratorum interuallum ſit 1. erit & laterum interuallum 1. Oportet ergo formare quadratos a numeris deinceps, puta ab 1 N. + 1. & a 2 N. + 1. Quadratus ab 1 N. + 1. fit 1 Q. + 2. N. + 1. Vnde ablata vnitate relinquitur 1 Q. + 2 N. Quare oportet productum ex primo in ſecundum eſſe 1. Q. + 2 N. Ponatur ſecundus 1 N. ergo primus erit 1 N. + 2. Rurſus quia quadratus abs 2 N + 1. eſt 4 Q. + 4 N. + 1. Vnde ſublata vnitate relinquitur 4 Q. + 4 N. oportet productum ex ſecundo in tertium eſſe 4 Q. + 4 N. Sed ſecundus eſt 1. N. Ergo tertius erit 4 N. + 4. Atque ita ſoluta eſt quæſtio indefinitè, vt bini quique mutua multiplicatione producant numerum qui addita vnitate fiat, quadratus. Et fit 1 N. quot quis voluerit vnitatum. Hoc enim eſt indefinitè quærere, cùm ita poſitiones inſtituuntur, vt quamcunque numeri æſtimationem iis accommodes, ſemper poſtulatis ſatisfiat.

ἀριθμῶν ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖ τετράγωνον. εἰ οὖν ὁ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μο α. καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστὶ μονὰς μία. δεῖ οὖν ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ἀριθμῶν πλάσσειν τετραγώνους. ἔστω ἀπὸ ς α. καὶ ἀπὸ ςς β μο α. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἀπὸ ς α μο α. τετράγωνος δυ α. ςς β. μο α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μονάδα, λοιπὸς γίνεται δύναμις μία, ςς β. δεῖ ἄρα τὸ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου εἶναι δυ α ςς β. τετάχθω ὁ δεύτερος ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς α μο β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ ςς β μο α τετράγωνός ἐστι δυ δ. μο α. ἐὰν ὁμοίως ἀφέλω τὴν μονάδα μίαν λοιπὸς γίνεται δυ δ ςς δ. δεῖ δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου εἶναι δυ δ ςς δ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστιν ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς δ. καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ὅσου τις θέλει. τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστιν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας σώσῃ τὸ ἐπίταγμα.

OBSERVATIO D. P. F.

Proponatur inuenire tres numeros vt quem bini producunt mutuâ multiplicatione adſcitâ vnitate faciat quadratum & præterea vnuſquiſque trium adſcitâ vnitate faciat quadratum.

Hujus quæſtionis ſolutionem ſubiungemus & jam confecta eſt. Ita fiat ſolutio indefinita præſentis quæſtionis vt vnitates primi & tertij numeri addita vnitate conficiant quadratos v. g. ſint tres numeri indefinitè primus [illegible] N. + [illegible] Secundus 1 N. Tertius [illegible] N + [illegible] Patet ſolutionem hanc indefinitam ſatisfacere conditionibus huius quæſtionis ſecundæ.

Supereſt vt ſinguli ex illis numeris adſcitâ vnitate conficiant quadratos & orietur triplicata æqualitas cuius ſolutio erit in promptu ex noſtrâ methodo cum numerus vnitatum in quolibet ex iſtis numeris vnitate auctis ſit quadratus.

IN QVAESTIONEM XX.

LEMMA quod aſſumit Diophantus, nimirum, Quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti quadruplum cum quadrato interualli ipſorum, facit quadratum, idem eſt prorſus cum quinta ſecundi poriſmatum, per quam conſtat etiam fieri inde quadratum ſummæ ipſorum numerorum. Vnde optimè concludit Diophantus, ſi Numeri vnitate diſtent, quadruplum producti eorum adſcita vnitate facere quadratum. Sed & hinc colligo vniuerſaliùs.

Si quadruplum producti duorum numerorum vnitate diſtantium ducatur in quemlibet quadratum, & producto addatur idem quadratus, fit quadratus,

Hoc enim nil aliud eſt quàm quadratum ſummæ duorum numerorum vnitate diſtantium ducere in alium quadrarum. Quamobrem inde produci quadratum neceſſe eſt. Ita ſi ſedecuplo producti addas 4. fiet quadratus, hoc enim idem eſt ac ducere quadratum ſummæ numerorum in 4. At ſi trigecuplo ſeſcuplo producti addas 9. fiet etiam quadratus, hoc enim idem eſt ac ducere quadratum ſummæ numerorum in 9. & ſic de aliis.

Cæterùm ſi quid obſcuritatis eſt in huius quæſtionis tractatione, hoc vnum eſſe videtur, quòd non ſtatim apparet quomodo poſitionibus trium numerorum ſumptis à quadratis continenter proximis conſtet productum ex primo in tertium adſcita vnitate facere quadratum. Hoc ergo vt perfectè demonſtretur, ſit primus A + B. tertius C. + D. (nam ſecundus ſemper ponitur 1 N.) & methodo à Diophanto tradita ſint A & C. Numerorum numeri quadrati continenter proximi. Ipſi verò B D ſint vnitatum numeri dupli laterum ipſorum A C. Ductoque A in C.

A 4 N. + B 4.	H 2.
C 9 N. + D 6.	K 3.
E 36 Q. + F 60 N. + G 25.	

fiat E quadratorum numerus, ductiſque A in D. & B in C. fiat ſumma productorum F Numerorum numerus. Denique ducto B. in D. & producto addendo vnitatem fiant G. vnitates, dico ipſum E + F + G. eſſe quadratum. Hoc vt probetur, oportet oſtendere ipſos E. G. quadratos eſſe, & ex latere vnius in latus alterius bis produci F. ſic enim per quartam ſecundi totum E F G quadratum eſſe conſtabit. Itaque cùm numeri Numerorum A C quadrati ſint continenter proximi, ſumantur eorum latera H K quæ vnitate diſtent. Primùm igitur patet ex quadrato A in quadratum C. productum E eſſe quadratum, cuius latus eſt productus ex H in K. Secundo, quia B duplus eſt ad H, & D ad K productus ex B in D. adſcita vnitate, puta G. æquatur quadruplo producti ex H. in K. adſcita vnitate. Igitur G. quadratus eſt per lemma ſupra explicatum, cuius latus eſt ſumma ipſorum H K. Denique quia F conſtat productis ex A in D & ex C in B. ſeu ex A in K bis, & ex C. in H. bis. At producti ex A in K. & ex C in H. ſemel * æquantur productis ex ſumma ipſorum H K in planum
18. 2. poriſ. ſub ipſis contentum, ac proinde ſumma productorum ex A in D. & ex C in B. ſeu F æquatur duplo producti ex ſumma ipſorum H K in planum ſub ipſis, latus autem ipſius G eſt ſumma ipſorum H K, & latus ipſius E eſt planus ſub H K contentus, vt oſtenſum eſt, patet F produci ex latere ipſius E in latus ipſius G. bis Quamobrem totus E F G quadratus eſt, cuius latus conſtat ex lateribus ipſorum E G. Quod erat demonſtrandum.

Hinc apparet poſito ſecundo ſemper 1 N. poſitiones primi & tertij infinitis modis poſſe variari, dum ſumantur duo numeri Numerorum quadrati, quorum latera vnitate diſtent, & his addantur vnitates quæ ſint duplum lateris cujuſlibet. Sic poſuit eos Diophantus 1 N. + 2. & 4 N. + 4. Poni etiam poterant 4 N. + 4. & 9 N. + 6. vel adhuc 9 N. + 6. & 16 N. + 8. & ſic in infinitum.

Hanc autem quæſtionem ſi libet non ſoli vnitati applicabis, ſed ad quemlibet quadratum extendes eodem prorſus artificio, ampliando lemma Diophanti, vt ſuprà docuimus. Verbi gratia, quærantur indefinitè tres numeri, vt bini quem producent mutuo ductu is adſcito 9. faciat quadratum. Vt habeas productum ex primo in ſecundum, aufer 9. ab aliquo quadrato, cuius latus ſit quotcunque Numerorum + 3. ſit latus 1 N. + 3. erit quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Ergo productus ex primo in ſecundum erit 1 Q. + 6 N. ſit ſecundus 1 N. erit igitur primus 1 N. + 6. Rurſus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 N. + 3. (vt ſcilicet numerus Numerorum ſuperet vnitate numerum Numerorum lateris prioris quadrati) erit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. vnde auferendo 9. manet productus ex ſecundo in tertium 4 Q. + 12 N. Quare cùm ſecundus ſit 1 N. erit tertius 4 N. + 12. Igitur tres numeri quæſtionem infinitè ſoluentes ſunt 1 N. + 6. 1 N. 4 N. + 12. Porro lemma Diophanti hic ampliari intelligitur modo ſupra tradito, nam patet 6. vnitates primi Numeri eſſe ſeſcuplum numerorum lateris prioris quadrati, & 12. vnitates tertij Numeri eſſe ſeſcuplum Numerorum poſterioris quadrati. Quare cùm productus ex ſeſcuplo vnius numeri in ſeſcuplum alterius, ſit æquale trigecuplo ſeſcuplo producti eorundem numerorum, patet hîc ſupponi, trigecuplum ſeſcuplum producti duorum numerorum vnitate diſtantium, adſcito 9. facere quadratum, quod ſanè concluditur per ſupradictum lemma.

Hæc quidem Diophanti veſtigiis inſiſtendo facilè fuit excogitare. Verùm ſi propoſitum ſit inuenire tres numeros indefinitè, vt bini quem producunt mutuo ductu, is adſcito quocunque numero quadratum faciat; iam non licebit Diophantæam analyſim imitari. Nec fortè temerarium fuerit aſſerere huius problematis enodationem ipſum ignoraſſe Diophantum, quod mirum non eſt, quandoquidem, vt veriſſimè cecinit poëta, Non omnia poſſumus omnes. Nobis tamen ope Canonum ad duodecimam tertij traditorum, rem abſoluere pronum erit. Etenim ſit propoſitum quærere indefinitè tres numeros, vt bini quem producunt adſcito 6. faciat quadratum. Fingantur duo quadrati à quotlibet numeris Numerorum diuerſis + eodem numero vnitatum, cuius quadratus ſuperet 6. puta fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 3. & 2 N. + 3. erunt hi 1 Q. + 6 N. + 9. & 4 Q. + 12 N. + 9. auferatur 6. ab vtroque, & reſidua diuidantur per interuallum laterum quod eſt 1 N. fiet ergo primus quæſitorum 1 N. + 6 + $\frac{3}{1N}$. ſecundus 4 N. + 12 + $\frac{3}{1N}$. tertius 1 N. qui ſatisfaciunt poſtulatis ex Canone primo duodecimæ tertij. vel iiſdem manentibus primo & ſecundo, erit

erit tertius duplum ſummæ illorum multatum laterum interuallo 1 N. puta 9 N. + 36 + [illegible]. vt conſtat ex ſecundo Canone. Eadem arte per Canones ad decimam tertiam tertij traditos licebit & hanc ſoluere quæſtionem.

Inuenire tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutuo ductu, detracto quouis dato numero quadratum relinquat.

Datus eſto 10.

Fingantur duo quadrati, alter à quotlibet vnitatibus, alter ab 1 N. + latere prioris. Sint igitur latera 1. & 1 N. + 1. erunt quadrati 1. & 1 Q. + 2 N. + 1. Vtrique addatur 10. & ſummæ diuidantur ſigillatim per laterum interuallum 1 N. Eritque primus quæſitorum $\frac{11}{1N}$. ſecundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. tertius horum ſummæ duplum multatum 1 N. puta 1 N. + 4 + 44 − 1 N. vel iiſdem manentibus primo & ſecundo, erit tertius ipſum interuallum laterum, nimirum 1 N.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE quatuor numeros, vt qui fit ex binorum mutua multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in ſecundum cum vnitate facere quadratum, ſi ab aliquo quadrato detraxero vnitatem, habebo productum ex primo in ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. + 1. & fit 1 Q. + 2 N. + 1. hinc aufero vnitatem, reſtant 1 Q. + 2 N. pro producto ex primo in ſecundum eſto primus 1 N. ergo ſecundus erit 1 N. + 2. Rurſus quia volo productum ex primo in tertium cum vnitate facere quadratum, formo quadratum abs 2 N. + 1. nimirum a numeris continenter proximis, ob ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, & ab illius quadrato, aufero vnitatem, & ſtatuo productum ex primo in tertium 4 Q. + 4 N. Quare cùm primus ſit 1 N. erit vtique tertius 4 N. + 4. Rurſus quia volo productum ex primo in quartum cum vnitate facere quadratum, formo quadratum à numeris continenter proximis, nimirum a 3 N. + 1. & à quadrato ſublata vnitate ſtatuo productum ex primo in quartum 9 Q. + 6 N. Proinde cùm primus ſit 1 N. erit quartus 9 N. + 6. & contingit prætereà productum ex tertio in quartum cum vnitate facere quadratum. Cæterùm ex ſecundo in quartum productus addita vnitate facit 9 Q. + 24 N. + 13. Hoc ergo æquandum quadrato, eſto latus 3 N. − 4. & fit N. $\frac{1}{16}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. ſecundus $\frac{33}{16}$. tertius $\frac{68}{16}$. quartus $\frac{105}{16}$.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν περιλαβὼν μονάδα μίαν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μετὰ μονάδος μιᾶς, εἶναι τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἄρω μο α. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ς° ᾱ μ° ᾱ καὶ γίνεται αὐτὸς ὁ τετράγωνος δυ ᾱ ςς β̄ μ° ᾱ. ἐὰν ἀφέλω τὴν μ° ᾱ. λοιπὸς γίνεται δυ μία ςς β̄ ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ πρῶτος ς° ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται ς° ᾱ μ° β̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςς β̄ μ° ᾱ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς διὰ τὸ προδειχθὲν, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ. αἴρω τὴν μονάδα ᾱ. καὶ τάσσω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου δυνάμεις δ̄ ςς δ̄. ὧν ὁ πρῶτος ἐστὶ ς° ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ̄ μ° δ̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ςς γ̄ μ° ᾱ. καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ, καὶ ἀφελὼν μ° ᾱ. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου δυ θ̄ ςς ς̄. ὧν ὁ πρῶτος ἐστὶ ἀριθμὸς ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται ςς θ̄, μ° ς̄. καὶ ἔτι συμβαίνει τὸν ὑπὸ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τετάρτου μετὰ μ° ᾱ. ποιεῖ δυνάμεις θ̄ ςς κδ̄. μ° ιγ̄ ἴσας τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ̄ λείψει μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° ᾱ ιϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ᾱ ιϛ. ὁ δὲ δεύτερος λγ̄ ιϛ. ὁ δὲ τρίτος ξη̄ ιϛ. ὁ δὲ τέταρτος ρε̄ ιϛ.

OBSERVATIO D. P. F.

INueniantur tres numeri quilibet vt qui ſit binorum mutuâ multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum, v. g. ſint illi numeri 3. 1. 8. quæratur iam quartus eâ

X

conditione vt qui fit ſub tribus inuentis ſigillatim in quartum adſcita vnitate ſit quadratus, ponatur inueniendus eſſe 1 N. ergo 3 N + 1. item 5 N + 1. item 8 N + 1. æquantur quadrato & oritur triplicata æqualitas cuius ſolutio inuentioni noſtræ debetur. Vide quæ adnotauimus ad quæſtionem 24. libri 6.

IN QVAESTIONEM XXI.

NON apparet ex verbis Diophanti quomodo producti ex ſecundo in tertium, & ex tertio in quartum adſcita vnitate quadratum faciant. Id autem omiſit quaſi euidens ex lemmate præcedentis quia ſecundus, tertius & quartus finguntur à quadratis continenter proximis, vnde ſequitur ex ſupra demonſtratis productos ex duobus proximis, videlicet ex ſecundo in tertium, & ex tertio in quartum addita vnitate facere quadratos. Quamobrem cùm etiam ex conſtructione manifeſtum ſit productos ex primo in ſingulos ex aliis addita vnitate facere quadratos, vnum ſanè reſtat curandum, vt ſcilicet productus ex ſecundo in quartum adſcita vnitate fiat quadratus. Fit autem 9 Q. + 24 N. + 13. hoc ego æquabimus quadrato à latere 3 N. – tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 13. vt à 3. N. – 4. cum Diophanto.

Hæc etiam quæſtio ad quemlibet quadratum extendi poteſt, eodem artificio quo præcedens. verbi gratia. Quærantur quatuor numeri, vt bini quem producunt adſumpto 4. quadratus fiat. Poſito primo 1 N. fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 2. 2 N. + 2. 3 N. + 2 erunt hi 1 Q. + 4 N. + 4. 4 Q. + 8 N. + 4. 9 Q. + 12 N. + 4. A ſingulis auferatur 4. & erit productus ex primo in ſecundũ 1 Q. + 4 N. ex primo in tertium 4 Q. + 8 N. ex primo in quartum 9 Q. + 12 N. Quare cùm primus ſit 1 N. erit ſecundus 1 N. + 4 tertius 4 N. + 8. quartus 9 N. + 12 & quidem tam ex conſtructione, quàm ex demonſtratis ad precedentem, conſtat productos ex primo in ſingulos ex aliis, itemque productos ex ſecundo in tertium, & ex tertio in quartum adſumpto 4. facere quadratos. Supereſt igitur vt productus ex ſecundo in quartum adſcito 4. faciat quadratum. Sed facit 9. Q. + 48 N + 52. hoc ergo æquatur quadrato ſit eius latus 3 N. – 8 fit 1 N. $\frac{1}{8}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{1}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{17}{2}$. $\frac{105}{8}$. Producti ex primo in reliquos, adſcito 4. faciunt quadratos $\frac{289}{64}$. $\frac{81}{16}$. $\frac{361}{64}$ quorum latera $\frac{17}{8}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{19}{8}$. Producti ex ſecundo in tertium & quartum adſumpto 4. faciunt quadratos $\frac{625}{16}$. $\frac{3721}{64}$. quorum latera $\frac{25}{4}$. $\frac{61}{8}$. Denique productus ex tertio in quartum adſcito 4. quadratum facit $\frac{1849}{16}$. cuius latus $\frac{43}{4}$.

Cæterùm quomodo in vniuerſum ſolui poſſit huiuſmodi quæſtio, vt ſcilicet productus ex binorum mutuo ductu adſcito quocumque dato numero faciat quadratum colligi non poteſt ex Diophanto, & id eum latuiſſe audacter aſſerere auſim; alioquin non in ſola vnitate vel in ſolis quadratis perfeciſſet, quod in omnibus numeris abſoluere poterat. Nos pulcherrimum hoc problema explicauimus ad duodecimam tertij. Et rurſus idem perfecimus additione in detractionem mutata ad decimam tertiam eiuſdem.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἀνάλογον, ὅπως δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^ος α. ὁ δὲ μέσος ς^ος α. μ° δ. ἵνα ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ὁ δὲ τρίτος ς^ος α. μ° ιγ. ἵνα καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ εἰ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος, ἦν ἂν ἀναλελυμένον ἐν τῷ ἀορίστῳ, δύο ὁποιωνοῦν, ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνος. ὁ δὲ μέγιστος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει μ° ιγ. αἱ δὲ μονάδες ιγ. σύνθεμά εἰσι τετραγώνων τοῦ δ. καὶ τοῦ θ. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν δύο τετραγώνους. ἴσους ἑνὶ τετραγώνῳ τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ἀπὸ τριγώνου ὀρθογωνίου. ἔστι δὲ ὁ θ. καὶ ὁ ις. καὶ τάσσω τὸν μὲν ἐλάχιστον ς^οῦ α. τὸν δὲ μέσον ς^οῦ α μ° θ. τὸν δὲ τρίτον ς^οῦ α. μ° κε. καὶ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχή ἐστι τετράγωνος. λοιπὸν ἐστι αὐτοὺς ἀνάλογον εἶναι. ἐπεὶ δὲ τρεῖς ἀριθ-

INVENIRE tres numeros proportionales, vt duorum quorumlibet interuallum ſit quadratus numerus. Ponatur minor 1 N. Medius 1 N. + 4. vt interuallum ſit quadratus. Tertius autem ſit 1 N. + 13. vt & huius exceſſus ſupra medium ſit quadratus. Porrò ſi maximi & minimi differentia eſſet quadratus, iam indefinitè ſatisfactum eſſet parti quæſtionis qua poſtulatur, vt differentia duorum quorumlibet ſit quadratus. At maximus minimum ſuperat vnitatibus 13. & 13. eſt ſumma quadratorum 4. & 9. Quærendi igitur ſunt duo quadrati æquales quadrato. Quod facilè fit trianguli rectanguli ſumptis lateribus, ſuntque 9. & 16. ſtatuo minimum 1 N. Medium 1 N. + 9 tertium 1. N. + 25. & ſic duorum quorumlibet

interuallum quadratus eſt. Supereſt vt ipſi ſint proportionales. At cùm tres numeri proportionales ſunt, qui ſub extremis continetur æqualis eſt quadrato medij, ſed contentus ſub maximo & minimo, hoc eſt ſub extremis eſt 1 Q. + 25 N. Quadrâtus autem medij eſt 1 Q. + 18 N. + 81. Hæc ergo æquantur inter ſe, & fit 1 N. $\frac{81}{7}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{81}{7}$. ſecundus $\frac{144}{7}$. tertius $\frac{225}{7}$.

καὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστιν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐστὶ Δ^Υ ᾱ ςς̄ κε̄. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ μέσου Δ^Υ ᾱ ςς̄ ιη̄ μ° πᾱ. ἴσαι Δ^Υ ᾱ ςς^{οὶ} κε̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ὸ πα^{ῶν} ζ^{ων} ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πα ζ. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ ζ. ὁ δὲ τρίτος σνε ζ.

IN QVAESTIONEM XXII.

TOTA diuerſitas ſolutionum pendet hîc à duobus quadratis qui ſimul iuncti quadratum efficiant, nam ſi vtaris iiſdem, eadem ſemper continget ſolutio, quamuis pro priuio quæſitorum numerorum ſtatuas quemlibet Numerorum numerum, ſic quamuis ſtatuas quæſitos numeros 3 N. 3 N. + 9. & 3 N. + 25. eandem ſolutionem inuenies quam reperit Diophantus poſitis iiſdem numeris 1 N. 1 N. + 9. & 1 N. + 25. & ſic quantumuis varietur primus, dum in ſecundo & tertio ponantur iidem quadrati 9. & 25. eadem continget ſolutio, quod patet experientia, & facile eſt demonſtrare.

Cæterùm eſt quod moneam ex duobus quadratis qui ſimul quadratum conficiunt, minorem ſtatuendum in medio numero, non autem maiorem, ſic Diophantus medium poſuit 1 N + 9. non 1 N. + 16. Quamuis poſito eo 1 N. + 16. tribus quoque poſtulati partibus ſatisfiat, cum binorum interuallum ſit quadratus. Sed in æquatione qua medij quadratus æquatur plano ſub extremis, inueniuntur tandem 32 N. + 256. æquales 25 N. Quod eſt impoſſibile, quia 32 N. ſunt plus quàm 25 N. fiunt autem 32 N. ex duplo quadrati 16. qui poſitus eſt in medio, at 25 N. eſt ſumma quadratorum 16. & 9. Oportet igitur duplum quadrati qui ponitur in medio minus eſſe ſumma quadratorum, quare oportet minorem quadratum collocari in medio. Quandoquidem duplum maioris duorum numerorum excedit ſummam ipſorum, ſicut duplum minoris deficit ab eadem ſumma. Porrò ex ipſa operatione elicitur Canon facillimus.

Sume duos quadratos quadratum conficientes, per horum interuallum diuide quadratum minoris quadrati, orietur primus quæſitorum. Cui ſi addas minorem quadratum, fiet ſecundus. Et huic ſi addas maiorem quadratum, fiet tertius.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE tres numeros, vt ſolidus ſub ipſis contentus adſcito quolibet ipſorum faciat quadratum. Ponatur ſolidus ſub ipſis contentus 1 Q. + 2 N. & & primus 1. vt ſolidus aſcito primo faciat quadratum. Rurſus quia volo ſolidum ſub tribus contentum cum ſecundo facere quadratum, ſi ab aliquo quadrato detraxero 1. Q + 2 N. habebo ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. + 3. huius quadrati detractis 1 Q. + 2 N. facit 4 N. + 9. Pono ergo ſecundum 4 N. + 9. Iam cùm ſolidus ſub tribus contentus ſit 1 Q. + 2 N. & ex primo in ſecundum producatur 4 N. + 9. ſi diuidantur 1 Q. + 2 N. per 4 N. + 9. habebimus tertium. Verùm hæc diuiſio non eſt poſſibilis. Vt autem fieri poſſit curandum eſt vt ſe habeat 1 Q. ad 4 N. ſicut 2 N. ad 9. & permutatim 1 Q. ad 2 N. ſicut 4 N. ad 9.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τῶν αὐτῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς Δ^Υ ᾱ ςς̄ β̄. ὁ δὲ πρῶτος μ° ᾱ. ἵνα ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ πρώτου ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἄρω δύναμιν ᾱ ςς^{οὺς} β̄. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ς^{οῦ} ᾱ μ° γ̄. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος ἄρας Δ^Υ ᾱ ςς̄ β̄. ποιεῖ ςς^{οὺς} δ̄ μ° θ̄. τάσσω οὖν τὸν δεύτερον ςς̄ δ̄ μ° θ̄. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς Δ^Υ ᾱ ςς^{οὶ} β̄. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ςς^{οὶ} δ̄ μ° θ̄. ἐὰν ἄρα Δ^Υ ᾱ ςς^{οὺς} β̄. παραβάλλω παρὰ ςς̄ δ̄ μ° θ̄. ἕξω τὸν τρίτον. ἀδύνατον δὲ ἡ παραβολή, ἵνα δὲ δύνηται ἡ παραβολή, δεῖ εἶναι ὡς Δ^Υ μία πρὸς ςς^{οὺς} δ̄. οὕτως ςς^{οὶ} β̄ πρὸς μονάδας θ̄. καὶ ἐναλλάξ. ὡς Δ^Υ μία πρὸς ςς^{οὺς} β̄. οὕτως ςς^{οὶ} δ̄ πρὸς μ° θ̄. ἡ δὲ

δύναμις μία τῶν ϛϛ β ἥμισύ ἐστι τῷ πλήθει. ὡς εἰ οὖν καὶ ϛϛοὶ δ̄ τῶν μο θ ἥμισυς ἴσοι. ἴσοι ἂν δυνατὴ ἡ παραβολή. ἀλλὰ οἱ ϛϛοὶ δ̄ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσίν, ἧς ὑπερέχουσιν ϛϛοὶ ϛ̄ δυσὶν ἀριθμοῖς, ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ ϛ̄ ἐκ τοῦ δίς εἰσιν, ὑπὸ μο τριῶν καὶ ϛο ᾱ. τουτέστι δὶς τῶν μο τριῶν αἱ δὲ μο θ. ὁ ἀπὸ μο τριῶν ἐστὶ τετράγωνος. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὡς τὰς μονάδας τρεῖς, ὅστις δὶς γενόμενος, καὶ λείψας δυάδα τὸ ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετραγώνου. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛο εἷς. οὗτος δὶς γενόμενος καὶ λείψας δυάδα, γίνεται ϛϛοὶ β̄. ὁ λείψει μο β. ὁ δὲ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετράγωνος ἐστὶ δυ ᾱ. θέλομεν οὖν ἀριθμοὺς β̄ λείψει μο β̄. τὸ ἥμισυ εἶναι δυ ᾱ. δύναμις ἄρα ᾱ ἴση ϛϛοῖς δ̄ λείψει μο δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛο β̄. νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ εἶχον τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν μο ᾱ. τὸν δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν δυ ᾱ ϛϛοῖς β̄. δεῖ δὲ καὶ τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὴν δυ ᾱ ϛϛοὺς β̄. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ϛο ᾱ. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δὶς γενόμεναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνου, καὶ προδέδεικται, καὶ ἔστι μο β̄. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ϛο ᾱ μο β̄. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δὶς γενόμεναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνου, καὶ προδέδεικται, καὶ ἔστι μο β. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ϛο ᾱ μο β̄ ἴσοι ἄρα δυ ᾱ ϛϛ δ̄ μο δ̄. ἐὰν ἄρα τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεόν, τουτέστι δυ ᾱ ϛϛοῖς β̄ λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ δεύτερος ϛϛ β̄ μο δ̄. εἰ δὲ καὶ τὸν ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν μερίσω εἰς τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ἀριθμοὺς β̄ μο δ̄. ἕξω τὸν τρίτον, καὶ ἔστω ὁ μερισμὸς ϛο τὸ ἥμισυ. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ τρίτου ἐστὶ δυνάμεως ᾱ ἀριθμοὶ β̄ καὶ ἥμισυ. ἴσος τετραγώνῳ δυνάμεων δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε ϛ'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ε ϛ' ὁ δὲ δεύτερος λδ ϛ'. ὁ δὲ τρίτος β ϛ' καὶ ἥμισυ.

at 1 Q. ſemiſſis eſt (quantum ad vnitates attinet) de 2 N. vt ſi 4 N. quoque eodem modo fuiſſent ſemiſſis ex 9. inſtitui poſſet diuiſio. Atqui 4 N. oriuntur ex eo quo 6 N. ſuperant 2 N. Sed 6 N. orti ſunt ex duplo eius quod fit ex 3. in 1 N. hoc eſt ex duplo ternarij. Vnitates autem 9. eſt quadratus de 3. Cogor igitur inuenire numerum loco ipſius 3. cuius duplum multatum binario ſit ſemiſſis quadrati ipſius numeri. Eſto quæſitus 1 N. Huius duplum binario multatum eſt 2 N. − 2. quadratus autem eiuſdem eſt 1 Q. Volumus igitur 2 N. − 2. eſſe dimidium de 1 Q. Proinde 1 Q. æquatur 4 N. − 4. & fit 1 N. 2. Reuertor nunc ad primò propoſitum. Poſueram primum 1. ſolidum autem ſub tribus contentum 1 Q. + 2 N. Oportet autem ſolidum adſumpto ſecundo facere quadratum. Ergo ſi ab aliquo quadrato ſubduxero 1 Q. + 2 N. habebo ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. & tot vnitatibus, vt duplum vnitatum dempto binario ſit dimidium quadrati earum, eas autem iam oſtenſum eſt eſſe 2. Formo ergo quadratum ab 1 N. + 2. is eſt 1 Q. + 4 N. + 4. Aufero hinc ſolidum ſub tribus contentum, nimirum 1 Q. + 2 N. relinquitur ſecundus 2 N. + 4. Itaque ſi ſolidum ſub tribus contentum diuido per productum ex primo in ſecundum, nempe per 2 N. + 4. habeo tertium, nimirum ½ N. Reſtat vt ſolidus ſub tribus contentus adſcito tertio faciat quadratum, ſed ſolidus ille adſcito tertio facit 1 Q. + 2½ N. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. & fit 1 N. ⅚. Ad poſitiones. Erit primus ⅚ ſecundus 34/6 tertius ½.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPERATIO Diophanti ſubtilis eſt, ſed tamen perſpicua. Lemma quo quærit numerum, cuius duplum binario multatum ſit ſemiſſis quadrati eiuſdem numeri, ſoluitur per tertiam regulam compoſitarum, nam manent 4 N. æquales 1 Q. + 4. & quia quadratus ſemiſſis Numerorum æquatur vnitatibus, ſequitur ipſum ſemiſſem Numerorum eſſe valorem Numeri, vt liquet ex ipſius regulæ demonſtratione. Verùm alicui non immeritò videri poſſit caſu quodam fieri vt lemmatis huius ſolutio contingat rationalis; cùm regulæ compoſitæ ſi nulla cautio adhibeatur ſolutionem vt pluri-mum exhibeant irrationalem. Quamobrem vt hoc ſcrupulo careamus, aliam placet tradere operationem ſimilem prorſus illi qua in ſequenti quæſtione vtitur Diophantus. Ponatur primus numerus 1 N. ſolidus autem ſub tribus contentus eſto 1 Q. − 1 N. ſic enim primo adſumpto fiet quadratus.

Iam ſi ſolidus ſub tribus contentus per primum diuidatur, quotiens 1 N. − 1 erit productus ex ſecundo in tertium. Ponatur ſecundus 1. erit tertius 1 N. − 1. Supereſt vt ſolidus 1 Q. − 1 N. tam ſecundo quàm tertio adſcito faciat quadratum. At ſecundo adſcito facit 1 Q. + 1 − 1 N. adſcito tertio facit 1 Q. − 1. vterque igitur æquatur quadrato. Hic iam duplicata occurrit æqualitas, quæ reſoluenda eſt modo quem ad decimam quintam tertij explicauimus, quoque rurſus vſus eſt Diophantus vigeſima & vigeſima prima eiuſdem. Horum videlicet interuallum eſt 2 − 1 N. proinde quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat ita vt tam in ſemiſſe ſummæ ipſorum, quàm interualli, inueniatur 1 N. ſunt hi ½ & 4 − 2 N. horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquatur 1 Q. + 1 − 1 N. & fit 1 N. $\frac{65}{56}$. tantus eſt primus, ſecundus 1. tertius $\frac{9}{56}$. qui ſoluunt quæſtionem. Nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{585}{3136}$. qui adſumens ſigillatim ipſos tres numeros, facit quadratos $\frac{4225}{3136}$. $\frac{3721}{3136}$. $\frac{1089}{3136}$. quorum latera ſunt $\frac{65}{56}$. $\frac{61}{56}$. $\frac{33}{56}$.

Quoniam verò ſiue ita opereris, ſiue ſecundum Diophantum, ſemper vnus quæſitorum ponitur vnitas, placet explicare modum quo perficiatur operatio Diophanti, & reddatur vniuerſalior, ita vt primus ſtatuatur quilibet quadratus numerus, & abſque lemmate illo quo ad regulas compoſitas deuenitur, inſtituantur commodè poſitiones ſecundi & tertij. Ponatur ergo primus, quilibet quadratus pura 9. & fingatur quadratus ab 1 N. + 3. is erit 1 Q. + 6 N. + 9. vnde auferendo 9. ſtatuatur 1 Q. + 6 N. pro ſolido ſub tribus numeris contento. Itaque quoniam primus eſt 9. oportet talem ſtatui ſecundum, vt eo ducto in 9. per productum diuidi poſſit ſolidus 1 Q. + 6 N. vt oriatur ex hac diuiſione tertius. Fingatur igitur quadratus ab 1 N. + 6. (tot ſcilicet vnitatibus quot ſunt Numeri in ſolido, ſicut fecit Diophantus, eſtque hæc regula generalis) erit is 1 Q. + 12 N. + 36. vnde auferendo ſolidum, reſtat ſecundus 6 N. + 36. quo ducto in primum 9. fit 54 N. + 324. per quem ſi diuidas ſolidum 1 Q. + 6 N. oritur tertius $\frac{1}{54}$ N. Supereſt igitur vt ſolidus adſumpto tertio faciat quadratum, facit autem 1 Q. + 6 $\frac{1}{54}$ N. hoc ergo æquatur quadrato. Eſto quadrato 2 ¼ Q. fiet 1 N. $\frac{130}{27}$. Ad poſitiones. Erit primus 9. ſecundus $\frac{584}{9}$. tertius $\frac{65}{729}$. qui ſoluunt quæſtionem. Nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{341640}{6561}$ qui ad adſumens ſigillatim ipſos tres numeros, facit quadratos $\frac{400689}{6561}$. $\frac{767376}{6561}$. $\frac{342225}{6561}$. quorum latera $\frac{633}{81}$. $\frac{876}{81}$. $\frac{585}{81}$.

Porrò ne quis ſuperſit dubitandi locus, poſitionibus ita inſtitutis, diuiſionem ſolidi per productum ex primo in ſecundum ſemper commodè fieri (in quo totum negotium conſiſtit) ſic demonſtrabitur.

1 Q. + A 6 N. D 9.
1 Q. + B 12 N. + C. 36.
E 6 N. + C. 36.
F 54 N. + G 324.

Sit ſolidus 1 Q. + A certo Numerorum numero & ſemiſſis numeri A quadratus eſto D. primus quæſitorum numerorum. Tum fingatur quadratus ab 1 N. + A. qui ſit 1 Q. + B + C. patet ergo numerorum Numerum B. eſſe duplum ipſius A. & vnitates C. eſſe quadratum numeri A. Quare cùm auferetur ſolidus 1 Q. + A. à quadrato 1 Q. + B + C. relinquetur E + C. eritque E. æqualis ipſi A. cùm ſuperſit E. auferendo A. ex B. duplo ſui. Cæterùm conſtat ex modo operandi tradito E. + C. fore hypoſtaſim ſecundi Numeri. Ducatur ergo primus D. in ſecundum E + C. & fiat F + G. dico per hoc productum commodè diuidi ſolidum 1 Q. + A hoc eſt eandem eſſe rationem 1 Q. ad F. quæ eſt A ad G. Nam quoad ſpecierum denominationes ſpectat patet quadratos ad Numeros ſe habere vt Numeri ad vnitates. Quare reſtat vt probetur ipſos numeros à ſpeciebus denominatos eandem quoque ſeruare rationem, hoc eſt eſſe 1 ad F. ſicut A ad G. Quia igitur ducto eodem D. in ipſos E C. fiunt F G. erit F. ad G. vt E. ad C. hoc eſt vt A. ad C. (cùm A E. oſtenſi ſint æquales) ſed vt A. ad ſuum quadratum C. ita & vnitas ad A. Igitur vt 1. ad A. ſic & F. ad G. & permutando vt 1. ad F. ſic A ad G. Quod erat demonſtrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Non ſolum abſque lemmate Diophanti, ſed etiam abſque duplicata æqualitate ſoluetur quæſtio. Ponatur ſolidum ſub tribus 1. q. − 2. N. primus numerorum ſit vnitas ſecundus 2. N. Ita namque duabus partibus propoſitionis ſatisfit, pro tertio diuidatur ſolidum ſub tribus 1. Q − 2 N. per rectangulum ſub primo & ſecundo quod eſt 2 N. orietur ex hac diuiſione tertius ½ N − 1 quo addito ad ſolidum ſub tribus fit 1 Q − ½ N. − 1 quod æquari debet quadrato. Oportet autem valorem numeri maiorem eſſe binario propter poſitiones iam factas. Æquetur igitur quadrato cuius latus 1 N − aliquo vnitatum numero binario maiori. Omnia conſtabunt.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros, vt ſolidus ſub ipſis contentus dempto quolibet

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λείψας ἕκαστον, ποιῇ τετράγωνον.

ταττέσθω ὁ πρῶτος ς^ο α̅. ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δ^υ α̅ ς^ο α̅. καὶ λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δ^υ α̅ ἀριθμοῦ α̅. ὁ δὲ πρῶτός ἐστι ς^ο α̅. ὁ ἄρα ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται ς^ο α̅ μ^ο α̅. ἔστω ὁ δεύτερος μ^ο α̅. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ς^ο α̅ μ^ο α̅. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν λείποντα τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. λείπων δὲ τὸν μὲν ποιεῖ δ^υ α̅ ς^ο α̅ ⋔ μ^ο α̅ ἴσας τετραγώνῳ. τὸν δὲ δ^υ α̅ ⋔ μ^ο α̅ ἴσην τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν· ἔστι δὲ ς^ο α̅. ἐκτίθεμαι ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ τηλικοῦτός ἐστι. τούτων ς^ο α̅. μετρεῖται μ^ο τὸ ἥμισυ κατὰ ς^{ους} β̅. τουτέστι κατὰ τὸ δὶς τῆς πλευρᾶς τῆς δυνάμεως. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὡς οἶδας ἡ ἴσωσις. καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ^ο ιζ η^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ η^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο α̅. ὁ δὲ τρίτος μ^ο κε η^{ων}.

ipſorum faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſolidus autem 1 Q. + 1 N. & dempto primo facit quadratum. Et quia ſolidus ſub tribus eſt 1 Q. + 1 N. at primus 1 N. erit productus ex ſecundo in tertium 1 N. + 1. eſto ſecundus 1. ergo tertius erit 1 N. + 1. Supereſt vt ſolidus ſub tribus dempto tam ſecundo quàm tertio faciat quadratum. Dempto verò ſecundo facit 1 Q. + 1 N. − 1 æqualem quadrato, at dempto tertio facit 1 Q. − 1. æqualem quadrato. Et exiſtit duplicata æqualitas. Capio interuallum quod eſt 1 N. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat, ij ſunt qui metiuntur 1 N. nimirum $\frac{1}{2}$ & 2 N. quod eſt duplum lateris quadrati. Eſt ergo quam noſtri æquatio, & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{17}{8}$. ſecundus 1. tertius $\frac{25}{8}$.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & vtitur duplicata æqualitate modo quem explicauimus ad decimam quintam tertij. Cæterùm moneo ſecundum poni poſſe non tantùm 1. ſed & quemlibet vnitatum numerum. Ponatur verbi gratia 2. cùm igitur productus ex ſecundo in tertium ſit 1 N. + 1. erit tertius $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. Solidus autem 1 Q. + 1 N. detracto tam ſecundo quàm tertio fiet, hinc 1 Q. + 1 N. − 2. inde 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N. − $\frac{1}{2}$. quorum vterque quadrato æquandus eſt eorum interuallum eſt $\frac{1}{2}$ N. − 1 $\frac{1}{2}$. quod producunt mutuo ductu 2 N. − 6. & $\frac{1}{4}$. horum ſummæ ſemiſſis quadratus 1 Q. − $\frac{23}{4}$ N. + $\frac{529}{64}$. æqualis eſt 1 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{73}{48}$. tantus eſt primus, ſecundus 2. tertius $\frac{121}{96}$. qui ſoluunt quæſtionem, nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{8833}{2304}$. qui detractis ſigillatim ipſis tribus numeris, facit quadratos $\frac{5329}{2304}$. $\frac{4225}{2304}$. $\frac{5929}{2304}$. quorum latera $\frac{73}{48}$. $\frac{65}{48}$. $\frac{77}{48}$.

Sed & quadratorum numerus qui ponitur in ſolido, pro arbitrio variari poteſt, dum ponatur quadratus. Etenim ſit primus 1 N. ſolidus 4 Q. + 1 N. erit ergo productus ex ſecundo in tertium 4 N. + 1. Ponatur ſecundus quotlibet vnitatum, puta 2. erit igitur tertius 2 N. + $\frac{1}{2}$. ſupereſt vt ſolidus 4 Q. + 1 N. adſcito, tum ſecundo, tum tertio faciat quadratum, proinde 4 Q. + 1 N. − 2 & 4 Q. − 1. N. − $\frac{1}{2}$ æquantur quadratis. Horum interuallum eſt 2 N. − 1 $\frac{1}{2}$ quod producatur ex $\frac{1}{2}$ in 4 N. − 3. Quare horum ſummæ ſemiſſis quadratus 4 Q. − 5 N. + $\frac{25}{16}$. æquatur 4 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{19}{32}$. tantus eſt primus. ſecundus 2. tertius $\frac{27}{16}$ qui ſoluunt quæſtionem. nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{513}{256}$ qui ſingulis detractis quadratos facit $\frac{361}{256}$. $\frac{1}{256}$. $\frac{81}{256}$. quorum latera $\frac{19}{16}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{9}{16}$.

Eodem prorſus artificio ſoluetur quæſtio ſequens, quæ & hic deſiderari videtur.

Inuenire tres numeros, vt qui ſub iis continetur ſolidus detractus à quolibet ipſorum quadratum relinquat.

Eſto primus 1 N. ſolidus autem 1 N. − 1 Q. vt detractus à primo quadratum relinquat. Iam ſolido per primum diuiſo, fiet 1 − 1 N. productus ex ſecundo in tertium. Ponatur ſecundus 1. erit tertius 1 − 1 N. ſupereſt vt ab vtroque detrahendo ſolidum 1 N. − 1 Q. ſuperſint quadrati, & remanent 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. + 1 − 2 N. vterque igitur horum æquatur quadrato. Eorum interuallum eſt 1 N. quod fit ex 2 N. in $\frac{1}{2}$. Quare horum ſummæ ſemiſſis quadratus, puta 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{16}$ æquatur 1. Q. + 1 − 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{8}$. tantus eſt primus, ſecundus 1. tertius $\frac{3}{8}$. & ſoluunt quæſtionem. Nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{15}{64}$ qui à quolibet ſigillatim detractus reliquit quadratus $\frac{25}{64}$. $\frac{49}{64}$. $\frac{9}{64}$.

QVAESTIO XXV.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον παρὰ πλευράν. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ς.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ſit cubus ſuo multatus

latere. Eſto datus 6. Ponatur primus 1 N. relinquitur ergo ſecundus 6 – 1 N. Supereſt vt productus eorũ multiplicatione ſit cubus ſuo multatus latere. Eſt autem hic productus 6 N. – 1 Q. Hunc ergo æquari oportet cubo cui ſuum deſit latus. Formo cubum à numeris quotlibet cum defectu vnitatis, eſto à 2 N. – 1. huius cubus latere detracto fit 8 C. + 4 N. – 12 Q. Hæc æquantur 6 N. – 1 Q. & ſi numeri vtrimque multitudine æquales eſſent, reſtarent cubi æquales quadratis, & rationali numero exprimeretur ſolutio. At 4 N. proficiſcuntur ab exceſſu ex ter 2 N. ſupra 2. N. & ſi ter 2 N. amittãt 2 N. fiunt vtique bis 2 N. At verò 6. dantur ex hypotheſi. Eò itaque redactus ſum vt inueniam loco 2 N. aliquem numerum cuius duplum faciat 6. Eſt autem 3. huiuſmodi numerus. Quærens ergo 6 N. – 1 Q. æquales cubo cui ſuum latus deeſt, ſtatuo cubi latus 3 N. – 1. & huius cubus latere ipſo multatus facit 27 C. + 6 N. – 27 Q. quod æquatur 6 N. – 1 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{27}$. Ad poſitiones, erit primus $\frac{26}{27}$. At ſecundus $\frac{136}{27}$.

πιτάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμοῦ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μο ϛ̄ λείψει ϛ ᾱ. λοιπὸν δὴ ἔστι τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον παρὰ πλευράν. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν ἀριθμῶν ϛ̄ λείψει δυ ᾱ. ταῦτα ἴσα κύβῳ παρὰ πλευράν. πλάσσω κύβον ἀπὸ ϛϛ ὅσων δή ποτε λείψει μο ᾱ. ἔστω δὲ ἀπὸ ϛϛ β̄ ↑ μο ᾱ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κυ η̄ ἀριθμοὺς δ̄. ↑ δυ ιβ̄. ταῦτα ἴσα ϛϛοῖς ϛ̄ λείψει δυ ᾱ. καὶ εἰ ἦσαν οἱ ϛϛοι ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸν ἐγίνετο ἰσῶσαι κύβους δυνάμεσι, καὶ ὁ ϛ ἦν ῥητός. ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ δ̄. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ὑπὲρ ϛϛῶν δύο. τουτέστιν ἐκ τῶν τρὶς τῶν β̄ ϛϛ. καὶ ἐὰν τρὶς οἱ δύο ἀριθμοὶ λείψωσι ϛϛοὺς β̄. ποιοῦσι δὶς τοὺς ἀριθμοὺς β̄. οἱ δὲ ϛ̄. τυχόντες εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόστασιν. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ϛ, ὡς τοὺς ἀριθμοὺς β̄. ὃς δὶς γινόμενος ποιεῖ ϛ̄. ἔστι δὲ ὁ γ̄. ζητῶ οὖν ϛϛοὺς ϛ̄ ↑ δυ ᾱ. ἴσους κύβῳ παρὰ πλευράν. νῦν πλάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ἀπὸ ϛϛ γ̄ ↑ μο ᾱ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κυ κζ ϛϛοὺς ϛ̄ ↑ δυ κζ ἴσους ϛϛοῖς ϛ̄ ↑ δυ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ κϛ κζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κϛ κζ. ὁ δὲ δεύτερος ρλϛ κζ.

IN QVAESTIONEM XXV.

ARTIFICIOSE' Diophantus vt æquet 6 N. – 1 Q. cubo multato ſuo latere, fingit cubum à 3 N. – 1. vt in cubo illius contineatur – 1. quod aboleatur detractatiòne lateris, in quo etiam – 1. poſitum eſt. At Numeri aboleantur per Numeros qui ſunt ex altera æquationis parte, & ſic remaneat æqualitas inter cubos & quadratos. Vt autem in cubo multato ſuo latere reperiantur 6 N. cùm ex formatione cubi tradita ad primam huius conſtet numerum Numerorum in cubo contentorum triplum fore numeri Numerorum poſitorum in latere, quia in latere cum Numeris ponitur vnitas; oportet vtiquè talem poni in latere numerum Numerorum, à cuius triplo auferendo ipſum numerum, ſuperſit 6. ſed à triplo alicuius numeri auferendo ipſum numerum, ſupereſt duplum eiuſdem numeri. Igitur rectè concludit Diophantus ponendum in latere cubi, numerum Numerorum, cuius duplum ſit 6. hoc eſt 3. Itaque nulla hic ſolutionum varietas accidit, cùm per hujuſmodi operationem vnica duntaxat reperiri poſſit ſolutio. Verùm inde formatur Canon ſatis expeditus.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate multatum diuide per octantem cubi eiuſdem, orietur primus quæſitorum. Quare huius ſubtractione à dato numero, habebis ſecundum. Porrò productus ex primo in ſemiſſem dati numeri vnitate multatus, eſt latus cubi quæſiti.

Eodem quoque artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros dato interuallo differentes, vt productus eorum multiplicatione ſit cubus ſuo multatus latere.

Sit datum interuallum 6.

Ponatur primus 1 N. ſecundus 6 + 1 N. erit productus 6 N. + 1 Q. qui æquandus eſt cubo multato ſuo latere, qui ob cauſam ſupra traditam fingi debet à latere 3 N. – 1. fietque cubus ſuo latere multatus 27 C. + 6 N. 27 Q. æqualis 6 N. + 1 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{27}$. tantus eſt primus. Secundus autem $\frac{190}{27}$. & ſoluunt quæſtionem, nam productus eorum multiplicatione $\frac{5320}{729}$. eſt cubus $\frac{6859}{729}$. multatus ſuo latere $\frac{19}{9}$. Hinc fit Canon.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate auctum, diuide per octantem cubi eiuſdem, orietur primus quæſitorum. Cui addendo datum interuallum, fiet ſecundus. Porrò productus ex primo in ſemiſſem dati numeri vnitate multatus, eſt latus cubi quæſiti.

QVÆSTIO XXVI.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ποιῇ κύβον, οὗ ἡ πλευρὰ ᾖ ἴση ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς κύβος ἐστὶν, ἔστω κυ η. ἡ πλευρά ἐστι ςςοὶ β. ἀλλὰ ἡ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ, καὶ ἡ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου ὑπεροχὴ, καὶ ἔτι τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου δίς ἐστι ὑπεροχὴ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου. τουτέστιν ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἄνισοι, ἡ τῶν τριῶν ὑπεροχὴ διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἄκρων. ἔχομεν δὲ ἐν τῇ ὑποστάσει τὴν πλευρὰν τοῦ κύβου ςςοὺς β. δεῖ δὲ τοὺς ςςοὺς β τῶν τριῶν τὴν ὑπεροχὴν εἶναι, ὁ τρίτος ἄρα τοῦ πρώτου ὑπερέχει ςῷ α. ἔστω ὁ πρῶτος ςς β. ἢ ὅσων δήποτε, ὁ τρίτος ἔσται ἄρα ςς γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἐστι κυ η. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δυ ς. λοιπὸν ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται ςὸ α. α γχ. καὶ εἰ μὲν ἦν ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου μείζων ἐλάσσων δὲ τοῦ τρίτου, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ᾽ ὁ δεύτερος ἐγένετο ἐκ τοῦ τῶν η μερισθείσας εἰς τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου. ἀλλ᾽ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ μονάδι διαφέροντες. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ὅπως ὁ η μεριζόμενος εἰς τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ποιῇ τινα, ὃς τοῦ μὲν ἐλάσσονος μείζων ᾖ, τοῦ δὲ μείζονος ἐλάσσων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςὸ α μο α. καὶ τὸν η ἐὰν μερίσω εἰς τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν, τουτέστιν εἰς δυ α ςὸ α. εὑρεθήσεται ὁ μέσος μο η μορίου δυ α ςῶ α. θέλομεν δὲ τοῦτον μείζονα μὲν εἶναι ςὸ α. ἐλάσσονα δὲ ςῶ α μο α. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. ὥστε ὁ δεύτερος μετὰ μονάδος μιᾶς μείζων ἐστὶ τοῦ πρώτου. ἀλλ᾽ ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὴν μονάδα καὶ ἀναλυθεὶς εἰς τὴν δύναμιν α. γίνεται δυ α ςὸ α μο η. μορίου δυ α. ςῷ α ὥστε ταῦτα μείζονά ἐστι ςῶ α μο α. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ μόριον δυ α ςῷ α μο η. μείζονά εἰσι κυ α. δυ β ςῶ α καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνονται μο η μείζονες κυ α δυ α. πλάσσω κύβον ὃς ἔχει κύβον α. δύναμιν α ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου ςῶ α, μο α γχ. ἀλλ᾽ ἐπεὶ μο η μείζονές εἰσι κύβω α δυ α. ἐστὶ δὲ ὁ ἀπὸ ςῶ α μο α γχ. κύβος μείζων κυ ἑνὸς δυ α. ἐὰν ἰσώσω τὰς πλευρὰς, τουτέστι μο β. ἴσαι ςῷ α μο α γχ. γίνεται ὁ ςὸ μο ε γχ. ἐπὶ τὰς ὑποστά-

DATVM numerum diuidere in tres numeros, è quibus ortus ſolidus ſit cubus latus habens ſummam interuallorum, quibus bini inter ſe diſtant. Eſto datus 4. & quia ſolidus ſub tribus contentus eſt cubus, eſto 8 C. cuius latus 2 N. Iam interuallum primi & ſecundi, & interuallum ſecundi & tertij, itemque interuallum primi & tertij, duplum faciunt interualli primi & tertij. Hoc eſt, Si fuerint numeri tres inæquales, trium interualla ſunt duplum interualli extremorum. Habemus autem in poſitione lateris cubi 2 N. Quare oportet 2 N. æquari ſummæ interuallorum. Proinde interuallum tertij ſuprà primum eſt 1 N. Eſto primus numerorum quotlibet, puta 2 N. erit ergo tertius 3 N. Et quia ſolidus ex tribus ortus, eſt 8 C. at productus ex primo in tertium eſt 6 Q. erit vtique ſecundus $1\frac{1}{3}$ N. Hoc loco ſi ſecundus tertio minor, maior primo extitiſſet ſoluta erat quæſtio. Sed ſecundus prodiit diuiſo 8 per productum ex primo in tertium. Primus autem & tertius non ſunt temerè ſumpti, ſed vnitate differentes. Eò itaque deuenimus, vt quærendi ſint duo numeri vnitate differentes, vt diuiſo 8. per productum multiplicationis eorum, fiat quotiens minore illorum maior, & maiore minor. Ponatur minor 1 N. maior erit 1 N. + 1 & ſi diuidam 8. per productum multiplicationis eorum quod eſt 1 Q. + 1 N. fiet medius $\frac{8}{1 Q. + 1 N.}$ Volumus autem hunc maiorem quidem eſſe quàm 1 N. minorem verò quàm 1 N. + 1. Cùm igitur horum interuallum ſit 1. erit interuallum primi & ſecundi vnitate minus, ideoque ſecundus addita vnitate maior erit primo. Atqui ſecundus adſcita vnitate, & reſolutus in minutiam, cuius denominator 1 Q. + 1 N. fit $\frac{1 Q. + 1 N. + 8}{1 Q. + 1 N.}$ Hoc ergo maius eſt quam 1 N. + 1. & omnibus per denominatorem multiplicatis fit 1 Q. + 1 N. + 8. maior quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Auferantur ſimilia à ſimilibus, relinquitur 8. maior quàm 1 C. + 1 Q. Formo cu-

bum

bum in quo ſit 1 C. + 1 Q. erit vtique latus eius 1 N. + $\frac{2}{3}$. & quoniam 8. maius ſunt quàm 1 C. + 1 Q. Cubus quoque à latere 1 N. + $\frac{2}{3}$ maior eſt quàm 1 C. + 1 Q. ſi æquemus latera, nempe 2. & 1 N. + $\frac{2}{3}$. fiet 1 N. $\frac{4}{3}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{8}{3}$. ſecundus $\frac{9}{5}$. tertius $\frac{5}{3}$. & omnibus per 15. multiplicatis. Erit primus 40. ſecundus 27. tertius 25. Communis enim denominator hic abiicitur, & inuenti ſunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus ſolidus, eſt cubus latus habens ſummam interuallorum ipſorum. Pono ergo primum 40 N. ſecundum 27 N. tertium 25 N. & eſt ſolidus ſub ipſis contentus cubus cuius latus æquatur interuallis ipſorum ſimul junctis. Volo autem trium ſummam æquari dato numero 4. Igitur 92 N. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{40}{23}$. ſecundus $\frac{27}{23}$. tertius $\frac{25}{23}$.

στάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος η̄ γ^ω. ὁ δεύτερος θ̄ ε^ω. ὁ τρίτος ε̄ γ^ω. καὶ πάντα εἰς πεντεκαιδέκα. ἔσται ὁ πρῶτος μ̄. ὁ δεύτερος κζ̄. ὁ τρίτος κε̄. κοινὸν γὰρ ἤρθη τὸ ιε μόριον, καὶ εὑρημένοι εἰσὶν τρεῖς ἀριθμοί. ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ᾖ κύβος πλευρὰν ἔχων τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν συντεθείσας. τάσσω τοίνυν τὸν μὲν πρῶτον ϛϛ μ̄. τὸν δὲ δεύτερον ϛϛ κζ̄. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ κε̄. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. θέλω δὲ τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι δοθεῖσι μονάσι. ἐδόθησαν δὲ μ° δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ϟβ̄ ἴσοι μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ ᾱ κγ^ω. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κγ^ω. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄ κγ^ω. ὁ δὲ τρίτος κε̄ κγ^ω.

IN QVAESTIONEM XXVI.

QVÆRENS Diophantus tres numeros quorum ſumma ſit 4. Ita vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus latus habens ſummam interuallorum quibus bini inter ſe diſtant, ſeu quod idem eſt, latus habens duplum interualli maximi & minimi, primùm quærit in vniuerſum tres numeros reliquis propoſiti partibus ſatisfacientes nulla habita ratione ſummæ quàm conficiunt, his enim inuentis, putà 40. 27. 25 Iam ſtatuit quæſitos numeros 40 N. 27 N. 25 N. quorum ſummam 92 N. æqualem faciendo ipſi 4. ſoluit quæſtionem propoſitam. Itaque totum negotium in eo conſiſtit vt inueniantur tres numeri, vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi. Ponatur ſolidus ille quilibet cuborum numerus cubicus, puta 8 C. Cùm ergo illius latus ſit 2 N. patet hoc eſſe duplum interualli maximi & minimi, quare ipſum interuallum maximi & minimi erit 1 N. Ponendi ergo ſunt maximus & minimus certi numerorum numeri vnitate diſtantes, ſed quia per eorum productum diuidendo 8 C. ſolidum, debet oriri medius qui minimo maior eſſe debet, & minor maximo, apparet neceſſitas aſſumpti lemmatis, quo quæruntur duo numeri vnitate diſtantes per quorum productum diuidendo 8. fiat quotiens minore maior, & minor maiore. In huius autem lemmatis enodatione quantum à ſcopo aberrarit Xilander, qui eius commentarios legerit, facilè intelliget. Nobis non vacat in refellendis inauibus illius coniecturis diutiùs immorari, quibus propoſitum eſt Diophantum explicare, non aliorum errata omnia perſequi. Ponuntur ergo quæſiti numeri 1 N. & 1 N. + 1. fitque productus eorum multiplicatione 1 Q. + 1 N. per quem diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{1Q. + 1N.}$ qui debet eſſe maior quàm 1 N. minor quàm 1 N. + 1. Hic ſi quis aſſerat Diophantum non ſatis accuratè rem perſequi (niſi quid ex illius verbis exciderit) non falletur, vt puto. Nam vt vtrumque quod inſtat, ritè procuretur, omnia reducendo ad eandem denominationem patet 8. maiorem eſſe debere quàm 1 C. + 1 Q. minorem autem quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. & primum quidem ſollicitè cauet Diophantus, poſtremum verò negligit omnino. Atqui ſi hoc neglecto ad illud tantùm reſpiciamus, ſæpè in abſurdum deueniemus. Nam verbi gratia vt 8. ſit maior quàm 1 C. + 1 Q. ſufficit ſi æquemus 8. alicui cubo maiori quàm 1 C. + 1 Q. dum is non ſit maior quàm 8. At talis eſt 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1 Huic ergo æquemus 8. & latus lateri comparantes fient 2. æquales 1 N. + 1. & erit 1 N. 1. Quare quæſiti numeri erunt 1. & 2. quod eſt abſurdum, nam per eorum productum 2. ſi diuidas 8. fiet 4. qui maior eſt vtroque, cùm deberet eſſe maior minimo, minor maximo. Non ſufficit igitur vt cubus cui æquatur 8. ſit maior quàm 1 C. + 1 Q. ſed oportet ſimul vt ſit minor quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Hoc vt arte certa conſequamur fingemus cubũ in quo præter 1 C. contineatur 1 Q. & aliquid amplius, quod tamen non æquet 2 Q. Quare cùm latus cubi ponendum ſit 1 N. + aliquot vnitatibus, ac proinde quadratorum numerus in cubo contentorum ſit triplum illarum vnitatum, patet in latere ponendas tot vnitates, vt earum triplum ſit minus quàm 2. ſed non minus quàm 1. Quare vtriuſque trientem ſumentes concludemus, fingendum latus cubi 1 N. + tot vnitatibus quæ ſint minus quàm $\frac{2}{3}$ ſed non minus quàm $\frac{1}{3}$. ſic Diophantus poſuit hujuſmodi latus 1 N. + $\frac{1}{3}$ quod æquans lateri ipſius 8. puta 2. inuenit valorem Numeri $\frac{5}{3}$. & ſi fingas latus 1 N. + $\frac{2}{3}$. hoc æquabitur 2. & fiet

1 N. $\frac{1}{2}$. Erunt ergo quæſiti duo numeri $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{2}$. quorum productus $\frac{15}{4}$ per quem diuidendo 8. fit medius $\frac{32}{15}$. tres enim $\frac{3}{2}$. $\frac{32}{15}$. $\frac{5}{2}$. ſatisfaciunt propoſito, hoc eſt ſolidus ſub ipſis contentus, eſt cubus latus habens ſummam interuallorum quibus bini inter ſe diſtant, & omnia reducendo ad integros, fient 45. 64. 75. per quos ſi velis ſoluere quæſtionem propoſitam, pones quæſitos Numeros 45 N. 64 N. 75 N. horum ſumma 184 N. æquatur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{46}$. ſunt ergo quæſiti Numeri $\frac{45}{46}$. $\frac{64}{46}$. $\frac{75}{46}$.

Itaque vt compendioſiſſimè propoſitum lemma perficiatur, cùm fiat valor Numeri auferendo à binario vnitates poſitas in latere fictitio cubi, & oſtenſum ſit vnitates illas minores eſſe debere quàm [illegible] non minores quàm [illegible] his autem à binario detractis, ſuperſint [illegible] & [illegible]. patet valorem Numeri maiorem eſſe debere quàm [illegible] non maiorem quàm [illegible]. ſic ſumi poterunt pro valore Numeri [illegible] & alij infiniti. Vnde conſtat allucinari Xilandrum, cùm aſſerit valorem numeri eſſe poſſe [illegible]. nam is cadit extra limites conſtitutos, cumque propoſito non ſatisfacere ſenties experiendo.

Reſtat videndum cur Diophantus loco ipſorum $\frac{3}{2}$. $\frac{32}{15}$. $\frac{5}{2}$. ſumat ipſos 40. 27. 25. in iiſdem rationibus. Quod ne cui ſcrupulum moueat, demonſtrabitur hoc Theoremate.

Si fuerint tres numeri, ita vt ſolidus ſub ipſis contentus, ſit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi, & tres alij quicunque in iiſdem rationibus idem præſtabunt.

F 27000.
D 30. E 15.
A 40. B. 27. C 25.
G 80. H 54. K 50.
L 60. M 30.
P 216000.

Sint tres A B C. & interuallum extremorum eſto E. cuius duplum D. At ſolidus ſub ipſis A B C. eſto F cubus, cuius latus ſit D. & ſumantur tres G H K in iiſdem rationibus cum ipſis A B C. & ſit extremorum interuallum M. cuius duplum L. & ſolidus ſub ipſis G H K eſto P. dico P. eſſe cubum cuius latus eſt L. Etenim cùm latera A B C. G H K ſint proportionalia, erunt ſolidi F P ſimiles ex definitione. Quare [1] habebunt inter ſe rationem cubi ad cubum, ac
27 Octaui. proinde cùm F ſit cubus, [2] erit & P cubus. Quoniam verò ex hypotheſi eſt A
25. Octaui. ad C. vt G ad K. erit diuidendo E ad C. vt M ad K. ac proinde erit D, duplus ipſius E, ad C; ſicut L.
59 Octaui. duplus ipſius M. ad K, & permutando erit D ad L. vt C ad K. Atqui ſolidi ſimiles F P [3] ſunt in tripli-
12 Octaui. cata ratione laterum C K. & ſimiliter cubi F P. [4] ſunt in triplicata ratione lateris D ad latus ipſius P. Igitur eſt C ad K. ſicut D ad latus cubi P. ſed vt C ad K. ſic eſt D ad L. vt oſtenſum eſt. Igitur L eſt latus cubi P. Quod erat demonſtrandum.

Cæterùm eodem artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres numeros, vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus, latus habens ſummam interuallorum, quibus bini inter ſe diſtant, ipſa autem ſumma interuallorum ſit datus numerus.

Eſto ſumma interuallorum 15. Quærentur vt prius tres numeri, ita vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus ſummæ interuallorum, & inuenientur 40. 27. 25. Quare ponentur quæſiti 40 N. 27 N. 25 N. & fit ſumma interuallorum 30 N. æqualis 15. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt igitur quæſiti numeri 20. $\frac{27}{2}$. $\frac{25}{2}$.

QVÆSTIO XXVII.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ κύβον. τάσσω τὸν πρῶτον ἐκ κυβικῶν ςς. ἔστω δὴ ςς η̄. τὸν δεύτερον δυ α̅ ⋔ μο α̅. καὶ συμφωνεῖ μοι ἓν ἐπίταγμα. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κύβον. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν κύβον. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιεῖ κύβους η̄ δύναμιν α̅ λείψει ςς η̄ μο α̅ ἴσους κύβῳ. πλάσσω τὸν κύβον ἀπὸ ἀριθμῶν β̄ λείψει μο α̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιδ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ριβ ιγ. ὁ δὲ δεύτερος κζ ρξθ.

Invenire duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione vtrolibet adiecto faciat cubum. Pono primum, aliquot numerorum cubicorum, puta 8 N. ſecundum verò 1 Q. − 1. Ita alteri poſtulatorum ſatisfit. Nam productus eorum multiplicatione adſcito primo, facit cubum. Reſtat vt idem productus adſcito ſecundo faciat cubum. Sed productus ille adſcito ſecundo facit 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. hæc ergo æquantur cubo. Formo cubum à 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{14}{13}$. Ad poſitiones. erit primus $\frac{112}{13}$. ſecundus $\frac{27}{169}$.

IN QVAESTIONEM XXVII.

Numeri cubo æquandi 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. latus ingenioſè fingitur 2 N. − 1. vt cubo vtriuſque partis elidantur 8 C. − 1. & remaneat æqualitas inter Numeros & quadratos. Cæterùm poſitiones diuerſis modis inſtitui poſſunt. Nam primus quæſitorum poni poteſt quilibet Numerorum numerus ſiue cubicus, ſiue non, dum ſecundus ſtatuatur certus quadratorum numerus

1. ita tamen vt ex primo in quadratos ſecundi fiat numerus cubus, ita ſi ponatur primus 4 N. ponetur ſecundus 2 Q. − 1. fitque productus 8 C. − 4 N. qui adſcito primo cubum facit. Reſtat ergo vt idem productus adſcito ſecundo cubum faciat, facit autem 8 C. + 2 Q. − 4 N. − 1. Hoc ergo cubo æquatur, cuius latus fingetur 2 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. erunt ergo quæſiti numeri $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$. qui ſoluunt quæſtionem, nam eorum productus $\frac{20}{343}$ vtroque adſcito cubos facit $\frac{1000}{343}$ & $\frac{27}{343}$. Verum aduerte talem ſtatuendum eſſe Numerorum numerum pro primo, vt ſit maior vel æqualis numero quadratorum qui ponitur in ſecundo, nam ſi ponatur minor, æquatio quidem ritè procedet, ſed valorem Numeri applicando poſitionibus, ſecundus inuenietur nihil, vel minor nihilo. Ita ſi ponas primum 2 N. ſecundum 4 Q. − 1. erit productus 8 C. − 2 N. qui adſcito primo cubum facit. At idem productus adſcito ſecundo facit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare ſecundus inuenitur nihil. At ſi ponas primum 8 N. ſecundum 8 Q. − 1. fiet tandem 64 C. + 8 Q. − 8 N. − 1. æqualis cubo à latere 4 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{14}$ eruntque quæſiti numeri qui ſuprà $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, vtrolibet detracto faciat cubum. Vt prius ponatur primus 8 N. ſecundus autem 1 Q. + 1. & productus eorum multiplicatione, dempto primo fit cubus; ſed idem productus dempto ſecundo facit 8 C. + 8 N. − 1 Q. − 1. Hoc æquatur cubo, & eſt impoſſibile. Statuo ergo rurſus primum, numerorum cubicorum aliquot addita vnitate, puta, 8 N. + 1. ſecundum autem 1 Q. & productus eorum multiplicatione dẽpto ſecundo fit cubus; ſed dempto primo fit 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. Hæc æquantur cubo a latere 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{14}{13}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{125}{13}$. ſecundus $\frac{196}{169}$.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἑκάτερον, ποιῇ κύβον. ὁμοίως ὁ πρῶτος τετάχθω κυβικῶν ςῶν η. ὁ δὲ δεύτερος δυ α μο α. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν πρῶτον, κύβος, ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν δεύτερον ποιεῖ κυ η ςς η λείψει δυ α μο α. ταῦτα ἴσα κύβῳ. καὶ ἔστιν ἀδύνατον. τάσσω τοίνυν πάλιν τὸν πρῶτον κυβικῶν ςῶν μετὰ μο α. ἔστω ςς η μο α. τὸν δὲ δεύτερον δυ α. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν δεύτερον, κύβος, ἀλλὰ λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ κυ η δυ α λείψει ςς η μο α. ταῦτα ἴσα κύβῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β ⸔ μο α. καὶ γίνεται ὁ ς ιδ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρκε ιγ. ὁ δὲ δεύτερος ρϟϛ ρξθ.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

TEXTVS lacunas malè cùm repleuiſſet Xilander, non mirum eſt ſi Diophanti mentem minimè aſſequutus eſt. Attamen ſatis apparet Diophantum primò voluiſſe imitari operationem præcedentis quæſtionis. Quemadmodum enim poſuerat ibi primum 8 N. ſecundum 1 Q. − 1 vt producto 8 C. − 8 N. addendo primum fieret cubus. Ita hic ponere voluit primum 8 N. ſecundum 1 Q. + 1. vt à producto 8 C. + 8 N. detrahendo primùm, cubus ſupereſſet. Verùm ab eodem producto auferendo ſecundum relinquebatur 8 C. + 8 N. − 1 Q. − 1. quod eſt impoſſibile cubo æquari, nam is cubus non poteſt fingi niſi à latere 2 N. − 1. vt tollantur cubi & vnitates. Quare hac æquatione tandem 11 Q. + 2 N. remanent æquales nihilo. Idcirco vt hoc incommodum vitetur aliter inſtituendæ ſunt poſitiones, & primus ponendus eſt 8 N. + 1. ſecundus 1 Q. reſque optimè ſuccedit.

Cæterùm infinitis alijs modis inſtitui poſſunt poſitiones, dum primus ponatur quilibet numerus Numerorum + 1. & ſecundus quilibet Quadratorum numerus, qui ductus in numerum Numerorum primi, cubum faciat. Ita ſi ponas primum 4 N. + 1. ſecundum 2 Q. erit productus 8 C. + 2 Q. qui multatus ſecundo, cubum relinquit. At multatus primo, manet 8 C. + 2 Q. − 4 N. − 1. qui æquabitur cubo à latere 2 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. Erunt ergo quæſiti numeri $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$ qui ſoluunt quæſtionem, nam productus fit $\frac{1350}{343}$. Vnde auferendo ipſos numeros, remanent cubi $\frac{27}{343}$ & $\frac{1000}{343}$. Sed hîc etiam aduerte talem ſtatuendum Numerorum numerum in primo, vt ſit æqualis vel maior numero quadratorum qui ponitur pro ſecundò. Alioquin ſi ponatur minor, non poterit à producto detrahi vterque numerus. Ita ſi ponas primum 8 N. + 1. ſecundum 8 Q. res bene ſuccedet, nam erit productus 64 C. + 8 Q. qui multatus ſecundo cubum relinquit, at multatus primo, remanet 64 C. + 8 Q. − 8 N. − 1. æqualis cubo à latere 4 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{14}$. Sunt ergo quæſiti numeri qui ſuprà $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$. Sed ſi ponas primum 2 N. + 1. ſecundum 4 Q. erit productus 8 C. + 4 Q. qui detracto

ſecundo cubum relinquit, at primo detracto, relinquit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. ſuntque quæſiti numeri 2. & 1. à quorum producto ſi primum auferas, nihil remanet.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ κύβον ποιείτω μο ξδ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον, ποιεῖ κύβον, ποιείτω μο η. δὶς ἄρα συναμφότερος ποιῶν αὐτῶν τὴν ὑπεροχὴν, ἔσται μο νϛ. ὥστε συναμφότερος ἔσται μο κη. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ μο ξδ. λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσται μο λϛ. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι μο κη. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστὶ μο λϛ. τετάχθω ὁ μείζων ϛ α μο ιδ. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μο ιδ. λείψει ϛ α. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπ' αὐτῶν τουτέστι μο ρϟϛ λείψει δυνάμεως α. ἰσῶσαι μο λϛ. καὶ γίνεται δυ α ἴση μο ρξ. καὶ εἰ ἦσαν μονάδες ρξ τετραγωνικαί, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' αἱ μο ρξ ὑπεροχή ἐστι ᾗ ὑπερέχουσι μο ρϟϛ τὰς λϛ. ἀλλ' αἱ μο ρϟϛ ἀπὸ μο ιδ ἐστὶ τετράγωνος. ὁ δὲ ιδ ἥμισύ ἐστι τῶν κη. ὥστε τὰ ρϟϛ τὸ ἥμισύ ἐστι τῶν κη ἐφ' ἑαυτό. ἀλλ' ὁ κη ἥμισύ ἐστι τῶν νϛ. ἀλλ' ὁ νϛ δύο κύβων ἐστὶ ὑπεροχὴ τοῦ ξδ καὶ τοῦ η. ὁ δὲ λϛ συναμφοτέρων ἐστὶ τῶν κύβων τὸ ἥμισυ. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ τέταρτον, ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ λείψας συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ϛ α μο α. ἡ τοῦ ἐλάσσονος ϛ α ⋔ μο α. καὶ γίνονται οἱ κύβοι ὁ μὲν μείζων κυ α δυ γ ϛϛ γ μο α. ὁ δὲ ἐλάσσων κυ α ϛϛ γ λείψει δυ γ μο α. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ τέταρτον δυ α. α∠ μο α∠. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ, γίνονται δυναμοδυνάμεις β. α∠ δυ α. α∠ μο α∠. ταῦτα ἐὰν λείψῃ συναμφοτέρου τῶν κύβων τὸ ἥμισυ, ὅπερ ἐστὶ κυ α ϛϛ γ. λοιπὸν γίνονται δυδυ β. α∠ δυ α. α∠ μο α∠ ⋔ κυ α ϛϛ γ ἴσα τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις διὰ τὸ μόριον, γίνεται δυδυ θ δυ ϛ μο α λείψει κυ δ ϛϛ ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ δυνάμεων τριῶν μο α ⋔ ϛϛ ϛ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυδυ θ δυ μβ μο α λείψει κυ λϛ ϛϛ ιβ ἴσον δυναμοδυνάμεσι θ δυ ϛ μο α ⋔ κυ δ ϛϛ ιβ.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, ſumma ipſorum ſiue addita, ſiue detracta cubum faciat. Quoniam productus eorum multiplicatione adſumens vtrumque facit cubum, faciat 64. Rurſus quia idem productus vtroque detracto facit cubum, faciat 8. Itaque duplum ſummæ numerorum æquatur interuallo horum cuborum 56. Proinde ſumma numerorum eſt 28. ſed productum multiplicationis cum ſumma facit 64. relinquitur ergo productum multiplicationis eſſe 36. Eo itaque loci deducta res eſt, vt inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma ſit 28. productum multiplicationis 36. Ponatur maior 1 N. + 14. Minor ergo erit 14 − 1 N. ſupereſt vt productum multiplicationis nimirum 196 − 1 Q. æquetur 36. & fit 1 Q. æqualis 160. & ſi vnitates 160. eſſent quadratæ, ſoluta eſſet quæſtio. Sed 160. eſt exceſſus quo 196. ſuperat 36. & 196. eſt quadratus ipſius 14. qui eſt ſemiſſis de 28. Quare 196 eſt ſemiſſis de 28. in ſe ductus. Atqui 28. eſt ſemiſſis ipſius 56. atque ideo 14. eſt quarta pars eiuſdem 56. Cæterùm 56. eſt interuallum duorum cuborum 64. & 8. ipſe verò 36. eſt ſummæ cuborum ſemiſſis. Itaque eo redactus ſum vt inueniam duos cubos quorum interualli quadrans in ſe ſi ducatur, & ab hoc quadrato auferatur ſummæ cuborum ſemiſſis, fiat quadratus. Sit latus maioris cubi 1 N. + 1. minoris verò 1 N. − 1. & fiunt cubi maior quidem 1 C. + 3. Q. + 3 N. + 1. minor autem 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. & horum interualli quadrans eſt $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$ hoc in ſe ducto fiunt $2\frac{1}{4}$ QQ. + $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$ hinc ſi auferatur ſummæ cuborum ſemiſſis, nempè 1 C. + 3 N. relinquitur $2\frac{1}{4}$ QQ. + $1\frac{1}{2}$ Q + $\frac{1}{4}$ − C. − 3 N. Hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias, omnia quadruplicentur, fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. hæc quadrato æquantur à latere 3 Q. + 1 − 6 N. Ipſe quadra-

cus eſt 9 QQ. + 42 Q. + 1 − 36 C. − 12 N. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. Communis addatur defectus, & a ſimilibus auferantur ſimilia, relinquuntur 32 C. æquales 36 Q. & fit 1 N. $\frac{9}{8}$. Ad poſitiones. Poſueram latera cuborum, hoc quidem 1 N. + 1. illud verò 1 N. − 1. Erit ergo alterum $\frac{17}{8}$. alterum $\frac{1}{8}$. Ipſi ergo cubi erunt, primus quidem $\frac{4913}{512}$. ſecundus autem $\frac{1}{512}$. venio ad id quod initio propoſitum erat, ac quæro quomodo dentur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione cum vtriuſque ſumma faciat $\frac{4913}{512}$ & idem productus detracta eadem ſumma faciat $\frac{1}{512}$. Quoniam ergo productum multiplicationis additum ſummæ facit cubum $\frac{4913}{512}$. & idem productum detracta ſumma facit cubum $\frac{1}{512}$. horum cuborum interuallum, nempè $\frac{4912}{512}$. eſt vtique duplum ſumma. Ipſa igitur ſumma eſt $\frac{2456}{512}$. ſed productum multiplicationis cum ſumma facit $\frac{4913}{512}$. & ſumma inuenta eſt $\frac{2456}{512}$. erit igitur productum multiplicationis $\frac{2457}{512}$. Quod reliquum eſt vt conficiatur demonſtratum eſt libro primo, ſed explicandæ cauſa quæſtionis denuo oſtendamus. Ponatur primus 1 N. cum ſemiſſe vnitatum quæ ſummam exprimunt, hoc eſt $\frac{1228}{512}$. ſecundus erit $\frac{1228}{512}$ − 1 N. & eſt ſumma illorum $\frac{2456}{512}$. Sed productum multiplicationis eſt $\frac{1507984}{262144}$. − Q. hoc ergo æquatur $\frac{2457}{512}$ & omnia per denominatorem 262144. multiplicentur, & auferantur ſimilia á ſimilibus fiunt 262144. Q. æquales 250000. & fit 1 N. $\frac{500}{512}$. Ad poſitiones erit primus $\frac{1728}{512}$. ſecundus $\frac{728}{512}$. & demonſtratio eſt euidens.

καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ λοιποὶ κ^υ λβ ἴσοι δ^υ λϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο θ η^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὰς τῶν κύβων πλευρὰς τὴν μὲν ϛ^ο α μ^ο α. τὴν δὲ ϛ^ο α λείψει μ^ο α. καὶ ἔσται ἡ μὲν ιζ η^ων. ἡ δὲ α η^ου. αὐτοὶ ἄρα οἱ κύβοι ἔσονται ὁ μὲν πρῶτος δϡιγ φιβ^ων. ὁ δὲ δεύτερος α φιβ^ου. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ζητῶ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν κύβον τὸν δϡιγ φιβ^ων. τὸν δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν κύβον τὸν α φιβ^ου. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδας δϡιγ φιβ^ων. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδος α φιβ^ου. ὁ δὶς ἄρα συναμφότερος ἐστὶν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ, τουτέστι δϡιβ φιβ^ων· ὥστε συναμφότερος ἔσται βυνϛ φιβ^ων. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶ δϡιγ φιβ^ων. ὧν συναμφότερος βυνϛ φιβ^ων. ἔσται ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν μ^ο βυνζ φιβ^ων καὶ προδέδεικται αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ νῦν δὲ δειχθήσεται διὰ τὸ πρόβλημα. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ^ο α καὶ μ^ο τοῦ ἡμίσους, ὧν εἰσι συναμφότεροι, τουτέστι μ^ο ασκη φιβ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ἔσται μονάδων ασκη φιβ^ων λείψει ϛ^ο α. καὶ ἐστὶ μὲν συναμφότερος μ^ο βυνϛ φιβ^ων. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστὶ μ^ο ρν. ζϡπδ μορίου κϛ. βρμδ λείψει δυνάμεως α. ταῦτα ἴσα μ^ο βυνζ φιβ^ων. καὶ πάντα ἐπὶ μόριον τουτέστι κϛ. βρμδ. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνεται δ^υ κϛ. βρμδ ἴσαι μ^ο μυρ. κε. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο μ^ο φ φιβ^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος αψκη φιβ^ων. ὁ δεύτερος ψκη φιβ^ων. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXIX.

Hic duo imprimis ſupponuntur à Diophanto.

Primùm interuallum cuborum qui fiunt addita & adempta ſumma numerorum producto multiplicationis ipſorum, eſſe duplum eiuſdem ſummæ numerorum, quod facilè eſt demonſtrare.

D 28. D 28.
A 8. B 36. C. 64.

Sit enim A cubus minor: C maior, & B productus multiplicatione quæſitorum numerorum, quorum ſumma D adempta ipſi B relinquat A, & addita eidem B. faciat C. dico interuallum cuborum C A eſſe duplum ipſius D. & patet, cùm enim interuallum duorum C B ſit D. & duorum B A. interuallum ſit rurſus D. euidens eſt extremorum C A. interuallum eſſe duplum ipſius D. Quod erat propoſitum.

Secundò ſupponit Diophantus ipſum productum B. ſemiſſem eſſe ſummæ cuborum A C. quod etiam euidens eſt, cùm enim tres A B C. ſint in medietate arithmetica ex hypotheſi, erit medius B. ſemiſſis ſummæ extremorum. Quod erat intentum. Hinc apparet, quod ait Diophantus quærendos eſſe duos numeros, quorum ſumma ſit D. productum B. Id autem fiet per trigeſimam primi, cuius operationem hîc repetit. Cùm autem ex huiuſmodi operatione, vel ex Canone inde eruto conſtet, vt quæſtio ſolui poſſit oportere à quadrato ſemiſſis ſummæ auferendo productum, relinqui quadratum, ſequitur oportere vt à quadrato ſemiſſis ipſius D. auferendo B. relinquatur quadratus. Atqui, vt oſtenſum eſt, D. eſt ſemiſſis interualli cuborum A C. ac proinde ſemiſſis ipſius D. eſt

quadrans interualli eorundem cuborum ; & rurſus , vt oſtenſum quoque eſt, B. eſt ſemiſſis ſummæ cuborum A C. Igitur euidenter colligitur neceſſitas lemmatis à Diophanto aſſumpti, quo quæruntur tales duo cubi , vt à quadrato quadrantis interualli eorum auferendo ſemiſſem ſummæ eorundem, relinquatur quadratus. In huius lemmatis explicatione multa occurrunt obſeruanda.

Primò aduerte latera cuborum poni 1 N. + 1. & 1 N. – 1. vt cuborum tam ſumma quàm interuallum ex pauciſſimis conſtet ſpeciebus. Nam horum laterum cubi prorſus ſimiles ſunt, niſi quod quadrati & vnitates deficiunt in cubo reſidui, cùm adſint in cubo binomij, ſicut docuimus ad primam huius, cubi geneſim explicantes. Vnde colligendo ſummam cuborum, cùm quadrati & vnitates ob ſigna contraria ſeſe mutuò elidant, fit vt ſumma cuborum conſtet ſolùm ex cubis & Numeris, vt in hypotheſi fit ſumma cuborum 2 C. + 6 N. ſimiliter cuborum interuallum ex duabus tantùm componitur ſpeciebus, ex quadratis ſcilicet, & vnitatibus quia cuborum & Numerorum iidem vtrimque reperiuntur numeri, ſic in hypotheſi eſt cuborum interuallum 6 Q. + 2. cuius quadrans eſt $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$.

Secundò aduerte quadratum huius quadrantis, neceſſariò eſſe trinomium conſtans ex quadrato quadratis, quadratis , & vnitatibus, vt colligere ex geneſi quadrati quam tradidit Euclides quarta ſecundi. fit enim huiuſmodi quadratus $2\frac{1}{4}$ QQ. + $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$. Quare cùm ab hoc quadrato auferri debeat ſemiſſis ſummæ cuborum, qui conſtat, vt iam diximus, ex cubis & Numeris, neceſſe eſt hanc ſubtractionem fieri per ſignum defectus, cùm in dicto quadrato non reperiantur ſpecies eorundem nominum. Itaque fiet huiuſmodi ſubductione quinomium conſtans ex quadrato quadratis, quadratis, & vnitatibus, cum defectu cuborum & Numerorum, nimirum $2\frac{1}{4}$ QQ. + $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$ – 1 C. – 3. N. qui æquandus eſt quadrato, vt ſoluatur propoſitum lemma. Sed ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, & fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 – 4 C. – 12 N. æqualis quadrato.

Tertiò aduerte ita formandum latus propoſiti quinomij, vt æqualitas conſiſtat inter duas ſpecies proximas. Quare tria potiſſimum ſunt præſtanda. Primò tollendi ſunt quadrato quadrati. Secundò vnitates quoque tollendæ. Tertiò vel Numeri tollendi ſunt, vt æqualitas conſiſtat inter cubos & quadratos. vel tollendi ſunt cubi, vt æquales maneant quadrati & Numeri. Duo quidem præſtabuntur facilè, quia tam quadrato quadratorum quàm vnitatum numerus, quadratus eſt, puta 9 QQ. & 1. quare ſi in latere fictitio ponantur horum quadratorum latera, nimirum 3 Q. & 1. habebitur intentum. Tertium verò, vt perficiatur, adiicienda eſt in latere fictitio tertia ſpecies, qua vel cubi vel Numeri elidantur, vnde duplex æquationis ratio conſurgit, quarum primam dumtaxat proſequutus eſt Diophantus, nos vtramque non grauatim explicabimus. Primùm ergo ſi libeat abolere numeros, curandum nobis erit vt in quadrato fictitio reperiantur – 12 N. Cùm igitur Numeri produci non poſſint, niſi ex ductu Numerorum in vnitates, patet in latere fictitio numeros ponendos eſſe; vt verò eorum multitudo nobis innoteſcat, cùm latus fictitium debeat eſſe trinomium conſtans ex

5.2 perif. quadratis, Numeris, & vnitatibus, erit quadratus illius æqualis quadratis ſingularum partium, & duplo producti ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ac proinde Numeri qui erunt in quadrato fictitio, erunt duplum producti ex vnitatibus in Numeros in latere contentos. Quamobrem cùm vt docuimus, in latere, vnitarum numerus ſit 1. vt ex eius ductu in Numeros bis, fiant 12 N. manifeſtum eſt in latere ponendos eſſe 6 N. & quia ſigni quoque ratio habenda eſt, & – 12 N. fieri poſſunt ſiue ex 6 N. in – 1. bis, ſiue ex 1. in – 6 N. bis, dubitari poteſt vtrum latus fictitium ponendum ſit 3 Q. + 6 N. – 1. vel 3 Q. + 1 – 6 N. nam vtroque modo, in quadrato reperientur 9 QQ. + 1 – 12 N. Sed ſi ponatur latus fictitium 3 Q. + 6 N. – 1. fit totus quadratus 9 QQ. + 1 – 12 N. + 36 C. + 30 Q. vbi quoniam vterque cuborum & quadratorum Numerus maior eſt numero cuborum & quadratorum numeri quadrato æquandi ; manent enim 30 Q. + 36 C. æquales 6 Q. – 4 C. id tandem incommodi accidit, vt 24 Q. + 40 C. æquentur nihilo. Igitur fictitium latus poni non poteſt 3 Q. + 6 N. – 1. Quamobrem reſtat vt fingatur 3 Q. + 1 – 6 N. vt fecit Diophantus, & æquatio ritè procedit, nam fit 1 N. $\frac{9}{8}$ ſunt ergo cuborum latera $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$ ipſi cubi $\frac{4913}{512}$ & $\frac{1}{512}$. Quorum ſummæ ſemiſſis $\frac{2457}{512}$ interualli verò ſemiſſis $\frac{2456}{512}$. Quare ſi inueniamus duos numeros, quorum ſumma ſit $\frac{2456}{512}$. productus verò $\frac{2457}{512}$ ſoluta erit quæſtio. Inuenientur autem per trigeſimam primi, & erunt quæſiti numeri in minimis $\frac{27}{8}$ & $\frac{91}{64}$. quorum productus $\frac{2457}{512}$. cui addendo & detrahendo ſummam ipſorum numerorum, fiunt cubi $\frac{4913}{512}$. & $\frac{1}{512}$ à lateribus $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$.

Aliam viam ſi libeat amplecti, & curare vt æqualitas conſiſtat inter quadratos & Numeros, abolendo cubos, puta – 4 C. Cùm in latere ſint 3 Q. patet ex 3 Q. bis in $\frac{2}{3}$ N. fieri 4 C. vnde conſtat in latere ponendos $\frac{2}{3}$ N. Sed & ſigni ratio ſi habeatur – 4 C. æquè bene fiunt ex 3 Q. in – $\frac{2}{3}$ N. atque ex $\frac{2}{3}$ N. in – 3 Q. Verùm ſi ponas latus fictitium 3 Q. + 1 – $\frac{2}{3}$ N. fiet quadratus 9 QQ. + 1 – 4 C. + $6\frac{4}{9}$ Q. – $\frac{4}{3}$ N. vnde hoc incommodi accidit, vt tam quadratorum quàm Numerorum numerus, excedat numerum quadratorum & Numerorum, qui ſunt ex altera æquationis parte, puta 6 Q. – 12 N. ac proinde tandem $\frac{4}{9}$ Q. + $10\frac{2}{3}$ N. æquantur nihilo. Supereſt igitur vt latus fictitium ponatur 1 + $\frac{2}{3}$ N. – 3 Q. & fit quadratus 9 QQ. + 1 – 4 C. + $\frac{4}{3}$ N. – $5\frac{5}{9}$ Q. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 – 4 C. – 12. N. & fit 1 N. $\frac{15}{13}$. Sunt igitur quæſitorum cuborum latera $\frac{28}{13}$ & $\frac{2}{13}$. ipſi cubi $\frac{21952}{2197}$ &

[illegible]. Per quos ſi propoſitam initio quæſtionem ſoluere velimus, cum horum ſummæ ſemiſſis ſit [illegible]. Quærendi ſunt duo numeri quorum ſumma ſit [illegible] productum vero [illegible]. Igitur operantes per Canonem trigeſimæ primi ſumemus quadratum ſemiſſis ſummæ, puta [illegible] à quo auferemus productum, & relinquetur [illegible] cuius latus [illegible] additum & ademptum ſemiſſi ſummæ [illegible] dabit quæſitos numeros [illegible] & [illegible] ſeu in minimis [illegible] [illegible]. Horum productus eſt [illegible]. cui ſi addas & adimas ſummam numerorum [illegible] fient cubi qui ſuprà. [illegible] & [illegible].

Cæterùm & latera cuborum qui per hoc lemma quæruntur diuerſimodè fingi poſſunt, nimirum alterum poni poteſt quodlibet binomium conſtans ex Numeris & vnitatibus, alterum vero eiuſdem binomij reſiduum, vt 2 N. + 2 & 2 N. − 2. vel 3 N. + 2. & 3 N. − 2. Semper enim aliquo modorum quos explicauimus, ad æquationem commodam peruenietur.

QVAESTIO XXX.

INVENIRE tres numeros, vt productus eorum multiplicatione ſiue addita ſumma ipſorum, ſiue detracta cubum faciat. Hac in re ſcias quod quolibet quadrato diuiſo in duas partes, quarum altera ſit latus eius, productus harum partium multiplicatione addita ſumma illarum, cubum facit. Ponatur igitur quadratus 1 Q. & diuidatur in latus ſuum, & in id quod ſupereſt, nimirum in 1 N. & 1 Q. − 1 N. & productum multiplicationis eorum, vtroque adſcito facit cubum. Supereſt vt idem productum, detracto vtroque faciat cubum. Atqui facit 1 C. − 2 Q. Hæc ergo cubo æquantur qui ſit minor quam 1 C. formo cubum ab $\frac{1}{2}$ N. is eſt $\frac{1}{8}$ C. & omnia octies fiunt 8 C. − 16 Q. æquales 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{16}{7}$. ſecundus $\frac{144}{49}$.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐν τούτοις ἴσθι ὅτι πᾶς τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς εἴς τε τὴν πλευρὰν, καὶ τὸν λοιπὸν, ποιεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου, κύβον. τετάχθω τοίνυν ὁ τετράγωνος δυνάμεως α̅. καὶ διῃρήσθω εἴς τε τὴν πλευρὰν καὶ τὸν λοιπὸν, ἔσται ς° α̅. καὶ δυνάμεως α̅ λείψει ς° α̅. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου κύβος. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβου α̅ λείψει δυνάμεων β̅. ταῦτα ἴσα κύβῳ ἐλάσσονι τοῦ κύβου α̅. πλάσσω κύβον ἀπὸ τοῦ ς° α̅ ς. τουτέστι κυ α̅ η. καὶ πάντα ὀκτάκις. γίνονται κυ η̅ λείψει δυνάμεων ιϛ̅ ἴσα κύβῳ α̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ̅ ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιϛ̅ ζ. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ̅ μθ.

IN QVAESTIONEM XXX.

HÆc quæſtio eadem eſt cum præcedente, ſed tractatio eius diuerſa, & quidem facilior. Lemma quod aſſumitur de inueniendis duobus numeris, quorum productus adſcita amborum ſumma cubum faciat, facile eſt demonſtratu. Sit enim quilibet Numerus A cuius quadratus B. vnde auferendo ipſum A ſuperſit C. ductoque A in C. fiat D. dico ſi ad ipſum D addatur ſumma ipſorum A C. ſeu B fieri cubum. Etenim ducendo A in ſuum quadratum B. fit cubus ipſius A. Sed ducere A in B idem eſt, ac ducere A ſigillatim in ipſos A. C. ex quibus B componitur; productus autem ex A in A eſt B, & productus ex A in C eſt D. Igitur ſumma amborum B D æquatur cubo ipſius A. Quod erat demonſtrandum. Reliqua ſunt perſpicua, nec maiori explicatione indigent.

A 5. B 25.
C 20. D 100.

Cæterùm ſimili prorſum artificio ſoluentur & huiuſmodi quæſtiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ſiue addito ſiue detracto ipſorum interuallo cubum faciat.

Ponatur alter quæſitorum numerorum 1 N. alter 1 Q. + 1 N. nam productus eorum multiplicatione, puta 1 C. + 1 Q. detracto interuallo ipſorum, cubum facit. Supereſt vt idem productus addito eodem interuallo cubum faciat, facit autem 1 C. + 2 Q. hoc ergo æquatur Cubo. Eſto 8 C. & fit 1 N. $\frac{2}{7}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{2}{7}$ & $\frac{18}{49}$ qui ſoluunt quæſtionem. Nam eorum productus eſt $\frac{36}{343}$. cui addendo & adimendo interuallum numerorum, putà $\frac{28}{343}$. fiunt cubi $\frac{64}{343}$ & $\frac{8}{343}$. Vbi & ani-

maduerſione dignum eſt interuallum numerorum eſſe ſemper quadratum , ſient & in priore quæſtione ſumma Numerorum quadratus erat.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros , vt eorum ſumma ſiue addito ſiue detracto producto multiplicationis eorundem , cubum faciat.

Ponatur alter 1 N. alter 1 Q. − 1 N. ſic enim ſumma addito producto cubum facit. Supereſt vt à ſumma detrahendo productum , cubus fiat. Fit autem 2 Q. − 1 C. æqualis cubo , ſit is quilibet numerus cuborum cubicus minor vnitate , vt fiat valor Numeri vnitate minor , & haberi poſſit alter numerorum qui poſitus eſt 1 Q. − 1 N. ſit ergo cubus $\frac{1}{8}$ C. æqualis 2 Q. − 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{9}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{16}{9}$ & $\frac{112}{81}$ qui ſoluunt quæſtionem, nam productus eſt $\frac{1792}{729}$ ſumma verò ad eandem denominatorem redacta $\frac{2304}{729}$ cui addendo & adimendo productum , fiunt cubi $\frac{4096}{729}$ & $\frac{512}{729}$ à lateribus $\frac{16}{9}$ & $\frac{8}{9}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros , quorum interuallum ſiue addito ſiue detracto producto cubum faciat.

D − D −
A − B − C −

Vtentes eodem logiſmo ferè quo vſus eſt Diophantus quæſtione vigeſima nona huius. Sint cubi qui fieri debent A C. & productus multiplicatione quæſitorum numerorum eſto D. interuallum eorundem B. Igitur ex hypotheſi addendo D ad B fiet cubus C. & auferendo eundem D. ab eodem B remanebit cubus A. Quamobrem cuborum A C

ᵇ 5. 1. poriſ. interuallum duplum eſt ipſius D. At quoniam A B C ſunt in medietate arithmetica, ᵇ B eſt ſemiſſis ſummæ ipſorum A C. Eò ergo redacti ſumus vt inueniamus duos Numeros, quorum productus ſit ſemiſſis interualli duorum cuborum, & eorundem interuallum ſit ſemiſſis ſummæ eorundem cuborum. Atqui, vt conſtat ex Canone trigeſimæ tertiæ primi , dato interuallo duorum numerorum , & producto multiplicationis , ſi quærantur numeri , vt ſolutio contingat rationalis, oportet vt quadrato interualli addendo quadruplum producti quadratus fiat. Igitur quærendi ſunt duo cubi tales , vt quadrato ſemiſſis ſummæ ipſorum addendo quadruplum ſemiſſis interualli , ſeu duplum interualli eorundem , fiat quadratus. Ponantur ipſorum latera 1 N. + 1 − 1 & 1 N. Erit ſumma cuborum 6 Q. + 2. cuius ſemiſſis 3 Q. + 1. cuius quadratus 9 QQ. + 6 Q. + 1. cui ſi addatur duplum interualli cuborum , puta 4 C. + 12 N. fiet 9 QQ. + 6 Q. + 1. + 4 C. + 12. N. æqualis quadrato. Huius latus eſto 1 + 6 N. − 3 Q. fiet quadratus 9. QQ. + 30 Q. + 1 + 12 N. − 36 C. æqualis 9 QQ. + 6 Q. + 1 + 4 C. + 12 N. vnde fit 1 N. $\frac{3}{5}$. & ſunt cuborum latera $\frac{8}{5}$ & $\frac{2}{5}$. ipſi cubi $\frac{512}{125}$. & $\frac{8}{125}$. ſemiſſis ſummæ horum eſt $\frac{260}{125}$. ſemiſſis interualli $\frac{252}{125}$. Itaque ſi inueniamus duos numeros quorum interuallum ſit $\frac{260}{125}$ productus verò $\frac{252}{125}$ ſoluta erit quæſtio propoſita. Inuenientur autem per trigeſimam tertiam primi puta $\frac{14}{5}$ & $\frac{18}{25}$. quorum productus $\frac{252}{125}$. at interuallum $\frac{52}{25}$, cui ſi addatur & adimatur productus , fiunt cubi $\frac{512}{125}$ & $\frac{8}{125}$.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros , vt producto addendo ſummam , & ab eodem auferendo interuallum numerorum fiat cubus vtrimque.

Patet ex hypotheſi , cuborum qui fieri debent interuallum componi ex ſumma & ex interuallo quæſitorum numerorum. Quare ſint cubi qui fieri debent 1. & 8. Igitur horum interuallum 7. eſt ag-

23. 1. poriſ. gregatum ex ſumma & interuallo numerorum. ᵃ Quare 7. eſt duplum maioris numeri , & ipſe maior numerus eſt $\frac{7}{2}$. ponatur minor 1 N. erit productus $\frac{7}{2}$ N. cui addendo ſummam numerorum , puta $\frac{7}{2}$ + 1 N. fit $\frac{7}{2}$ + $\frac{9}{2}$ N. æqualis 8. vel à producto auferendo interuallum numerorum , manet $\frac{9}{2}$ N. − $\frac{7}{2}$ æqualis 1. & vtraque æquatione reſoluta fit vtrobique idem valor Numeri 1. Sunt ergo quæſiti Numeri 3 $\frac{1}{2}$ & 1. Ex hac autem operatione ſequitur cubos ad placitum ſumi poſſe qui fiant huiuſmodi additione & ſubtractione.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros : vt producto addendo interuallum , & ab eodem auferendo ſummam numerorum , cubus fiat vtrinque.

Sumantur vt prius cubi ad placitum 8. & 64. qui fiant huiuſmodi additione & ſubtractione. Igi-

13. 1. poriſ. tur horum interuallum 56. componetur ex ſumma, & ex interuallo quæſitorum numerorum. ᵃ Quare 56. eſt duplum maioris numeri ; ipſe maior numerus 28. ponatur minor 1 N. erit productus 28 N. cui ſi addas interuallum numerorum fit 27 N. + 28. æqualis 64. vel ſi ab eodem producto auferas ſummam Numerorum fit 27 N. − 28. æqualis 8. & vtraque æquatione reſoluta fit vtrobique 1 N. $\frac{4}{3}$. ſunt ergo quæſiti numeri 28. & $\frac{4}{3}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO SEXTA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo interuallum, & ab eadem auferendo productum, cubus vtrimque fiat.

Sumantur cubi ad placitum dum duplum minoris non ſuperet maiorem, ſumantur ergo 8. & 64. Quia igitur ſummæ quæſitorum numerorum addendo interuallum ipſorum, fit 64. [a] patet 64. eſſe duplum maioris numeri. ergo ipſe maior numerus eſt 32. Ponatur minor 1 N. fiet ſumma 32 + 1 N. à qua auferendo productum 32 N. ſupereſt 32 − 31 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{24}{31}$. Sunt ergo quæſiti numeri 32. & $\frac{24}{31}$. 23. 1. *Poriſ.*

QVÆSTIO SEPTIMA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo productum, & ab eadem auferendo interuallum, cubus fiat vtrimque.

Sumantur rurſus cubi quicunque 8. & 64. Quia ergo ex ſumma Numerorum auferendo interuallum remanet 8. [a] Patet 8. eſſe duplum minoris numeri. Quare ipſe minor eſt 4. Ponatur maior 1 N. erit productus 4 N. cui addendo ſummam fit 4 + 5 N. æqualis 64. & fit 1 N. 12. ſuntque quæſiti Numeri 4. & 12. 23. 1. *Poriſ.*

QVÆSTIO OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt interuallo addendo ſummam, & ab eodem interuallo auferendo productum, cubus vtrimque conficiatur.

Sumantur duo cubi, quorum maior ſuperet duplum minoris, quales ſunt 8. & 64. Quia igitur interuallo numerorum addendo ſummam, fit 64. erit 64. duplum maioris numeri. Ipſe maior numerus 32. Ponatur minor 1 N. erit interuallum 32 − 1 N. vnde auferendo productum, fiet 32 − 33 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{8}{11}$ ſuntque quæſiti numeri 32. & $\frac{8}{11}$.

QVÆSTIO NONA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis, ſiue addatur ſumma, ſiue interuallum ipſorum, fiat cubus.

Ponantur cubi qui fieri debent 8. & 64. Cùm igitur eidem producto addendo interuallum & ſummam numerorum fiant 8. & 64. patet inter ipſos 8. & 64. eandem eſſe differentiam, quæ eſt inter ſummam & interuallum numerorum, [a] at hæc dupla eſt minoris Numeri. Igitur 56. eſt duplum minoris numeri, & ipſe minor numerus eſt 28. Ponatur maior 1 N. erit productus 28 N. interuallum 1 N. − 28. quo ad productum addito fit 29 N. − 28. æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{36}{29}$ maior numerus. Quod eſt impoſſibile, cùm minor ſit 28. Porro 36. eſt compoſitum ex minore cubo, & ex ſemiſſe interualli cuborum, at 29. eſt ipſe ſemiſſis interualli cuborum vnitate auctus. Igitur inueniendi ſunt duo cubi, vt aggregatum ex minore & ex ſemiſſe interualli ipſorum, diuiſum per eundem ſemiſſem vnitate auctum, det quotientem maiorem ipſo ſemiſſe interualli cuborum; ſeu quod idem eſt, oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, ſuperet productum ex ſemiſſe interualli cuborum in ſeipſum vnitate auctum. At hic productus æquatur quadrato ſemiſſis interualli cuborum aucto ſuo latere. Igitur oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, excedat quadratum ſemiſſis eiuſdem interualli auctum ſuo latere, & auferendo vtrimque eundem ſemiſſem interualli cuborum; Oportet vt minor cubus excedat quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Statuatur maior, quilibet cubus, puta 8. & diuidatur 8. in duas partes, quarum maior excedat quadratum ſemiſſis minoris. Quoniam ergo diuiſo 8. in partes æquales 4. & 4. contingit alteram æquari quadrato ſemiſſis alterius, patet ſi altera ponatur maior quàm 4. altera minor, haberi quod quæritur nam maior excedet quadratum ſemiſſis minoris. Proinde poſito maiore cubo 8. talis ponendus eſt minor vt ſit maior quàm 4. Sic enim minor cubus excedet quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Hoc vt facilè fiat, reducatur 8. ad fractionem cubicam denominatam à maiore aliquo cubo, puta ad $\frac{216}{27}$. & ad eiuſdem denominationis fractionem reducatur 4. fiet $\frac{108}{27}$. Tum ſumatur cubus aliquis inter 108. & 216. puta 125. cui ſubſcribendo denominatorem eundem, fient quæſiti Cubi $\frac{125}{27}$ & $\frac{216}{27}$ ſeu 8. per quos commodè ſoluetur quæſtio. Nam eorum interuallum eſt $\frac{91}{27}$ cuius ſemiſſis $\frac{91}{54}$ eſt minor quæſitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. erit ſumma 1 N. + $\frac{91}{54}$ productus verò $\frac{91}{54}$ N. cui addendo ſummam fit $\frac{145}{54}$ N. + $\frac{91}{54}$ æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{341}{145}$ maior ſcilicet numerus, minor autem eſt $\frac{91}{54}$. & ſoluunt quæſtionem. 23: 1. *Poriſ.*

Vt autem methodus quam tradidi ad inueniendum duos cubos, quorum minor excedat quadratum ſemiſſis interualli ipſorum, firmius comprehendatur: ſtatuatur rurſus maior cubus 64. qui diuidatur in duas partes, quarum maior ſuperet quadratum ſemiſſis minoris. Erit igitur maior pars 32

+ 1 N. minor 32 − 1 N. huius ſemiſſis 16 − $\frac{1}{2}$ N. cuius quadratus 256 + $\frac{1}{4}$ Q. − 16 N. debet eſſe minor quàm 32 + 1 N. & addendo vtrimque æqualia, tum auferendo ſimilia à ſimilibus, ac demum omnia per 4 multiplicando, fiunt 68 N. maiores quàm 896 + 1 Q. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. maior, vel certè non minor quàm 18. vnde conſtat maiorem partem de 64. debere eſſe 50. vel maiorem quàm 50. Ponatur 50 minor 14. Patet igitur maiore Cubo poſito 64. minorem ſumendum eſſe non minorem quàm 50. ſic enim eorum interuallum minus erit quàm 14. ac proinde ſemiſſis interualli quadratus minor erit minore cubo, vt requiritur. Itaque reducatur 64. ad fractionem cubicam, puta ad $\frac{4096}{64}$ & ad eandem denominationem reducatur 50. fiet $\frac{3200}{64}$ ſumatur ergo cubus inter 3200. & 4096. qualis eſt 3375. Huic igitur eundem denominatorem adſcribendo, habebuntur cubi quæſiti $\frac{3375}{64}$ & $\frac{4096}{64}$. ſeu 64. Per quos rurſus, ſi libet, ſoluet quæſtionem.

QVÆSTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis ſiue adimatur ſumma, ſiue interuallum ipſorum, fiat cubus.

Eodem ferè logiſmo quo ſuprà concludemus, reperiendos eſſe duos cubos, quorum maior ſuperet quadratum ſemiſſis interualli ipſorum. Ponatur ergo minor 8 maior 8 + 1 N. Igitur 8 + 1 N. debet eſſe maior quàm $\frac{1}{4}$ Q. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. minor quàm 8. Quare poſito minore cubo 8. debet maior eſſe minor quàm 16. reducantur 8. & 16. ad fractionem denominationis cubicæ, puta ad $\frac{64}{8}$ & $\frac{128}{8}$. Quærendus ergo eſt cubus inter 64. & 128. qualis eſt 125. eruntque quæſiti cubi 8. & $\frac{125}{8}$ Quorum interuallum $\frac{61}{8}$ cuius ſemiſſis $\frac{61}{16}$ eſt minor quæſitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. fiet ſumma 1 N. + $\frac{61}{16}$ productus verò $\frac{61}{16}$ N. vnde auferendo ſummam, manet $\frac{45}{16}$ N. − $\frac{61}{16}$ æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{21}{5}$. Tantus eſt maior, minor verò $\frac{61}{16}$. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XXXI.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς τετραγώνους οἱ συντεθέντες καὶ προσλαβόντες τὰς ἰδίας πλευρὰς συντεθείσας ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω δὴ τὸν ιβ. ἐπεὶ πᾶς τετράγωνος λαβὼν τὴν ἰδίαν πλευρὰν καὶ μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον. οὗ ἡ πλευρὰ λείψασα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ ἀριθμόν τινα, ὅς ἐστι τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρά, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἄρα προσλαβόντες μὲν τὰς ἰδίας πλευρὰς ποιοῦσι μονάδας ιβ. προσλαβόντες δὲ καὶ τέσσαρα τέταρτα ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους εἰσὶ δὲ καὶ αἱ μονάδες ιβ. μετὰ τεσσάρων τετάρτων. ὅ ἐστι μονὰς μία, μονάδες ιγ. τὰς ιγ ἄρα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους, καὶ ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀφελὼν μονάδος τὸ ἥμισυ, ἕξω τῶν τεσσάρων τετραγώνων τὰς πλευράς. διαιροῦνται δὲ οἱ ιγ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε δ καὶ τὸν θ. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς ξδ κεων. καὶ λϛ κεων. καὶ ρμδ κεων. καὶ πα κεων. λαβὼν τούτων ἑκάστου τὴν πλευρὰν η εων. ϛ εων. ιβ εων. θ εων. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου τούτων μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ια ι. ζ ι. ιθ ι. ιγ ι. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν ρκα ρ. ὃς δὲ μθ ρ. ὃς δὲ τξα ρ. ὃς δὲ ρξθ ρ.

INVENIRE quatuor numeros quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum coniuncta, numerum imperatum faciat. Sit is 12. Quandoquidem omnis quadratus ſuo latere & vnitatis quadrante auctus facit quadratum, cuius latus ſemiſſe vnitatis multatum, exhibet prioris quadrati latus. At quatuor numeri qui quæruntur, ſuis lateribus adſumptis faciunt 12. iidem vtique adſumentes quatuor vnitatis quadrantes, facient quatuor quadratos. Atqui vnitates 12. auctæ quatuor quadrantibus vnitatis, hoc eſt 1. fiunt 13. Oportet igitur diuidere 13. in quatuor quadratos, tunc ſi à cuiuſlibet latere detraxero $\frac{1}{2}$. habebo quæſitorum quatuor quadratorum latera. Diuiditur autem 13. in duos quadratos 4. & 9. & rurſus quilibet ipſorum diuiditur in duos quadratos, nempe alter in $\frac{64}{25}$ & $\frac{36}{25}$. alter in $\frac{144}{25}$ & $\frac{81}{25}$. ſumens igitur cuiuſque latus, nempe $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. $\frac{12}{5}$. $\frac{9}{5}$. aufero ab vnoquoque illorum $\frac{1}{2}$. & ſunt latera quæſitorum quadratorum $\frac{11}{10}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{19}{10}$. $\frac{13}{10}$. Ipſi ergo quadrati ſunt $\frac{121}{100}$. $\frac{49}{100}$. $\frac{361}{100}$. $\frac{169}{100}$.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA[a] quod aſſumit Diophantus, ſic breuiſſimè domonſtratur. Eſto quilibet numerus A B. & ſemiſſis vnitatis B C. ſintque ipſorum quadrati D. E. & ſumma ipſorum A B. D. E ſit F. Dico F eſſe quadratum à cuius latere ſi auferatur B C. relinquitur A B. [a] Etenim quadratus totius A C æquatur quadratis D. E. & producto bis ex A B in B C. ſed quia B C. eſt ſemiſſis vnitatis, hic productus bis æquatur ipſi A B. vt euidens eſt. Igitur quadratus totius A C. æquatur ſummæ ipſorum A B. D. E. ſeu ipſi F. Quare F eſt quadratus, cuius latus A C. à quo auferendo B C. remanet A B. Quod erat demonſtrandum. *4. ſecundi.*

A..... B ⁝ C.
D 25. E $\frac{1}{4}$. F 30 $\frac{1}{4}$.

Quoniam verò infra docebimus quæſtionem hanc vniuerſalius proponi poſſe, nimirum inueniri poſſe quatuor quadratos, quorum ſumma adſcito quolibet multiplice ſummæ laterum, datum conficiat numerum, neceſſe eſt & hoc lemma vniuerſalius concipi, nimirum ſic.

Omnis quadratus quolibet multiplice ſui lateris auctus, & quadrato ſemiſſis multiplicatoris, quadratum exhibet, cuius latus multatum ſemiſſe multiplicatoris, fit prioris quadrati latus.

D 6.
A..... B... C.
E 25. F 9. G 64.

Eſto quadratus E cuius latus A B. & ſit multiplicator D. cuius ſemiſſis B C. cuius quadratus F. & ſumma ipſorum E F. & producti ex A B in D. eſto G. Dico G eſſe quadratum, à cuius latere ſi auferatur B C. remanet A B. etenim quadratus totius A C. [a] æquatur quadratis partium, nimirum ipſis E. F & producto bis ex A B in B C. ſeu producto ex A B in D. quamobrem G. eſt quadratus ipſius A C. vnde patet auferendo B C. relinqui A B. Quod erat demonſtrandum. *4. ſecundi.*

Cæterùm totum analyſeos Diophantææ negotium in eo conſiſtit, vt datus numerus vnitate auctus diuidatur in quatuor quadratos. Quod qui vniuerſaliter fieri poſſit non docuit Diophantus. Equidem ſi datus numerus vnitate auctus quadratus ſit, vel ſuaptè natura ex duobus quadratis compoſitus, facilè diuidetur in quatuor, atque etiam in plures quotlibet quadratos per octauam ſecundi. Sed ſi harum proprietatum neutra illi accidat, quomodo res abſoluenda ſit non conſtat ex Diophanto. Etenim datus numeros eſto 13. Tunc numerus 14. diuidendus erit in quatuor quadratos. Sed quo artificio? Nam 14. nec quadratus eſt, nec ex duobus quadratis compoſitus. Hæc difficultas non immeritò prima fronte inextricabilis appareat, quamuis rem ſubtilius conſideranti facilè euaneſcat. Etenim datus numerus vnitate auctus etſi nec quadratus ſit, nec ex duobus quadratis compoſitus, attamen eum ex tribus, vel etiam ex quatuor quadratis ſuaptè natura componi neceſſe eſt. Ita ſupradictus numerus 14. componitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Quare vno ex illis in duos diuiſo per octauam ſecundi, iam totus numerus in quatuor quadratos diuiſus erit. Omnem autem numerum vel quadratum eſſe, vel ex duobus, aut tribus, aut etiam quatuor quadratis componi ſatis experiendo deprehendes. Mihi ſanè perfectâ id demonſtratione aſſequi nondum licuit quam qui proferet maximas ei habebo gratias, præſertim cùm non ſolùm in hac quæſtione, ſed & in nonnullis libri quinti hoc ſupponere videatur Diophàntus. Interim libet id inductione confirmare, oſtendendo proprium eſſe numerorum omnium ab 1. vſque ad 120. vt conſtat ex ſequenti diagrammate.

1. Quadratus
2. ex 1. 1.
3. ex 1. 1. 1.
4. Quadratus.
5. ex 1. 4.
6. ex 1. 4. 1.
7. ex 1. 1. 1. 4.
8. ex 4. 4.
9. Quadratus.
10. ex 1. 9.
11. ex 1. 1. 9.
12. ex 4. 4. 4. vel 1. 1. 1. 9.
13. ex 4. 9.
14. ex 1. 4. 9.
15. ex 1. 1. 4. 9.
16. Quadratus.
17. ex 1. 16.
18. ex 9. 9. vel 1. 1. 16.
19. ex 1. 9. 9. vel 1. 1. 1. 16.
20. ex 4. 16. vel 1. 1. 9. 9.
21. ex 1. 4. 16.
22. ex 4. 9. 9. vel 1. 1. 4. 16.
23. ex 1. 4. 9. 9.
24. ex 4. 4. 16.
25. Quadratus.
26. ex 1. 25. vel 4. 4. 9. 9.
27. ex 1. 1. 25. vel 9. 9. 9.
28. ex 1. 1. 1. 25. vel 1. 9. 9. 9. vel 4. 4. 4. 16.
29. ex 4. 25.
30. ex 1. 4. 25.
31. ex 1. 1. 4. 25. vel 4. 9. 9. 9.
32. ex 16. 16.
33. ex 1. 16. 16.
34. ex 9. 25.
35. ex 1. 9. 25.
36. Quadratus.
37. ex 1. 36.
38. ex 1. 1. 36.
39. ex 1. 1. 1. 36. vel 1. 4. 9. 25.
40. ex 4. 36.
41. ex 16. 25. vel 1. 4. 36.
42. ex 1. 16. 25.

43. ex 9. 9. 25. vel 1. 1. 16. 25.
44. ex 4. 4 36.
45. ex 9. 36. vel 4. 4. 16. 25.
46. ex 1. 9. 36. vel 1. 4. 16. 25.
47. ex 1. 1. 9. 36. vel 4. 9. 9. 25.
48. ex 16. 16. 16. vel 4. 4. 4. 36.
49. Quadratus.
50. ex 1. 49. vel 25. 25.
51. ex 1. 1. 49. vel 1. 25. 25.
52. ex 16. 36.
53. ex 4. 49. vel 1. 16. 36.
54. ex 1. 4. 49.
55. ex 1. 1. 4. 49. vel 1. 9. 9. 36.
56. ex 4. 16. 36.
57. ex 1. 4. 16. 36.
58. ex 9. 49.
59. ex 1. 9. 49. vel 9. 25. 25.
60. ex 1. 1. 9. 49. vel 1. 9. 25. 25. vel 4. 4. 16. 36.
61. ex 25. 36.
62. ex 1. 25. 36.
63. ex 1. 1. 25. 36.
64. Quadratus.
65. ex 1. 64. vel 16. 49.
66. ex 1. 1. 64. vel 1. 16. 49.
67. ex 9. 9. 49.
68. ex 4. 64.
69. ex 1. 4. 64. vel 4. 16. 49.
70. ex 9. 25. 36.
71. ex 1. 9. 25. 36.
72. ex 36. 36. vel 4. 4. 64.
73. ex 9. 64.
74. ex 25. 49.
75. ex 1. 25. 49.
76. ex 4. 36. 36. vel 1. 1. 25. 49.
77. ex 4. 9. 64.
78. ex 4. 25. 49.
79. ex 1. 4. 25. 49. vel 9. 9. 25. 36.
80. ex 16. 64.
81. Quadratus.
82. ex 1. 81.
83. ex 1. 1. 81. vel 9. 25. 49.
84. ex 4. 16. 64.
85. ex 4. 81. vel 1. 36. 49.
86. ex 1. 4. 81. vel 1. 36. 49.
87. ex 1. 1. 4. 81. vel 1. 1. 36. 49.
88. ex 16. 16. 36.
89. ex 25. 64.
90. ex 9. 81.
91. ex 1. 9. 81.
92. ex 1. 1. 9. 81. vel 4. 16. 36. 36. vel 9. 9. 25. 49.
93. ex 4. 25. 64.
94. ex 4. 9. 81. vel 9. 36. 49.
95. ex 1. 4. 9. 81. vel 1. 9. 36. 49.
96. ex 16. 16. 64.
97. ex 16. 81.
98. ex 49. 49. vel 1. 16. 81.
99. ex 1. 49. 49. vel 9. 9. 81.
100. Quadratus.
101. ex 1. 100.
102. ex 1. 1. 100.
103. ex 1. 1. 1. 100. vel 4. 9. 9. 81. vel 4. 25. 25. 49. vel 9. 9. 36. 49.
104. ex 4. 100.
105. ex 1. 4. 100.
106. ex 25. 81.
107. ex 1. 25. 81.
108. ex 36. 36. 36. vel 1. 1. 25. 81.
109. ex 9. 100.
110. ex 1. 9. 100.
111. ex 1. 1. 9. 100.
112. ex 4. 4. 4. 100. vel 4. 36. 36. 36. vel 16. 16. 16. 64.
113. ex 49. 64.
114. ex 1. 49. 64.
115. ex 9. 25. 81.
116. ex 16. 100.
117. ex 36. 81.
118. ex 1. 36. 81.
119. ex 9. 25. 36. 49.
120. ex 4. 16. 100.

Tu, ſi vacat vlterius experiare licebit. Ego ſanè de omnibus numeris vſque ad 325. experimentum ſumpſi. Facile autem ad quotlibet quadratos extendetur quæſtio, ſed ſi duo tantùm quadrati poſtulentur, quorum ſumma cum ſumma laterum datum conficiat numerum, oportebit dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis. Et ſi tres quærantur quadrati, oportebit dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis. Si verò plures poſtulentur quadrati, nulla conditio præſcribetur, quia tunc continget quendam numerum diuidendum eſſe in quatuor aut in plures quadratos, quod ſemper fieri poſſe docuimus. Denique eadem arte, & ampliando lemma Diophanti, vt ſupra fecimus, inuenieutur quotlibet quadrati, quorum ſumma adſumpto quolibet multiplici ſummæ laterum, datum conficiat numerum. Quoniam autem in his omnibus quæſtionibus plerumque accidit aliquem numerum ita diuidendum eſſe in duos, vel tres vel plures quadratos, vt quilibet eorum excedat certum aliquem numerum, quod ritè perfici nequit, niſi per artificium quo vtitur Diophantus duodecima, decima tertia, & decima quarta quinti, ſatius erit hujuſmodi quæſtionum explicationem in eum locum reiicere.

OBSERVATIO D. P. F.

IMo propoſitionem pulcherrimam & maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel eſſe triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compoſitum eſſe quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compoſitum

eſſe pentagonum, vel ex duobus tribus quatuor aut quinque pentagonis compoſitum & ſic deinceps in infinitum in hexagonis heptagonis & poligonis quibuslibet enuntianda videlicet pro numero angulorum generali & mirabili propoſitione; eius autem demonſtrationem quæ ex multis varijs & abſtruſiſsimis numerorum myſterijs deriuatur hic apponere non licet, opus enim & librum integrum huic operi deſtinare decreuimus & Arithmeticen hac in parte vltra veteres & notos terminos mirum in modum promouere.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE quatuor quadratos, quorum ſumma laterum ſumma detracta faciat præſcriptum numerum. Sit is 4. Quia volo primum ſuo multatum latere, & ſecundum ſuo multatum latere, itemque tertium & quartum ſuis multatos lateribus facere 4. Cæterùm omnis quadratus ſuo latere multatus, & adſumens vnitatis quadrantem, facit quadratum, cuius latus adſcito vnitatis ſemiſſe exhibet prioris quadrati latus; quatuor vtique quadrati quæſiti multati ſuis lateribus, & adſumentes quatuor vnitatis quadrantes, nimirum 1. facient quatuor quadratos. Sed & iidem multati ſuis lateribus, faciunt vnitates 4. & adſumentes 1. faciunt 5. Hoc ergo mihi incumbit vt diuidam 5. in quatuor quadratos, quorum ſingulorum lateribus vbi adiecero $\frac{1}{2}$. inuenero latera quæſitorum quadratorum. Diuiditur autem 5. in quadratos $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. Horum ſumo latera, nimirum $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{6}{5}$. addo cuilibet illorum $\frac{1}{2}$. & inuenio latera $\frac{11}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{21}{10}$. $\frac{17}{10}$. Sunt ergo quæſiti quadrati $\frac{121}{100}$. $\frac{169}{100}$. $\frac{441}{100}$. $\frac{289}{100}$.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας τετραγώνους, οἱ συντεθέντες καὶ λείψαντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω δὴ τὸν δ. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν πρῶτον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευράν, καὶ τὸν δεύτερον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευράν, καὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸν τέταρτον ὁμοίως λείψαντας αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιεῖν μο δ. ἀλλὰ μὴν καὶ πᾶς τετράγωνος λείψας τὴν αὐτοῦ πλευρὰν καὶ προσλαβὼν μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ προσλαβοῦσα μονάδος ἥμισυ ποιεῖ τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευράν, ὥστε οἱ τέσσαρες τετράγωνοι λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς καὶ προσλαβόντες μονάδος τέσσαρα τέταρτα, τουτέστι μονάδα μίαν ποιήσουσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλὰ καὶ οἱ τέσσαρες λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιοῦσι μο δ. προσλαβόντες δὲ καὶ μονάδα μίαν ποιοῦσι μο ε. ἀπῆκται οὖν μοι τὸν ε διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους. ἑκάστῃ τῶν πλευρῶν προστίθημι μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ εὑρίσκω τὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων πλευράς. διαιρεῖται δὴ ὁ ε. εἰς τέσσαρας τετραγώνους θ κε. καὶ ις κε. καὶ ξδ κε. καὶ λϛ κε. λαμβάνω τούτων τὰς πλευράς, γίνονται γ ε. δ ε. η ε. ϛ ε. προστίθημι ἑκάστῳ τούτων τὸ ἥμισυ, καὶ εὑρίσκω τὰς πλευράς, ἅ εἰσιν ια ι. ιγ ι. κα ι. ιζ ι. ἔσονται δὴ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ὃς μὲν ρκα ρ. ὃς δὲ υμα ρ. ὃς δὲ σπθ ρ.

IN QVAESTIONEM XXXII.

LEMMA Diophanti vniuerſaliùs etiam proponetur hoc pacto.

Omnis quadratus quolibet multiplice ſui lateris multatus, & adſumens quadratum ſemiſſis multiplicatoris, quadratum facit, cuius latus adſcito ſemiſſe multiplicatoris, exhibet latus prioris quadrati. Oportet autem latus prioris quadrati eſſe maius ſemiſſe multiplicatoris.

H 48. D 6.
A . . . . . B . . . C.
E 25. F 9. G 64.

Eſto quadratus G. euius latus A C. & ſit multiplicator D euius ſemiſſis B C. euius quadratus F. productus autem ex D in A C. ſit H. Itaque auferendo H ex G. & reſiduo addendo F. fiat E. Dico E quadratum eſſe à latere A B. eui addito B C. fit A C latus prioris quadrati G. Etenim quia productus ex D in A C puta H. ' æquatur productis ex D in ſingulos A B. B C. productus autem ex D in ſuum ſemiſſem B C æquatur duplo quadrati F. patet auferre H ex G. idem eſſe, atque auferre ex G productum ex D in A B & duplum quadrati F. Quare eùm reſiduo addendo F fiat E patet E fieri ſi ex G auferatur productus ex D in A B & quadratus F. vnde è conuerſo ſi ipſi E addantur productus ex D in A B & quadratus F. fiet G. ſed vt conſtat ex lemmate præcedentis, ſi quadrato ex A B addantur idem pro- 1. ſecundi.

ductus ex D in A B. & idem quadratus F fiet idem quadratus G. Igitur E eſt quadratus ipſius A B. Quod demonſtrandum erat.

Hæc quæſtio quoque ad quotlibet numeros extendetur, vt aliquot exemplis oſtendere libet, cùm hic ad propoſitiones libri quinti recurrere minimè cogamur. Itaque.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, laterum ſumma detracta conficiat datum numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis.

Datus eſto 6. Igitur ad 6. addendo duos quadrantes vnitatis, patet 6 $\frac{1}{2}$ diuidendum in duos quadratos, & vtrique lateri addendo $\frac{1}{2}$ fient quæſitorum quadratorum latera. ducantur omnia in 4. fiet 26. diuidendus in duos quadratos. Diuiditur autem in 25. & 1. quorum latera 5 & 1. quorum ſemiſſis, puta $\frac{5}{2}$ & $\frac{1}{2}$ ſunt latera quadratorum ex quibus 6 $\frac{1}{2}$ componitur. Addo ergo vnicuique $\frac{1}{2}$. & fiunt latera quæſitorum quadratorum 3. & 1. quæ ſoluunt quæſtionem, nam ſumma laterum eſt 4. quadratorum 10. vnde auferendo 4. manet 6. Rurſus.

Inueniantur tres quadrati, quorum ſumma, laterum ſumma detracta datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis.

Datus eſto 8. Igitur ad 8. addendo tres quadrantes vnitatis, fiet 8 $\frac{3}{4}$ diuidendus in tres quadratos, omnia per 4. fiet 35. diuidendus in tres quadratos. Diuiditur autem in 1. 9. 25. quorum latera 1. 3. 5. quorum ſemiſſis $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. ſunt latera quadratorum, ex quibus 8 $\frac{3}{4}$ componitur. Quare vnicuique addendo $\frac{1}{2}$ fient quæſitorum latera quadratorum 1. 2. 3. Nam ſumma quadratorum fit 14. vnde auferendo 6. ſummam laterum, ſupereſt 8. Rurſus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum ſumma, laterum ſumma detracta, datum faciat numerum.

Datus eſto 3. Igitur ad 3. addendo quinque quadrantes vnitatis fiet 4 $\frac{1}{4}$ diuidendus in quinque quadratos omnia per 4. fiet 17. diuidendus in quinque quadratos. Diuiditur autem in 4. 9. 4. & ſi duo ex illis in duos diuidantur, totus 17. in quinque diuiſus erit, diuidatur ergo 4. in quadratos $\frac{16}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & rurſus 9. diuidatur in duos quadratos $\frac{81}{25}$. & $\frac{144}{25}$ ſic totus 17. diuiſus eſt in quinque quadratos, quorum latera 2. $\frac{4}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{12}{5}$. quorum ſemiſſes 1. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{6}{5}$. ſunt latera quadratorum ex quibus componitur 4 $\frac{1}{4}$. vnde ſingulis addendo $\frac{1}{2}$. fiunt quæſitorum quadratorum latera $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{14}{10}$. $\frac{17}{10}$. & ſoluunt quæſtionem. Item.

Inueniantur quatuor quadrati, quorum ſumma, detracto ſextuplo ſummæ laterum, datum conficiat numerum. Datus eſto 4.

Quoniam, vt conſtat ex lemmate ſupra tradito, omnis quadratus multatus ſextuplo ſui lateris, & adſumens 9. quadratum facit, cuius latus adſcito 3. exhibet prioris quadrati latus. Quatuor vtique quadrati multati ſextuplo laterum & adſumentes quater 9. nimirum 36. facient quatuor quadratos. Quare cùm quatuor quadrati multati ſextuplo laterum faciant 4. patet addito 4. ad 36. fieri 40. diuidendum in quatuor quadratos, quorum lateribus ſi addatur 3. ſigillatim, fient latera quæſitorum quadratorum. Porro 40. diuiditur in duos quadratos 36. & 4. quorum quilibet ſi diuidatur rurſus in duos, puta 4. in $\frac{36}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & ſimiliter 36. in $\frac{324}{25}$ & $\frac{576}{25}$. Iam totus 40. in quatuor quadratos diuiſus erit, quorum latera $\frac{6}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{18}{5}$. $\frac{24}{5}$. quibus addendo ſigillatim ternarium, fiunt latera quæſitorum quadratorum $\frac{21}{5}$. $\frac{23}{5}$. $\frac{33}{5}$ $\frac{39}{5}$. & ſoluunt quæſtionem. Rurſus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum ſumma, detracto ſextuplo ſummæ laterum, datum faciat numerum.

Datus eſto 10. Igitur ad 10. addendo quintuplum nouenarij, nimirum 45. fiet 55. diuidendus in quinque quadratos, & cujuſlibet lateri addendo 3. fient quæſitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 55. in quatuor quadratos 1. 1. 4. 49. Quare vnus illorum puta 1. rurſus in duos diuidatur, nimirum in $\frac{9}{25}$ & $\frac{16}{25}$. & ſic totus 55. in quinque quadratos diuiſus erit, quorum latera $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. 1. 2. 7. quibus addendo ſigillatim 3. fient latera quæſitorum quadratorum $\frac{18}{5}$. $\frac{19}{5}$. 4. 5. 10. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XXXIII.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι μ° γ. ᾧ δὲ μ° ι. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν

VNITATEM diuidere in duos numeros, & vtrique addere datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Eſto diuidenda vnitas in duos numeros, & oporteat

alteri addere 3. alteri 5. & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Ponatur primus 1 N. ergo ſecundus erit 1 − 1 N. & ſi primo addantur 3. fit 1 N. + 3. At ſi ſecundo addantur 5. fit 6 − 1 N. & productus eorum multiplicatione eſt 3 N. + 18. − 1 Q. æqualis quadrato. Eſto quadrato 4 Q. Communis addatur defectus, fiunt 3 N. + 18. æquales 5 Q. & non eſt rationalis æquatio. Arqui 5 Q. eſt quadratus numerus vnitate auctus. Oportet itaque hunc ductum in vnitates 18. & adſumentem quadratum ſemiſſis 3 N. nimirum 2 $\frac{1}{4}$ facere quadratum. Eò igitur nunc redactus ſum, vt quæram quadratum qui adſumpta vnitate, & per 18. multiplicatus, adſcitiſque 2 $\frac{1}{4}$ faciat quadratum. Eſto quadratus ille 1 Q. Hic vnitate auctus & ductus in 18. adſcitiſque 2 $\frac{1}{4}$ fit 18 Q. + 20 $\frac{1}{4}$ æqualis quadrato. Omnia quater, fiunt 72 Q. + 81. æqualia quadrato. Formo quadratum à 8 N. + 9. & fit 1 N. 18. Ad poſitiones. Erit quadratus 324. Redeo ad propoſitum initio, & 3 N. + 18 − 1 Q. æquo quadrato iam inuento. 324 Q. & fit 1 N. $\frac{78}{325}$ hoc eſt $\frac{6}{25}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{6}{25}$. ſecundus $\frac{19}{25}$.

τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ςʹ ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μο ᾱ ⋔ ςʹ ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μο γ̄. ἔσται ςʹ ᾱ μο γ̄. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μο ε̄. ἔσται μο ϛ̄ ⋔ ςʹ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς γ̄ μο ιη̄ ⋔ δυ ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δυ δ̄. καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, γίνονται ςςοὶ γ̄ μο ιη̄ ἴσαι δυ ε̄. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. ἀλλ' αἱ δυ ε̄. ἐστὶ τετράγωνος μετὰ μο ᾱ. δεῖ δὴ ταῦτα ἐπὶ τὰς ιη̄. μονάδας πολλαπλασιασθέντα, καὶ προσλαβόντα τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τῶν ξ ἀριθμῶν τετράγωνον. τουτέστι β̄. α δʹ. ποιεῖν τετράγωνον. διὰ τοῦτο πίπτω ἀπῆκται μοι εἰς τὸ ζητῆσαι τετράγωνον ὃς προσλαβὼν μο ᾱ. καὶ ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο β̄. α δʹ. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τετράγωνος δυ ᾱ. οὗτος μετὰ μο ᾱ ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο β. α δʹ. ποιεῖ δυ ιη̄ μο κ̄. α δʹ. ἴσας τετραγώνῳ πάντα τετράκις, γίνονται δυ οβ̄ μο πᾱ ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς η̄ μο θ̄. γίνεται ὁ ςʹ μο ιη̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ τετράγωνος τκδ̄. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἰσῶσαι ςςοὺς γ̄ μο ιη̄ ⋔ δυ ᾱ ἴσους τετραγώνῳ. ὃν νῦν τάσσω δυ τκδ̄. καὶ γίνεται ὁ ςʹ οη̄ τκεʹ. τουτέστιν ϛ̄ κεʹ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϛ̄ κεʹ. ὁ δὲ δεύτερος ιθ̄ κεʹ.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIc Diophantus in ſolutione lemmatis aſſumpti ad regulas compoſitas deuoluitur. Sed ſubtili ſane artificio cauet, ne incidat in numeros ſurdos, cuius defectu cautionis non arbitratus ſum ad huiuſmodi regulas deueniendum eſſe vigeſima tertia quæſtione libri huius. Quamuis enim in propoſito ibi exemplo res bene ſuccedat, & ſolutio contingat rationalis, attamen non oſtendit author quomodo id neceſſario eueniat ſi aliquo modo mutetur operatio, quod in hac quæſtione eleganter præſtitit. Cæterùm quid ſibi velit Diophantus, non ſatis adſequutus eſt Xilander. Putat enim eo quod 5 Q. æquantur 3 N. + 18. æquationem reducendam eſſe ad 1 Q. diuidendo ſcilicet omnia per 5. vnde fit 1 Q. æqualis $\frac{3}{5}$ N. + $\frac{18}{5}$. Quamobrem cùm Diophantus ait quadratum ſemiſſis de 3 N. addendum producto ex 5. in 18. cenſet Xilander ſumi debere ſemiſſem non de 3. ſimpliciter, ſed de $\frac{3}{5}$. & eius quadratum eſſe non 2 $\frac{1}{4}$ ſimpliciter, ſed 2. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{25}$. quæ interpretatio nimis coacta eſt, & à mente Diophanti prorſus aliena. Tenebras autem effudit Xilandro, ignorantia methodi qua regulas compoſitas reſoluit Diophantus, quam ad trigeſimam tertiam primi explicauimus. Nam ad vitandas fractiones, rarò Diophantus æquationem reducit ad 1 Q. Sed ducto numero quadratorum in numerum vnitatum, addit producto quadratum ſemiſſis numeri Numerorum, & reliqua perficit, vt loco citato docuimus. Hinc eſt cur velit 5. numerum quadratorum duci in vnitates 18. & producto 90. addi 2 $\frac{1}{4}$ quadratum ſemiſſis numeri numerorum 3. Quoniam verò, vt ſolutio rationalis ſit oportet hac additione fieri quadratum, apparet neceſſitas lemmatis aſſumpti. Cùm enim numerus quadrato æquandus ſit 3 N. + 18 − 1 Q. patet quærendum eſſe quadratum, qui vnitate auctus & per 18. multiplicatus, itaque adſumens 2 $\frac{1}{4}$. faciat quadratum.

In huius quoque lemmatis explicatione inſignis occurrit difficultas, cuius tamen ne verbum quidem Xilander. Cùm enim tandem 72. Q. + 81. æquandus ſit quadrato, euidens eſt quadrati latus commodè fingi non poſſe, niſi vel quadratorum vel vnitatum numerus quadratus ſit. Oſtendendum ergo eſt neceſſario euenire vt vnitatum numerus, qualis eſt hîc 81. quadratus ſit alioquin caſu, non arte certa res ſuccedere videbitur. Atqui 81. eſt quadruplum ipſius 20. $\frac{1}{4}$. Quare vt 81. quadratus ſit oportuit prius 20 $\frac{1}{4}$ quadratum eſſe. Porro 20. $\frac{1}{4}$ fit ad 18. addendo 2 $\frac{1}{4}$. Videndum igitur vnde pro-

uenerint 18. & 2 $\frac{1}{4}$. factus eſt autem 18. ex 3. in 6. & 2 $\frac{1}{4}$ eſt quadratus ſemiſſis de 3 N. Fiunt autem 3 N. addendo ſimul + 6 N. & − 3 N. in multiplicatione 1 N. + 3. per 6 − 1 N. Quare cùm ob ſignorum contrarietatem additio in ſubtractionem mutetur, patet 3 N. tandem fieri auferendo 3 N. à 6 N. Quamobrem 18. eſt productus ex 3. in 6. At 2 $\frac{1}{4}$ eſt quadratus ſemiſſis interualli eorundem 3. & 6.

2. 2. Poriſ. ¹ Conſtat autem producto multiplicationis duorum numerorum addendo quadratum ſemiſſis interualli eorundem, fieri quadratum ſemiſſis ſummæ ipſorum. Quare patet propoſitum; ſic vides 20 $\frac{1}{4}$ ſeu $\frac{81}{4}$ eſſe quadratum ſemiſſis duorum 3. & 6. ſeu ipſius $\frac{9}{2}$.

Rurſus in fingendo latere quadrati 72 Q. + 81. magna cautio adhibenda eſt, quod non vidit Xilander, nec attigit ipſe Diophantus. Etenim ſi ad hanc æquationem ſolùm reſpicias, ſufficit ſi ponas hoc latus 9 + tot Numeris, quorum quadratus ſit minor quàm 72. Sed ſi ponas hoc latus 9 + 6 N. vel 9. + aliquo numero Numerorum minore quàm 6. fiet valor Numeri qui prioribus poſitionibus nullatenus accommodari poterit, cùm enim eius quadratus æquabitur 3 N. + 18 − 1 Q. fiet 1. N. maior vnitate, quod eſt abſurdum, cùm 1 N. ponatur pars vnitatis. Hoc igitur incommodum vt vitemus, ſic ratiocinandum eſt. Quia 3 N. + 18 − 1 Q. ſic quadrato æquandus eſt, vt fiat 1 N. minor vnitate, in hac autem æquatione debent tandem 3 N. + 18. æquari cuidam quadratorum numero: at ſi 1 N. ponatur æqualis vnitati, vtique 3 N. + 18. æquabuntur 21 Q. Quo verò minor ponetur valor Numeri, eo maiori numeri quadratorum æquabuntur 3 N. + 18. manifeſtũ eſt vt fiat 1 N. minor vnitate oportere vt 3 N. + 18. æquentur numero quadratorum maiori quàm 21. Porro numerus iſte quadratorũ fit ex quodam quadrato vnitate aucto, quare ſublata vnitate de 21. conſequens eſt quadratum cui æquari debet 3 N. + 18 − 1 Q. maiorem eſſe quàm 20. Cùm ergo latus proximum ipſius 20. ſit 4 $\frac{1}{2}$ manifeſtũ eſt, latus quadrati 72 Q. + 8. ita ponendũ eſſe vt fiat valor Numeri maior quàm 4 $\frac{1}{2}$. fit autem in hac æquatione valor Numeri, auferendo à 72. quendam quadratum, & per reſiduum diuidendo productum ex 18. in latus eiuſdem quadrati. Igitur $\frac{18 N}{72 - 1 Q}$. maior eſſe debet quàm 4 $\frac{1}{2}$. & tandem re ad integros redacta 18 N. maiores ſunt quàm 324 − 4 $\frac{1}{2}$ Q. & addito defectu, atque etiam facto paralaboliſmo, quia commodè poteſt fieri, tandem 72. maior eſſe debet quàm 4 N. + 1 Q. Qua æquatione reſoluta cùm fiat 1 N. 6 $\frac{1}{2}$ ferè patet latus fictitium ponendum 9 + tot numeris, qui exeedant 6 $\frac{1}{2}$. ſic Diophantus poſuit 9 + 8 N. Poni quoque poterat 9 + 7 N. vel 9 + aliquot Numeris, qui exeedant 6 $\frac{1}{2}$. & quorum quadratus ſit minor quàm 72.

Eodem prorſus artificio quæſtio hæc ad omnem numerum extendetur. Quod vt exemplo comprobemus. Eſto 2. diuidendus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundæ 5. & ſummas inter ſe multiplicando, fiat quadratus. Eſto prima pars 1 N. ergo ſecunda 2 − 1 N. & ſi primæ addatur 3. ſecundæ 5. fiunt 1 N. + 3. & 7 − 1 N. & productus eorum multiplicatione eſt 4 N. + 21 − 1 Q. æquandus quadrato, videlicet alicui quadratorum Numero quadrato, qui talis ſumendus eſt, vt auctus vnitate, & multiplicatus in 21. itaque adſumens 4. faciat quadratum. Ponatur is 1 Q. Igitur 21 Q. + 25. quadrato æquandus eſt. Sed curandum vt talis hîc proueniat valor Numeri, vt applicatus priori æquationi, fiat in ea 1 N. minor quàm 2. quia 1 N. ponitur eſſe pars binarij. Cùm ergo æquando 4 N. + 21 − 1 Q. alicui quadrato, tandem 4 N. + 21. æquentur aliquot quadratis, ſi autem 1. N. ponatur 2. fiant 4 N. + 21. æquales 7 $\frac{1}{4}$ Q. patet vt fiat 1 N. minor quàm 2. oportere 4 N. + 21. æquari quadratorum numero maiori quàm 7 $\frac{1}{4}$. Et quia ille quadratorum numerus eſt quadratus vnitate auctus, auferendo vnitatem de 7 $\frac{1}{4}$ ſequitur quadratum qui æqualis ponetur 4 N. + 21 − 1 Q. maiorem eſſe debere quàm 6 $\frac{1}{4}$. atque ideo latus eius maius eſſe oportet quàm $\frac{5}{2}$. Quamobrem numeri 21 Q. + 25. latus ita fingendum eſt, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{5}{2}$. Fit autem 1 N. auferendo quadratum quendam de 21. & per reſiduum diuidendo decuplum lateris illius. Quare $\frac{10 N}{21 - 1 Q}$ maior eſſe debet quàm $\frac{5}{2}$. qua æquatione ritè præparata, tandem fiunt 4 N. + 1 Q. maiores quàm 21. vnde conſtat 1 N. excedere debere 3. Ponatur igitur latus fictitium 5 + 4 N. fiet quadratus 25 + 40 N. + 16 Q. æqualis 21 Q. + 25. & fiet 1 N. 8. quadratus 64. Redeo ad propoſitum initio, & 4 N. + 21 − 1 Q. æquo quadrato 64 Q. & fit 1 N. $\frac{39}{65}$. Prima pars binarij. Secunda verò eſt $\frac{91}{65}$ quæ ſoluunt quæſtionem nam primæ addendo 3. ſecundæ 5. fiunt $\frac{234}{65}$. & $\frac{416}{65}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{97344}{4225}$ quadratus à latere $\frac{312}{65}$.

QVAESTIO XXXIV.

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι μο γ. ᾧ δὲ μο ε. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. καὶ λεῖψις μο γ ὡς προσλαμβάνει. λοιπὸς

VNITATEM diuidere in duos numeros, & addere vtrique datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Sit vnitas diuidenda in duos numeros, & oporteat alteri addere 3. alteri 5. & ita facere quadratum productum multiplicationis eorum

rum. Ponatur primus 1 N. − 3. quandoquidem 3. debet illi addi, relinquetur ergo ſecundus 4 − 1 N. & ſi primo addantur 3 fit 1 N. ſi autem ſecundo addantur 5. fit 9 − 1 N. & fit eorum multiplicatione 9 N. − 1 Q. æqualis quadrato. Eſto quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{9}{5}$. ſi ad poſitiones hoc applicare coner, non poſſum auferre 3 de 1 N. Oportet igitur numerum maiorem quidem eſſe quam 3. minorem verò quàm 4. Atqui 1 N. factus eſt diuiſo 9. per 5. Ipſe autem 5. eſt quadratus vnitate auctus. Iam ſi 9. diuiſus per quadratũ aliquem vnitate auctum facit numerum maiorem quam 3. oportet eum per quem diuiditur minorẽ eſſe quàm 3. ſed his per quem 9. diuiditur eſt quadratus vnitate auctus. Ergo quadratus vnitate auctus minor eſt quàm 3. Auferatur vnitas. Igitur quadratus minor eſt quàm 2. Rurſus quia volumus ſecundum diuiſum per quadratũ vnitate auctum, facere numerum minorem quàm 4. oportet eum per quem diuiditur maiorem eſſe quàm 2 $\frac{1}{4}$. Is autem per quem 9. diuiditur eſt quadratus vnitate auctus, proinde quadratus vnitate auctus maior eſt quàm 2 $\frac{1}{4}$. Auferatur vnitas. Ergo quadratus maior eſt quàm 1 $\frac{1}{4}$. Sed iam oſtenſus eſt minor quàm 2. Eo itaque res deducitur, vt inueniam aliquem quadratum maiorem quàm 1 $\frac{1}{4}$ minorem quàm 2. Reſoluo hæc in partes quadratas, nempè in ſexageſimas quartas, & fiunt 80. & 128. Facilè ergo inuenietur quadratus $\frac{100}{64}$ ſeu $\frac{25}{16}$. Reuertor ad id quod initio erat propoſitum. Quærebam 9 N. − 1 Q. æquare quadrato. eſto inuento quadrato $\frac{25}{16}$ Q. & fit 1 N. $\frac{144}{41}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{21}{41}$. ſecundus $\frac{20}{41}$.

ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μο δ̄ λείψει ς^ο ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μο γ̄. γίνεται ς^ο ᾱ. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μο ε̄. γίνεται μο θ̄ λείψει ς^ο ᾱ. καί ἐστιν ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν ςς θ̄ λείψει Δ^Υ ᾱ ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω Δ^Υ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ος θ̄ ε^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ ς^ου ᾱ. μονάδας γ̄. δεῖ οὖν τὸν ς^ον μείζονα μὲν εἶναι μο γ̄. ἐλάσσονα δὲ μο δ̄. ὁ δὲ ς^ος εὕρηται ἐκ τοῦ τὸν θ̄ μερισθῆναι εἰς τὸν ε̄. ὅς ἐστι τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ. εἰ δὲ ὁ θ̄ μεριζόμενος εἴς τινα τετράγωνον σὺν μο ᾱ. ἀριθμὸν ποιεῖ μείζονα μο γ̄. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, ἐλάσσων ἐστὶ τῶν γ̄. εἰς ὃν δὲ ὁ θ̄ μερίζεται τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ ἐλάσσων ἐστὶ τῶν γ̄. καὶ ἤρθω ἡ μονάς. ὁ ἄρα τετράγωνος ἐλάσσων ἐστὶ μο β̄. πάλιν θέλομεν τὸν δεύτερον μερίζοντα εἰς τετράγωνον σὺν μονάδι μιᾷ ποιεῖν ἀριθμὸν ἐλάσσονα μο δ̄. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, μείζων ἐστὶ μο β̄. ᾱ δ^ων. εἰς ὃν δὲ μερίζεται, ὁ δὲ τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι μιᾷ, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν τῇ μονάδι μείζων ἐστὶ μο β̄. ᾱ δ^ων. καὶ ἤρθω ἡ μονὰς μία. ὥστε ὁ τετράγωνος μείζων ἐστὶ μονάδος, καὶ ᾱ δ^ων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐλάσσων μο β̄. γέγονε νῦν μοι εὑρεῖν τινα τετράγωνον ὅς ἐστι μείζων μο ᾱ. ᾱ δ^ων. ἐλάσσων δὲ β̄. καὶ ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά, εἰς ξδ^α. καὶ γίνονται π̄. καὶ ρκη. τοῦτο δέ ἐστι ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν ὁ τετράγωνος ρ̄ ξδ^ων. τουτέστι κε ις^ων. ἔρχομαι νῦν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ἐζήτουν ςς θ̄. λείψει Δ^Υ ᾱ ἴσα τετραγώνῳ. τουτέστι τῷ εὑρημένῳ, Δ^Υ κε ις^ων. καὶ γίνεται ὁ ς^ος ρμδ μα^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος κα μα^ων. ὁ δεύτερος κ μα^ων.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

EADEM eſt quæſtio hæc cum præcedente, ſed diuerſa operatio, qua videtur Diophantus rem abſoluere voluiſſe abſque auxilio regularum compoſitarum. Nam ita ſuas inſtituit poſitiones, vt tandem fiat 9 N. − 1 Q. quadrato æquandus, quod fit per ſimplicem æquationem qua quadrati Numeris æquales ſunt, & fit valor Numeri diuidendo 9. per aliquem quadratum vnitate auctum. Quoniam verò altera pars vnitatis poſita eſt 1 N. − 3. altera 4 − 1 N. debere eſſe maiorem quàm 4. Igitur quærendus eſt quadratus qui vnitate auctus, & diuidens 9. det quotientem minorem quàm 3. maiorem quàm 4. Quare cùm diuidendo 9. tum per 3. cum per 4. fiant 3. & 2. $\frac{1}{4}$ patet quadratum vnitate auctum conſiſtere debere inter 3. & 2 $\frac{1}{4}$. ac proinde auferendo vtrimque vnitatem, quærendus erit quadratus minor quàm 2. maior quàm 1 $\frac{1}{4}$. Tales infiniti reperientur reducendo 2. & 1 $\frac{1}{4}$ ad fractiones quadratas ab eodem aliquo quadrato maiore denominatas, vt fecit Diophantus qui reduxit ad ſexageſimas quartas.

Cæterùm & hanc operationem cuilibet numero applicabimus, quod iam antè nos præſtitit Vieta noſter zetetico 13. lib. 5. Sit diuidendus 3. in duas partes, vt alteri addendo 6. alteri 12. & ſummas in-

A a

ter ſe multiplicando, fiat quadratus. Ponatur pars altera 1 N. – 6. altera ergo erit 9. – 1 N. & primæ addendo 6. ſecundæ 12. fiunt 1 N. & 21. – 1 N. quorum mutuo ductu producitur 21 N. – 1 Q. æquandus quadrato. Sed ex ipſis poſitionibus apparet quærendum eſſe quadratum qui vnitate auctus & diuidens 21. det quotientem maiorem quàm 6. minorem quàm 9. Itaque cùm 21. diuiſus tum per 6. tum per 9. det quotientes 3 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{3}$. Quadratus vnitate auctus ſumendus erit inter 3 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{3}$. & ablata vnitate quærendus quadratus minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. maior quàm 1 $\frac{1}{3}$. Reducatur vterque ad trigeſimas ſextas, fient $\frac{90}{36}$ & $\frac{48}{36}$ inter quos ſumi poſſunt quadrati propoſito ſatisfacientes $\frac{49}{36}$. $\frac{64}{36}$. $\frac{81}{36}$. ſi ſumas vltimum ſeu $\frac{9}{4}$ æquabis $\frac{9}{4}$ Q. & 21 N. – 1 Q. vnde fiet 1 N. $\frac{84}{13}$. Sunt ergo quæſitæ partes ternarij $\frac{6}{13}$. & $\frac{33}{13}$. quæ ſoluunt quæſtionem, nam primæ addendo 6. ſecundæ 12. fiunt $\frac{84}{13}$ & $\frac{189}{13}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{15876}{169}$ quadratus à latere $\frac{126}{13}$.

Sed & aliam analyſim huic ſoluendæ quæſtioni excogitauimus, Diophantæa vtraque non deteriorem, atque etiam faciliorem. ſit 2. numerus diuidendus, & addendi 3. & 5. patet ergo ſummarum aggregatum fore 10. Quare res eò deducitur vt 10. diuidatur in duos planos ſimiles, quorum alter ſupereſt 3. alter excedat 5. Sic enim ab altero auferendo 3. ab altero 5. remanebunt quæſitæ binarij partes. Porrò 10. diuidetur in duos huiuſmodi planos ſimiles hac arte. Sumpto minore addendorum 3. comparo illum cum reſiduo de 10. puta cum 7. & quæro duos quadratos, quorum ſit minor ratio quàm 3. ad 7. quales ſunt 4 & 9. vel 9. & 16. & alij infiniti. Diuidatur ergo 10. in duos numeros in ratione 4. ad 9. Inuenientur hi per Canonem ſecundæ primi $\frac{40}{13}$ & $\frac{90}{13}$. Quare ſi ab altero detraxero 3. ab altero 5. remanebunt quæſitæ binarij partes $\frac{1}{13}$ & $\frac{25}{13}$. Rurſus ſi diuiſero 10. in duos numeros ſeruantes rationem 9. ad 16. erunt hi $\frac{18}{5}$ & $\frac{32}{5}$ & à primo auferendo 3. à ſecundo 5. remanent quæſitæ binarij partes $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{5}$.

Eadem arte licebit & ſequentes quæſtiones ſoluere.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum in duas partes ſecare, vt ab vtraque auferendo datum numerum, ex reſiduorum mutuo ductu, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem eſſe ſumma detrahendorum numerorum.

Diuidendus ſit 12. in duas partes, vt altera auferendo 3. ab altera 5. ex reſiduorum mutuo ductu, quadratus fiat. Ponatur altera 1 N. + 3. altera ergo erit 9. – 1 N. & à prima auferendo 3. à ſecunda 5. remanent 1 N. & 4 – 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N – 1 Q. æquandus quadrato. Eſto cuilibet quadratorum numero quadrato, puta 9 Q. fiet 1 N. $\frac{2}{5}$ Sunt ergo partes quæſitæ 3 $\frac{2}{5}$ & 8 $\frac{3}{5}$. & ſoluunt quæſtionem.

Aliter. Quoniam ſumma detrahendorum eſt 8. qua ablata de 12. ſupereſt 4. oportet diuidere 4. in duos quoſcunque planos ſimiles, ſic enim alteri addendo 3. alteri 5. fient quæſitæ partes numeri 12.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum ſecare in duas partes, vt vtramque auferendo à dato numero, ex reſiduorum mutuo ductu fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum minorem eſſe ſumma numerorum, à quibus partes detrahendæ ſunt.

Diuidendus ſit 4. in duas partes, vt alteram auferendo à 3. alteram à 5. ex reſiduorum mutuo ductu fiat quadratus. Ponatur altera 3 – 1 N. altera ergo erit 1. + 1 N. & primam auferendo à 3. ſecundam à 5. remanent 1 N. & 4 – 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N. – 1 Q. æquandus quadrato, qui ſic ponendus eſt, vt vnitate auctus & diuidens 4. det quotientem minorem quàm 3. quia ſcilicet altera pars poſita eſt 3 – 1 N. At diuidendo 4. per 3. fit $\frac{4}{3}$. patet ergo quadratum vnitate auctum, debere eſſe maiorem quàm $\frac{4}{3}$ & ablata vnitate, quadratus debet eſſe maior quàm $\frac{1}{3}$. ſit is 9 Q. fiet 1 N. $\frac{2}{5}$. Sunt ergo quæſitæ partes 2 $\frac{3}{5}$ & 1 $\frac{2}{5}$. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum ſecare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, ab altera datum etiam numerum detrahendo, ex mutuo ductu ſummæ & reſidui, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem eſſe detrahendo.

Sit diuidendus 8. in duas partes, vt alteri addendo 3. ab altera detrahendo 5. ex ſumma in reſiduum fiat quadratus. Ponatur altera pars 1 N. – 3. ergo altera erit 11 – 1 N. & primæ addendo 3. à ſecunda auferendo 5. fiunt 1 N. & 6 – 1 N. Quorum mutuo ductu fit 6 N. – 1 Q. æquandus quadrato, qui ſic ponendus eſt vt vnitate auctus & diuidens 6. det quotientem maiorem quàm 3. Quare cùm diuidendo 6. per 3. fiat 2. patet quadratum vnitate auctum debere eſſe minorem quàm 2. & detracta vnitate,

ſumendus erit quadratus minor quàm 1. Ponatur $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. $\frac{24}{5}$. ſunt ergo quæſitæ partes $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$.

QVÆSTIO QVARTA

Datum numerum ſecare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, alteram detrahendo à dato numero, ex ſumma in reſiduum fiat quadratus.

Hic duplex caſus datur, quia numerus à quo fit detractio nunc minor, nunc maior eſſe poteſt numero diuidendo. Primùm ergo ſit 8. ſecandus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundam auferendo à 5. fiat quod poſtulatur. eſto ſecunda 5 – 1 N. ergo prima erit 3 + 1 N. & ſecundam auferendo à 5. & addendo 3. primæ fiunt 1 N. & 6 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 6 N. + 1 Q. æquandus quadrato. qui ſic ponendus eſt, vt multatus vnitate & diuidens 6. det quotientem minorem quàm 5. Quare cùm diuiſo 6. per 5. fiat $\frac{6}{5}$. patet quadratum vnitate multatum, debere eſſe maiorem quàm $\frac{6}{5}$. & addita vnitate, ſumendus eſt quadratus maior quàm $\frac{11}{5}$. eſto 9. Q. fiet 1 N. $\frac{3}{4}$. Sunt ergo quæſitæ partes prima $\frac{15}{4}$ ſecunda $\frac{17}{4}$.

Deinde ſit 8. ſecandus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundam auferendo à 20. fiat quod petitur. Ponatur ſecunda 20 – 1 N. ergo prima eſt 1 N. – 12. & ſecundam auferendo à 20. addendo 3. primæ, fiunt 1 N. & 1 N. – 9. quorum mutuo ductu fit 1 Q. – 9. N. æquandus quadrato, qui talis ponendus eſt vt detracto eo ab vnitate, & per reſiduum diuidendo 9. fiat quotiens minor quàm 20. maior quàm 12. Cùm itaque diuidendo 9. tum per 20. tum per 12. fiant $\frac{9}{20}$ & $\frac{3}{4}$. & vtrumque auferendo ab vnitate, relinquantur $\frac{11}{20}$ & $\frac{1}{4}$. patet ſumendum eſſe quadratum maiorem quàm $\frac{1}{4}$. minorem quàm $\frac{11}{20}$. ſumatur $\frac{4}{9}$ Q. fiet ergo 1 N. $\frac{81}{5}$ & erunt quæſitæ partes. Prima $\frac{21}{5}$ ſecunda $\frac{19}{5}$.

QVÆSTIO XXXV.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt qui fit primo in ſecundum ducto, ſiue addito tertio, ſiue detracto quadratum faciat. Eſto datus 6. Ponatur tertius 1 N. ſecundus vnitatum aliquot quæ ſint minus quàm 6. puta 2. Primus ergo erit 4 – 1 N. Reſtant duo poſtulata, nimirum vt productus ex primo in ſecundum, tertio ſiue addito ſiue detracto faciat quadratum. Et occurrit duplicata æqualitas, nam 8 – 1 N. æquantur quadrato, & 8 – 3 N. æquantur quadrato. Expediri autem non poteſt, quia numeri inter ſe non habent rationem quam habet quadratus ad quadratum. Sed 1 N. vnitate minor eſt quàm 2. & 3 N. vnitate maior eodem 2. Eò itaque res deducta eſt, vt inueniam numerum aliquem loco ipſius 2. vt qui eo vnitate maior eſt ad eum qui vnitate minor eſt eodem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Eſto quæſitus 1 N. erit ergo vnitate maior 1 N. + 1. At vnitate minor 1 N. – 1. Volumus igitur hos inter ſe rationem habere quam habet quadratus ad quadratum, ſit vt 4. ad 1. Itaque cùm ducto 4. in 1 N. – 1. fiat 4 N. – 4. & ducto 1. in 1 N. + 1. fiat 1 N. + 1. vt habeant expoſiti numeri rationem quam habet quadratus ad quadratum. erunt 4 N. – 4.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ϛ̅. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ° α. καὶ ὁ δεύτερος μ° ὑπὲρ ὧν τὸ ϛ̅. ἔστω μ° β̅. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ° δ' λείψει ϛ° α̅. καὶ λοιπά ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης μ° η λείψει ϛ° α̅. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ μ° η̅. λείψει ϛϛ° γ̅ ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ οὐ ῥητόν ἐστι διὰ τὸ μὴ εἶναι τοὺς ϛϛ° πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλὰ ὁ ϛ° α̅. μονάδι ἐλάσσων τοῦ β̅. οἱ δὲ ϛϛ° γ̅ ὁμοίως μείζονες μονάδι τοῦ β̅. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὡς τὸν β̅. ἵνα ὁ μονάδι μιᾷ αὐτοῦ μείζων, ἔσται ϛ° α̅ μ° α̅. ὁ δὲ μονάδι αὐτοῦ μείζων, πρὸς τὸν μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ° α̅. καὶ μονάδι ἄρα τοῦ ἐλάσσων ϛ° α̅. λείψει μ° α̅. θέλομεν οὖν αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν ἔστω δ̅ πρὸς α̅. ὥστε ϛ° εἰς λείψει μ° α ἐπὶ μονάδας δ̅, γίνονται ϛϛ° δ̅ λείψει μ° δ̅. καὶ ϛ° εἰς μ° α̅ ἐπὶ τὴν μονάδα μίαν γίνεται ϛ° α̅. καὶ εἰσὶν οὗτοι οἱ ἐκκείμενοι ἀριθμοὶ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

ἀριθμόν. τῶν ςῶν δ. λείψει μ° δ. ἴσοι ςοι ᾱ μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς°. μ° ε γων. τάσσω οὖν τὸν δεύτερον μ° ε γων. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ ς° ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ° ιγ γων. λείψει ς° ᾱ. λοιπὸν δεῖ εἶναι τὸ ἐπίταγμα τουτέστι τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου προσλαβὼν τὸν τρίτον ποιεῖ μ° ξε θων. ⋔ β γων. ςς ἴσα τετραγώνῳ. λείψας δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μ° ξε θων. λείψει ςς η γων. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα εἰς τὰ θ. καὶ γίνονται μ° ξε. λείψει ςς ς ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ μ° ξε ⋔ ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐξισῶ τοὺς ςςοὺς τῆς μιᾶς ἰσότητος ποιήσας τετράκις. καὶ ἔστι μ° σξ ⋔ ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ° ξε λείψει ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ. νῦν τούτων λαμβάνω τὴν ὑπεροχὴν, καὶ ἔστι μ° ρϟε. καὶ ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστὶ μ° ρϟε. καί εἰσι ιε. καὶ ιγ. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι τετραγώνῳ. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° η γων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ε γων. ὁ δὲ δεύτερος ε γων. ὁ δὲ τρίτος η γων. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

æquales 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{5}{3}$. Pono igitur ſecundum $\frac{5}{3}$ nam tertius eſt 1 N. ergo primus erit $\frac{13}{3}$ − 1 N. Reſtat vt poſtulata perficiantur, videlicet vt productus ex primo in ſecundum ſiue adſcito tertio, ſiue dempto ſaciat quadratum. Sed productus ex primo in ſecundum adſcito tertio facit $\frac{65}{9}$ − $\frac{2}{3}$ N. hoc ergo æquatur quadrato, & idem productus dempto tertio facit $\frac{65}{9}$ − $\frac{8}{3}$ N. hoc etiam æquatur quadrato. Omnia nouies, fiunt 65 − 6 N. æqualia quadrato. & 65 − 24 N. æqualia quadrato. Exæquo numeros æquationis vnius, multiplicans per 4. & eſt 260 − 24 N. æqualis quadrato, itemque 65 − 24 N. æquatur quadrato. Horum nunc interuallum ſumo quod eſt 195. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 195. ij ſunt 15. & 13. Horum interualli ſemiſſis in ſe æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{8}{3}$. Ad poſitiones. erit primus $\frac{5}{3}$. ſecundus $\frac{5}{3}$. tertius $\frac{8}{3}$. & demonſtratio eſt euidens.

OBSERVATIO D. P. F.

ITa facilius fiet operatio, datus numerus 6. vtcunque diuidatur v. g. in 5. & 1. productus dempta vnitate hoc eſt 4. per 6. datum numerum diuidatur, eueniet $\frac{2}{3}$ Quem ſi tum à 5. tum ab 1 abſtuleris duo reſidua $\frac{13}{3}$ & $\frac{1}{3}$ erunt duæ priores partes numeri diuidendi 3. igitur erit $\frac{4}{3}$.

IN QVAESTIONEM XXXV.

QVID hîc præſtiterim in Diophanto reſtituendo coniicere eſt ex verſione Xilandri, cùm in codicem emendatiorem non inciderim, ſed textus lacunas replere, & paſſim deprauata emendare certiſſimis coniecturis coactus ſim; vbi legebatur ipſo initio καὶ ὁ δεύτερος μ° ὑπὲρ ὧν τὸ ᾳ restitui ὑπὲρ ὧν τὸ ς. vt ſit ſenſus, Ponendum ſecundum aliquot vnitatum ſuper quas ſit 6. ideſt quæ ſint minus quàm 6. quod neceſſe eſt vt pars inueniatur minor toto.

Cæterùm emendato textu ſatis perſpicua eſt operatio Diophanti; vtitur duplicata æqualitate eo modo quem explicauimus ad decimam octauam tertij, & nihil amplius hîc addendum, niſi quod limitationes quædam attendendæ ſunt, quibus neglectis in abſurdum aliquod incidamus neceſſe eſt. Primùm ergo cùm quæritur numerus qui vnitate auctus ad ſeipſum vnitate multatum rationem habeat quadrati ad quadratum, vnde colligitur 1 N. + 1. ad 1 N. − 1. debere eſſe in ratione quadrati ad quadratum, non temerè ſumendi ſunt duo quadrati quibus propoſiti numeri proportionales ſint. Etenim 1 N. debet eſſe ſecundus Numerus quæſitorum, ac proinde pars totius numeri diuidendi 6. & per conſequens minor quàm 6. Quamobrem tales duo quadrati deligendi ſunt quorum ſumma, ad ipſorum interuallum minorem rationem habeat quàm 6 ad 1. Alioquin 1 N. maior inuenietur quàm 6. vt ſi eſſe ponatur 1 N. + 1. ad 1 N. − 1. ſicut 49. ad 36. fiet enim per decimam nonam ſeptimi 36 N. + 36. N. + 36. æqualis 49. N. − 49. & tandem 1 N. fiet 6. $\frac{7}{13}$. Quod eſt abſurdum.

Deinde in duplicata æqualitate reſoluenda cùm quæruntur duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 195. hi tales ſumendi ſunt vt quadratus ſemiſſis ſummæ eorum ſit minor quàm 260. vel vt quadratus ſemiſſis interualli eorundem ſit minor quàm 65. quia ſcilicet numeri quadrato æquandi ſunt 260 − 24 N. & 65 − 24. N. Quare cùm latus proximum de 65. ſit 8. Oportet interuallum eorum non excedere 16. Idcirco ſumi non potuerunt 194. & 1. neque 39. & 5. neque vlli integri præter 15. & 13. quos ſumpſit Diophantus, ſed per fractiones infinitis modis res expediri poterat.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros, vt ſi alter ab altero eandem partem ſiue eaſdem partes acceperit, ratio ad reliquum ſit ea quæ poſcitur. Iubeatur vt primus accipiens ſecundi partem aliquam vel partes, ſit ad reſiduum triplus. At ſecundus ſumens à primo eandem partem, vel eaſdem partes, ſit reſidui quincuplus. Ponatur ſecundus 1 N + 1. Pars autem vel partes eius eſto 1. Primus igitur erit 3 N − 1. ſic enim primus ſumens à ſecundo partem aliquam vel partes, nimirum 1. fit reſidui triplus. Volumus itaque & ſecundum ſumentem primi eandem partem, vel eaſdem partes, reſidui quincuplum eſſe. Sed quoniam ambo ſimul faciunt 4 N. & ſecundus aliquid accipit, primuſque id dat, & ſumma reſidui fit quincupla. Cæterùm ſumma eadem cum reſiduo iuncta facit 4 N. reſiduum vtique habebitur ſi ſumamus ſextantem de 4 N. nempe $\frac{2}{3}$ N. ſi ergo à 3 N. − 1. tollamus $\frac{2}{3}$ N. habebimus primi partem vel partes. Si autem tollamus, relinquitur $\frac{7}{3}$ N. − 1. Hoc ergo pars eſt vel partes primi. Nam ſecundus accipiens à primo $\frac{7}{3}$ N. − 1. fit quincuplus ad reſiduum ex primo. Supereſt hic vt quæramus an quæ pars vel partes eſt 1. de 1 N + 1. eadem pars, vel eædem partes ſit $\frac{7}{3}$ N − 1. de 3 N. − 1. Cùm autem tale aliquid quæris productum ex $\frac{7}{3}$ N. − 1. in 1 N. + 1. æquale eſt producto ex 3 N. − 1. in 1. hoc eſt partes alternatim multiplicantur, & fiunt $\frac{7}{3}$ Q. + $\frac{4}{3}$ N. − 1. æqualia 3 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{7}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{8}{7}$. ſecundus $\frac{12}{7}$. Erat autem 1. partes ſecundi, videamus ergo quæ partes ſecundi ſit 1. Eſt vtique $\frac{7}{12}$. Multiplico per 7. duos numeros; erit primus 8. ſecundus 12. Partes autem $\frac{7}{12}$. Et quia primus non habet duodecimam, multiplico per 3. vtrumque, ne incidamus in diuiſionem vnitatis, & fit primus 24. ſecundus 36. Partes autem ſeu $\frac{7}{12}$ illius quidem 14. Huius verò 21. & demonſtratio manifeſta.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἕτερος παρὰ τοῦ ἑτέρου προσλαβὼν τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη λόγον ἔχῃ πρὸς τὸν ὑπολειφθέντα, τὸν ἐπιταχθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν πρῶτον προσλαβόντα παρὰ τοῦ δευτέρου μέρος τι, ἢ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον προσλαβόντα παρὰ τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ςς α̅ μο α̅. τὸ δὲ μέρος ἢ μέρη αὐτοῦ ἔστω μο α̅. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ςς γ̅. λείψει μο α̅. καὶ ὁ πρῶτος ἐὰν προσλάβῃ τοῦ δευτέρου μέρος τι, ἢ μέρη τουτέστι μο α̅. γίνεται τοῦ λοιποῦ τριπλασίων. θέλομεν δὴ καὶ τὸν δεύτερον προσλαβόντα τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δύο εἰσὶν ςς δ̅. καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει τι, καὶ ὁ πρῶτος δίδωσι, καὶ ὁ γινόμενος τοῦ λοιποῦ γίνεται πενταπλασίων, ὥστε ὁ συναμφότερος ὁ γινόμενος, καὶ ὁ λοιπὸς ἔσται, ςς δ̅ ὥστε ὁ λοιπὸς ἔσται ἐὰν τῶν ςς δ̅ λάβωμεν τὸ ἕκτον τουτέστι ςς β̅ γ^x. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ςς γ̅. λείψει μο α̅. ἄρωμεν ςς β̅ γ^x. ἕξομεν τοῦ πρώτου μέρος ἢ μέρη. ἐὰν δὲ ἄρωμεν, γίνεται ςς ζ̅ γ^x. λείψει μο α̅. τοῦτο ἄρα τοῦ πρώτου μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. λαβὼν γὰρ ὁ δεύτερος παρὰ τοῦ πρώτου ςς ζ̅ γ^x. λείψει μο α̅. γίνεται πενταπλασίων τοῦ καταλιμπανομένου τοῦ πρώτου. λοιπὸν δεῖ ἐνθάδε ζητῆσαι, εἰ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη μονὰς μία, ς ἑνὸς μο α̅. τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ςς γ̅. λείψει μο α̅. εἰσὶ οἱ ςς ζ̅ γ^x. λείψει μο α̅. ὅταν δέ τι τοιοῦτο ζητῇς, τὸ ὑπὸ τῶν ςς ζ̅ γ^x. λείψει μο α̅. καὶ ς α̅ μο α̅. ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ςς γ̅. λείψει μο α̅. ἐπὶ τὴν μονάδα. τουτέστι τὰ μέρη ἐναλλὰξ πολλαπλασιάζεται, ὧν εἰσιν δυ ζ̅ γ^x. ςς δ̅ γ^x. λείψει μο α̅. ἴσαι ἀριθμοῖς γ̅. λείψει μο α̅. καὶ γίνεται ὁ ς ε̅ ζ^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η̅ ζ^x. ὁ δὲ δεύτερος ιβ̅ ζ^x. ἦν δὲ τοῦ δευτέρου μέρη μο α̅. σκεπτόμεθα ἃ μέρη ἡ μο α̅. τοῦ δευτέρου, ἐστὶ δὲ ζ̅ ιβ^x. καὶ ποιῶ ἑπτάκις τοὺς δύο ἀριθμούς. ἔσται ὁ πρῶτος μο η̅. ὁ δεύτερος μο ιβ̅. τὰ δὲ μέρη ζ̅ ιβ^x. ἀλλὰ ἐπεὶ ὁ πρῶτος οὐκ ἔχει δωδέκατον ποιῶ αὐτὰ τρὶς, ἵνα μὴ εἰς μονάδα ἐμπίπτῃ. ἔσται ὁ πρῶτος κδ̅. ὁ δεύτερος λς̅. τὰ δὲ μέρη τῶν ζ̅ ιβ^x. τοῦ μὲν ιδ̅. τοῦ δὲ κα̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

INGENIOSA operatione quæſtionem hanc ſoluit Diophantus. Sed emaculato textu, vt fecimus, omnia ſunt perſpicua. Cæterùm placet & aliam tradere analyſim paulò compendioſiorem. Ponatur quæſitorum numerorum ſumma quotlibet vnitatum, puta 12. & ſit primus 1 N. ſecundus 12 − 1 N. Cùm ergo primus ſumpta parte ſecundi fiat triplus ad reliquum, ſi 12. diuidatur in partes ſeruantes proportionem triplam, per ſecundam primi nempe in 9. & 3. patet primum ſumpta parte ſecundi fore 9. Quare inde detrahendo primum, fiet pars ſecundi 9 − 1 N. ſimiliter diuiſo 12. in partes ſeruantes rationem quincuplam, puta in 10. & 2. patet ſecundum ſumpta parte primi, fore 10. Quare inde auferendo ſecundum, fiet pars primi 1 N. − 2. Reſtat igitur, vt 1 N. − 2. ſit eadem pars de 1 N. quæ pars eſt 9 − 1 N. de 12 − 1 N. Quamobrem hi quatuor numeri ſunt proportionales, ac proinde planus ſub extremis æquatur plano ſub mediis, id eſt 14 N. − 1 Q. − 24. æquatur 9 N. − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{24}{5}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{24}{5}$ & $\frac{36}{5}$. Quod ſi communem denominatorem abiicere libeat, fient quæſiti numeri 24. & 36. iidem quos reperit Diophantus. Supponimus enim cum Diophanto inuentis ſemel duobus numeris quæſtionem ſoluentibus, idem euenire duobus aliis quibuſcunque ſumptis in eadem ratione. Quod facile eſt demonſtrare, quia de partibus proportionalibus agitur numerorum proportionalium, vt tibi conſiderandum relinquo.

(19. ſeptim.)

QVAESTIO XXXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ποιείτω μο η. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. ὁ δὲ δεύτερος μο γ. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶν ἀριθμῶν δ μο γ. ταῦτα ἴσα μο η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε δ^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μο ε δ^ων. ὁ δὲ δεύτερος μο γ. νῦν σκέπτομαι ὁ ς πόθεν ἐγένετο ε δ^ων. ἐκ τοῦ τὸν ε μερισθῆναι εἰς τοὺς ςς δ. ἀλλ' ὁ πέντε ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τῶν η. ἧς ὑπερέχει τὸν γ. οἱ δὲ ςς δ. εἰσὶν ὁ μονάδι μείζων τοῦ δευτέρου. ἐὰν ἄρα τάξωμεν τὸν δεύτερον ς οἵου δήποτε, καὶ ἄρω αὐτὸν ἀπὸ μο η. καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. οἷον, ἔστω ὁ δεύτερος ς α λείψει μο α. ταῦτα αἴρω ἀπὸ μο η. λοιπὸν μο θ λείψει ς α. ταῦτα μερίζω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστι εἰς ςς α. καὶ γίνεται μο θ λείψει ς α ἐν μορίῳ ς α. ἔσται ὁ πρῶτος. καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο η. τὸ δὲ ἐν τῷ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ἀριθμὸν ὅσων ἄν τις θέλει μονάδων εἶναι ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus ex ipſorum multiplicatione cum vtriuſque ſumma datum faciat numerum. Faciat autem 8. Ponatur primus 1 N. ſecundus 3. & productus eorum multiplicatione cum ſumma vtriuſque fit 4 N. + 3. Hæc æquantur 8. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{5}{4}$. ſecundus 3. Nunc conſidero vnde 1 N. ſit factus $\frac{5}{4}$. nimirum ex diuiſione 5. per 4. ſed 5. eſt exceſſus quo 8. ſuperat 3. Et ipſe 4. eſt ſecundus vnitate auctus. Si ergo ſtatuam ſecundum numerorum quotlibet. Et auferam eum de 8. & reſiduum diuidam per ſecundum vnitate auctum, habebo primum. Verbi gratia ſit ſecundus 1 N. − 1. hæc aufero de 8. reſtant 9 − 1 N. Hæc diuido per ſecundum vnitate auctum, id eſt per 1 N. & fit primus $\frac{9 - 1N}{1N}$. Et ſic indefinitè ſoluta eſt quæſtio, nam productus ex eorum multiplicatione, cum vtriuſque ſumma facit 8. Indefinitè autem ſolui dicitur, quia quotcunque vnitatum ponatur 1 N. ſatisfaciet poſtulatis.

IN QVAESTIONEM XXXVII.

QVID ſit indefinitè quæſtionem ſoluere, iam alibi docuit Diophantus, & hîc rurſus explicat. Id enim fit cùm ita inſtituuntur poſitiones, vt quilibet numerus ſumi poſſit pro valore Numeri. Quod tamen cautè accipiendum eſt. Etenim ſæpè contingit non omnem omnino numerum ſumi poſſe pro valore Numeri, ſed omnem qui cadat intra certos limites. Vt in hypotheſi Diophanti, cùm alter quæſitorum ſit 1 N. − 1. alter $\frac{9 - 1N}{1N}$ patet 1 N. maiorem eſſe debere quàm 1. minorem quàm 9. Quod ſi ponas alterum quæſitorum 1. N. erit alter $\frac{9 - 1N}{1N + 1}$. vnde patet pro valore Numeri ſumi poſſe

quemlibet numerum minorem quàm 8. Porrò de huiuſmodi terminis intra quos ſumi debet valor Numeri, plura dicemus infrà ad quadrageſimam primam.

QVÆSTIO XXXVIII.

INVENIRE tres numeros, vt qui fiunt ex binorum mutuo ductu, adſcita eorundem ſumma, faciant datos numeros. Oportet autem datos eſſe quadratos vnitate multatos. Imperatum ſit vt productus ex primo in ſecundum adſcito vtroque faciat 8. Productus ex ſecundo in tertium cum vtroque faciat 15. Denique productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. Quoniam igitur volo productum ex primo in ſecundum cum vtroque facere 8. ſi poſuero ſecundum quemlibet, & eum de 8. detraxero, & reſiduum diuiſero per vnitate maiorem ſecundo, habebo primum. Ponatur ſecundus 1 N — 1. & ſi eum abſtulero de 8. & reſiduuum diuiſero per vnitate maiorem ſecundo, erit vtique primus $\frac{9}{1N}$ — 1. Ruſſus ſimili ratione, quandoquidem volo productum ex ſecundo in tertium cum vtroque facere 15. Ab his aufero 1 N. — 1. & reſiduum diuido per vnitate maiorem ſecundo, hoc eſt per 1 N. fiunt $\frac{16}{1N}$ — 1. tantus eſt tertius. Supereſt vt productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. facit autem $\frac{144}{1Q}$ — 1. Hæc æquantur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{33}{12}$. ſecundus $\frac{7}{5}$. tertius $\frac{68}{12}$. & omnia ad eundem denominatorem, fit primus $\frac{165}{60}$. ſecundus $\frac{84}{60}$. tertius $\frac{340}{60}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μ° ᾱ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ° η̄, τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ° ιε̄. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ° κδ̄. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ° η̄. ἐὰν ἄρα τάξω τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ ἀπὸ μονάδων η̄ ἄρω αὐτὸν, καὶ τὸν λοιπὸν μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. τετάχθω ὁ δεύτερος ςº ᾱ ⋔ μ° ᾱ. καὶ ἐὰν ἀπὸ μ° η̄ ἄρω αὐτὰ, καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔσται ὁ πρῶτος ς^{ου} θ̄. λείψει μ° ᾱ. πάλιν ὁμοίως ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ° ιε̄. ἀφελῶ ςº ᾱ. λείψει μ° ᾱ. καὶ τὸν λοιπὸν μερίσω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςº ᾱ. γίνονται ις̄ ς^{ου}. λείψει μ° ᾱ. ἕξω τὸν τρίτον. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ° κδ̄. ποιεῖ δὲ μ° ρμδ̄ δυναμοστά. λείψει μ° ᾱ. ταῦτα ἴσα μ° κδ̄. καὶ γίνεται ὁ ςº ιβ̄ ε^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος λγ̄ ιβ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ζ̄ ε^{ων}. ὁ δὲ τρίτος ξη̄ ιβ^{ων}. καὶ πάντα εἰς ξ̄ μόρια. καὶ γίνεται ὁ πρῶτος ρξε̄ ξ^{ων}. ὁ δεύτερος πδ̄ ξ^{ων}. ὁ δὲ τρίτος σμ̄ ξ^{ων}.

IN QVAESTIONEM XXXVIII.

CVR hîc requirat Diophantus datos numeros eſſe quadratos vnitate multatos, ratio eſt euidens; Cùm enim verbi gratia 25 Q. æquentur 144. vt ſolutio eſſet rationalis, oportuit diuidendo vnitates per quadratos, quotientem fieri quadratum, fit autem 25. addita vnitate ad 24. vnum datorum numerorum. Similiter 144. fit ex mutuo ductu 9. & 16. qui fiunt addita vnitate ad datos numeros 8. & 15. vnde ſequitur ipſum 144. eſſe quadratum, cùm ex duorum quadratorum multiplicatione oriatur. Quamobrem quadrato 144. per quadratum 25. diuiſo, produci quadratum neceſſe eſt, & proinde ſolutionem contingere rationalem.

Porrò ex his apparet conditionem hanc nimis ſtrictè proponi à Diophanto, non enim erat neceſſe 144. & 25. quadratos fuiſſe, ſed ſufficiebat vt eſſent quadratorum ſimiles, cùm certum ſit huiuſmodi numerorum ſiue multiplicatione, ſiue diuiſione mutua ſemper procreari quadratum. Ita igitur præſcribi debuit hæc conditio. *Oportet autem ſi cuilibet datorum numerorum addatur vnitas, productum ex binorum multiplicatione, ad reliquum habere rationem quadrati ad quadratum.* Verbi gratia. Summa primi & ſecundi adſcito plano ſub ipſis contento eſto 11. ſecundi & tertij 19. tertij & primi 14. Hic nullus datorum numerorum eſt quadratus vnitate multatus. Attamen optimè ſolui poteſt quæſtio; ob conditionis à nobis allatæ obſeruationem. Nam ponatur ſecundus 1 N. — 1. erit primus $\frac{12 - 1N}{1N}$. tertius verò $\frac{20 - 1N}{1N}$. ductoque primo in tertium, & ſumma illorum producto

addita fiet $\frac{240 - 15 Q}{1 Q}$. æqualis 14. & tandem 240. æquatur 15 Q. vnde fit 1 N. 4. ſunt ergo quæſiti numeri 2. 3. 4. Itaque vides addita vnitate ad datos numeros 11. & 19. fieri 12. & 20. ex quorum mutuo ductu producitur 240. qui ad reliquum vnitate auctum, nempe ad 15. habet rationem quadrati ad quadratum. Hinc facile eſt Canonem formare.

Datis numeris adde vnitatem ſigillatim, productum ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæſitorum vnitate auctus.

Quod autem ait Xilander duobus primis vt collibuiſſet per præcedentem quæſtionem poſitis, puta 5 & 7. licuiſſe tertium inuenire & ſatisfacere quæſtioni, falſum eſt vt ex hac ipſa hypotheſi potes colligere. Nam duobus primis ita poſitis, impoſſibile eſt tertium inueniri qui reliquas poſtulati partes impleat.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τὸν δοθέντα. ἔστω τὸν η̅. τετάχθω ὁ πρῶτος ςº α̅. ὁ δεύτερος μº γ̅. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν τὸν συναμφότερον ποιεῖ ςςοὶ β̅ λείψει μº γ̅. ἴσους μº η̅. καὶ γίνεται ὁ ςº μº ε̅. α^ ςx. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μº ε̅. α^ ςx. ὁ δεύτερος μº γ̅. πάλιν οὖν σκέπτομαι πόθεν ἐγένετο ὁ ςº. μº ε̅. α^ ςx. ἐκ τοῦ τὸν ια̅ μερισθῆναι εἰς τὸν β̅. ἀλλ' ὁ ια̅ ὁ δοθείς ἐστι μετὰ τοῦ δευτέρου. οἱ δὲ ςςοὶ β̅ εἰσὶν ὁ μοναδικῶς ἐλάσσων τοῦ δευτέρου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον ὅπου δήποτε, καὶ προσθῶμεν αὐτὸν τῷ δοθέντι, καὶ τὰ γενόμενα μερίσωμεν παρὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, εὑρήσομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ςº α̅ μº α̅. ταῦτα μετὰ μº η̅. ποιεῖ ςº α̅. μº θ̅. μερίζω ταῦτα εἰς τὸν μονάδι μιᾷ ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςº α̅. καὶ γίνεται μº α̅. θ ςº. καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν μº η̅.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione multatus ſumma ipſorum, faciat datum numerum. Hic eſto 8. Ponatur primus 1 N. ſecundus 3. & productus eorum multiplicatione, vtroque dempto facit 2 N. — 3. æquales 8. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit primus $5\frac{1}{2}$. ſecundus 3. Rurſum igitur diſpicio vnde factum ſit quod 1 N. eſt $5\frac{1}{2}$ nimirum ex diuiſione 11. per 2. ſed 11. eſt compoſitus ex dato & ſecundo, & 2 N. eſt numerus vnitate minor ſecundo. Itaque ſi ſtatuero ſecundum quantumcunque, eumque dato adiecero, & ſummam diuiſero per vnitate minorem ſecundo, inueniam primum. Eſto ſecundus 1 N. + 1. huic addito 6. fit 1 N + 9. quem diuido per vnitate minorem ſecundo, hoc eſt per 1 N. & fit $1 + \frac{9}{1N}$. Itaque ſoluta eſt quæſtio indefinitè; nam productus eorum multiplicatione, ambotum ſumma detracta, facit 8.

IN QVAESTIONEM XXXIX.

HIc ſoluitur indefinitè quæſtio, ita vt nullus omnino numerus excludatur à valore Numeri. Quod euenit quia in poſitionibus nullibi reperitur ſignum defectus, vt ex dicendis ad quadrageſimam primam clarius patebit.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν τὸν συναμφότερον ποιῇ τοὺς δοθέντας. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μονάδα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μº η̅. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μº ιε̅. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν μº κδ̅. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μº η̅. ἐὰν ἄρα

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum mutua multiplicatione detracta amborum ſumma faciant datos numeros. Oportet autem datos eſſe quadratos vnitate multatos. Statutum ſit productum ex primo in ſecundum vtroque detracto facere 8. Productum ex ſecundo in tertium vtroque dempto facere 15. & productum ex primo in tertium, vtroque ablato facere 24. Quia volo productum

ex

ex primo in ſecundum detracto vtroque facere 8. ſi ſecundum ſtatuero quantumcunque, & eum adiecero ad 8. & ſummam diuiſero per vnitate minorem ſecundo, habebo primum iuxta lemma iam expoſitum. Eſto ſecundus 1 N. + 1. addo illi 8. fit 1 N + 9. diuido hoc per vnitate minorem ſecundo, hoc eſt per 1 N. fit 1 + $\frac{9}{N}$. Tantus eſt primus. Simili ratione inuenietur tertius 1 + $\frac{16}{N}$. Ita duobus poſtulatis eſt ſatisfactum. Supereſt vt productus ex primo in tertium vtroque dempto faciat 24. facit autem $\frac{144}{Q}$ − 1. hoc æquatur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{57}{12}$. ſecundus $\frac{17}{5}$. Tertius $\frac{92}{12}$. Quos ſi velis idem habere nomen, omnia ad ſexageſimas. Erit primus $\frac{285}{60}$. ſecundus $\frac{204}{60}$. tertius $\frac{460}{60}$.

τάξω τὸν δεύτερον οἷον δήποτε, καὶ προσθήσω αὐτὸν εἰς μο η. καὶ τὰ γενόμενα μερίζω παρὰ τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον, κατὰ τὸ λῆμμα τὸ προηγησάμενον. ἔστω ὁ δεύτερος ς α μο α. προστίθημι αὐτῷ μο η γίνεται ς α μο θ. ταῦτα μερίζω εἰς τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς α. καὶ γίνεται μο α. θ ς^x. ἔσται ὁ πρῶτος ὁμοίως δὲ καὶ ὁ τρίτος ἔσται μο α. ιϛ ς^x. καὶ λέλυνται μοι δύο ἐπιτάγματα. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου παρὰ συναμφότερον ποιεῖν μο κδ. ποιεῖ δὲ ρμδ Δ^{Υx}. παρὰ μο α. ἴσα μο κδ. καὶ γίνεται ὁ ς ιβ ε^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος νζ ιβ^x. ὁ δὲ δεύτερος ιζ ε^x. ὁ δὲ τρίτος ϟβ ιβ^x. καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτοὺς εἶναι ἑνὸς μορίου, πάντα εἰς ξ. ἔσται ὁ πρῶτος σπε ξ^x. ὁ δεύτερος σδ ξ^x. ὁ δὲ τρίτος υξ ξ^x.

IN. QVAESTIONEM XXXX.

HIC quoque conditio nimis ſtrictè proponitur à Diophanto, & proponenda eſt omnino vt ad trigeſimam octauam dictum eſt. Etenim ſumma primi & ſecundi detracta à plano ſub ipſis fiat 11. ſecundi & tertij 19. tertij & primi 14. Quamuis nullus datorum numerorum ſit quadratus vnitate multatus, tamen quia cuilibet addendo vnitatem, productus ex binorum mutua multiplicatione ad reliquum eſt in ratione quadrati ad quadratum, optimè ſoluetur quæſtio. Eſto enim ſecundus 1 N. + 1. erit ergo primus 1 + $\frac{12}{N}$. At tertius 1 + $\frac{20}{N}$. ita ſatisfit duobus poſtulatis. Supereſt vt productus ex primo in tertium, vtroque dempto faciat 14. facit autem $\frac{240}{Q}$. − 1. hoc ergo æquatur 14. & fit 1 N. 4, Quare quæſiti numeri ſunt 4. 5. 6. Hinc etiam elicietur iſte Canon.

Datis numeris adde ſigillatim vnitatem, productumque ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæſitorum vnitate multatus.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione ad ſummam eorundem datam habeat rationem. Eſto productus ſummæ triplus. Ponatur primus 1 N. ſecundus 5. & eſt productus eorum multiplicatione. 5 N. hunc volumus triplum eſſe ad 1 N. + 5. Quamobrem 3 N. + 15. æquantur 5 N. & fit 1 N 7½. Ad poſitiones. Erit primus 7½. ſecundus 5. Conſidero hic vnde 1 N. factus ſit 7½. nimirum ex diuiſione 15 per 2. At 15. eſt multiplex ſecundi ſecundum datam rationem. At 2. eſt exceſſus quo ſecundus ſuperat denominatorem rationis. Ergo ſi ſecundum ſtatuamus quantumcunque, & multiplicemus eum per denominatorem rationis, & productum diuidamus per exceſſum quo ſecundus ſuperat denominatorem ratio-

ΕΥΡΕΙΝ ἀριθμοὺς ἀορίστους δύο. ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν συναμφοτέρου εἶναι τριπλασίονα. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. ὁ δεύτερος μο ε. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς ε. ταῦτα θέλομεν εἶναι τριπλάσια ς α μο ε. ὥστε ςς γ μο ιε. ἴσοι εἰσὶν ςς ε. καὶ γίνεται ὁ ς μο ζ. α ς^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μο ζ. α ς^x. ὁ δεύτερος μο ε. βλέπω οὖν πόθεν ὁ ς γέγονεν μο ζ. α ς^x. ἐκ τοῦ τὸν ιε μερισθῆναι εἰς β. ἀλλ' οἱ ιε ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἐστὶ ἐπὶ τὸν λόγον. ὁ δὲ β ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον εἶναι δήποτε ς. καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν λόγον καὶ γενόμενον μερίσωμεν εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, ἕξομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς α. οὗτος ἐπὶ τὸν

λόγον ποιεῖ ςς^{ων} γ̄. ἐὰν μερισθῇ εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, τουτέστιν εἰς ἀριθμὸν ᾱ. λεῖψει μ^ο γ̄. γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμῶν γ̄. ἐν μορίῳ ς^ῦ ᾱ λεῖψει μ^ο γ̄.

nis, habebimus primum. Eſto ſecundus 1 N. Hic in denominatorem rationis, facit 3 N. qui ſi diuidatur per exceſſum ſecundi ſupra denominatorem rationis, nimirum per 1 N − 3. fit primus $\frac{3N}{1N-3}$.

IN QVAESTIONEM XLI.

QVAMVIS poſito altero numerorum 5 N. altero $\frac{5N}{1N-3}$ quæſtio indefinitè ſoluta ſit, non tamen quilibet numerus ſtatui poteſt pro valore Numeri, ſed ſumendus eſt omnino numerus aliquis maior quàm 3. vt euidens eſt. Vt haberi poſſit 1 N. − 3. per quem diuidantur 3 N. Itaque quoniam huc reiecimus tractationem de inueniendis terminis intra quos conſiſtere debet valor Numeri in huiuſmodi quæſtionibus quæ indefinitè ſoluuntur, eſto hæc regula generalis. Quotieſcunque ex lege problematis inſtitutis poſitionibus, in aliqua vel in aliquibus illarum reperiuntur vnitates cum defectu numerorum vel poteſtatis alicujus; aut è conuerſo numeri vel poteſtatis cum defectu vnitatum; vel etiam vtrumque: neceſſe eſt vel dari terminum infrà quem, vel terminum ſupra quem, vel denique terminos intra quos ſumi debet valor Numeri. Triplex ergo caſus dari poteſt, ac proinde tria hæc obſeruanda.

Primò ſi Numerus vel poteſtas alia adiunctum habeat defectum vnitatum, diuide vnitates per Numerorum vel poteſtatis numerum, quotiens erit terminus ſuprà quem ſumi debet valor Numeri vel poteſtatis, vt in hac quæſtione Diophanti, quia in vna poſitione reperitur 1 N. − 3. diuiſo 3. per 1. fit quotiens 3. ſupra quem neceſſe eſt ſumi valorem Numeri. Et ſi in aliqua poſitionum reperirentur 2 N. − 10. diuiſo 10. per 2. fieret 5. terminus ſupra quem conſiſtere deberet valor Numeri; idemque de alijs dicendum poteſtatibus, nam ſi haberes 3 Q. − 12. diuidendo 12. per 3. quotiens 4. eſſet terminus ſupra quem ſumendus eſſet valor quadrati.

Secundò ſi vnitates adiunctum habeant defectum Numerorum vel aliarum poteſtatum, diuide ſurſus vnitates per Numerorum vel poteſtatum numerum, quotiens erit terminus infrà quem ſumi debet valor Numeri vel poteſtatis vt accidit in ſecunda analyſi quam tradidimus trigeſima ſeptima huius, vbi ponentes alterum quæſitorum 5 N. alter poſitus eſt $\frac{8-1N}{1N+1}$. Quare cùm diuidendo 8. per 1. fiat quotiens 8. concluſimus Numerum minorem ſumi debuiſſe quàm 8. & ſic de aliis.

Denique ſi in vna poſitionum reperiantur Numeri vel poteſtates aliæ cum defectu vnitatum, & ſimul in alia poſitione reperiantur vnitates cum defectu Numerorum, vel poteſtatis. Tunc vtrobique diuidendo vnitates per numerum Numerorum vel poteſtatum, fient quotientes, qui termini erunt intra quos ſumi debet valor Numeri vel poteſtatis. Vt in analyſi Diophantæa, quæſtione trigeſima ſeptima citata, quoniam in vna poſitione reperitur 1 N. − 1. in altera 9 − 1 N. facta vtrobique diuiſione producuntur 1. & 9. termini intra quos ſumendus eſt valor Numeri. Quamobrem etiam inde facilè cognoſcetur an propoſita quæſtio ſit impoſſibilis, ſi enim tales termini reperiantur intra quos ſumi non poſſit aliquis numerus, impoſſibilis erit quæſtio. Verbi gratia, ſi in vna poſitione ſit 3 − 15 N. in alia 2 N. − 12. Quia diuiſo 15. per 3. fit 5. terminus infra quem ſumendus eſt valor Numeri, at diuiſo 12. per 2. fit 6. terminus ſuprà quem valor Numeri ſumi debet, cùm euidens ſit eundem numerum non poſſe eſſe maiorem quàm 6. minorem quàm 5. quæſtionem impoſſibilem eſſe prononciabimus.

Cæterùm ſi in diuerſis poſitionibus eædem ſpecies ab iiſdem deficiant, ſed inæquali multitudine ſumendus erit terminus quæſitus ab illa poſitione in qua defectus eſt maior. Vt in primo caſu, ſi in vna poſitione ſit 2 N. − 6. in altera 2 N. − 8. ſumendus erit terminus à poſtrema, diuidendo ſcilicet 8. per 2. vnde fit 4. terminus ſuprà quem ſumendus eſt valor Numeri. Sic in ſecundo caſu ſi in vna poſitione ſit 8 − 2 N. in altera 8 − 4 N. ſumetur etiam valor Numeri à poſtrema in qua eſt defectus maior. Vel aliter, in primo caſu ſumendus eſt terminus ab illa poſitione, in qua diuiſis vnitatibus per Numeros vel poteſtates, fit quotiens maior. Contrà in ſecundo caſu ſumendus eſt terminus ab illa poſitione, in qua diuiſis vnitatibus per Numeros vel poteſtates fit quotiens minor. Sic in primo caſu ſi occurrant 3 N. − 15. & 4 N. − 12. ſumetur terminus à priore quia diuiſo 15. per 3. fit quotiens maior quàm diuiſo 12. per 4. ſed in ſecundo caſu ſi occurrant 8 − 2 N. & 12 − 3 N. ſumetur terminus à poſteriore ob contrariam cauſam.

His ſanè præceptis, tota de inueniendis huiuſmodi terminis doctrina comprehenditur, quæ cùm facilia ſint, & è re ipſa nata, ita vt ſuam ſecum ferant demonſtrationem, tamen à nemine ante nos tradita ſunt, vt verè aſſerere poſſim quæſtionum quam plurimarum quæ indefinitè ſoluuntur, perfectam enodationem neminem hactenus calluiſſe; quod vno aut altero exemplo fiet manifeſtum. Sit enim propoſitum ſoluere pulcherrimum problema, quod omnium qui nos præceſſerunt Arithmeticorum ingenia mirè torſit, quodque olim ex parte explicauimus libello noſtro extremo iucundo-

rum problematum qui per numeros abſoluuntur, ante aliquot annos Lugduni edito nimirum.

Datum numerum diuidere in quotlibet numeros, ita vt ſingulis in datos numeros ductis, ſumma productorum datum conficiat numerum. Oportet autem ſummam productorum cadere inter productos, ex numero diuidendo in maximum & in minimum multiplicatorum.

Verbi gratia. Sit 20. diuidendus in tres numeros, ita vt primum ducendo in 4. ſecundum in $\frac{1}{2}$ tertium in $\frac{1}{4}$. ſumma productorum conficiat etiam 20. Eſto primus 1 N. ergo reliqui duo ſimul erunt 20 − 1 N. & cum primo ducto in 4. fiant 4 N. his ſubductis à ſumma productorum, remanet 20 − 4 N. continens vtique $\frac{1}{2}$ ſecundi & $\frac{1}{4}$. tertij. Quare ducendo 20 − 4 N. in 4. fiet 80 − 16 N. continens bis ſecundum, & tertium ſemel. Proinde ſi hinc auferatur ſumma ſecundi & tertij, puta 20 − 1 N. relinquetur ſecundus 60 − 15 N. quem ſi auferas à ſumma ſecundi & tertij, nempe à 20. − 1 N. remanebit tertius 14 N. − 40. Itaque primo poſito 1 N. fit ſecundus 60. − 15 N. tertius 14 N. − 40. & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Quoniam verò ſecundus continet vnitates cum defectu numerorum, & tertius continet numeros cum defectu vnitatum, diuidendo vtrobique vnitates per Numeros, fient termini intra quos conſiſtere debet valor numeri, nimirum 4. & 2 $\frac{6}{7}$. Quare ſoluetur quæſtio ſi 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 4. maior quàm 2 $\frac{6}{7}$. Verbi gratia ponatur 3. erit primus 3. ſecundus 15. tertius 2.

Rurſus ſit propoſitus 41. diuidendus in tres numeros ea lege, vt primum ducendo in 4. ſecundum in 3. tertium in $\frac{1}{3}$. ſumma productorum ſit 40. Eſto primus 1 N. ergo reliquì ſimul erunt 41 − 1 N. & cùm primo ducto in 4 fiant 4 N. his detractis à 40. ſumma productorum, remanet 40 − 4 N. continens ter ſecundum, & $\frac{1}{3}$ tertij. Quare ducendo 40 − 4 N. in 3. fiet 120 − 12 N. continens ſecundum nouies, & tertium ſemel. Ac proinde ſi hinc auferatur ſumma ſecundi & tertij, nempe 41 − 1 N. relinquetur octuplum ſecundi, puta 79 − 11 N. Quare ſecundus erit 9. $\frac{7}{8}$ − 1 $\frac{3}{8}$ N. quo ſubducto à ſumma ſecundi & tertij, remanet tertius 31 $\frac{1}{8}$ + $\frac{3}{8}$ N. & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Quoniam verò ſignum defectus reperitur tantùm in ſecundo numero 9 $\frac{7}{8}$ − 1 $\frac{3}{8}$ N. vnus tantùm hic erit terminus, infrà quem ſcilicet ſumendus erit valor Numeri, qui habetur diuidendo vnitates per numeros, eſtque 7 $\frac{2}{11}$. Quare ſoluetur quæſtio ſi 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 7 $\frac{2}{11}$. Ponatur 5. Erunt quæſiti numeri 5. 3. 33.

Sæpe autem huiuſmodi quæſtiones ita proponuntur, vt requiratur ſolutionem in integris exhiberi ſeclusis fractionibus, quod accidit ex rerum quibus applicantur natura quæ non patitur diuiſionem in partes, vt ſi de hominibus vel animalibus mentio fiat. Verbi gratia proponatur ita prior quæſtio. Fuerunt in ſympoſio perſonæ 20. nimirum viri, mulieres, & pueri, & expenderunt ſimul ſolidos 20. ita tamẽ vt quilibet virorum ſoluerit 4. ſolidos, quælibet mulierum $\frac{1}{2}$ ſolidi, quilibet puerorum $\frac{1}{4}$ ſolidi. Quæritur tam virorum, quàm mulierum, atque puerorum numerus ſigillatim. Similiter ſic proponatur poſterior quæſtio. Fuerunt perſonæ 41. expenderuntque ſolidos 40. & virorum quilibet perſoluit 4. ſolidos, quælibet mulier 3. puerorum quilibet $\frac{1}{3}$ ſolidi. Quæritur idem quod prius. Hîc patet ſolutionem in integris omnino exhibendam eſſe. Quod quidẽ facilè præſtabitur in priore quæſtione, quia in poſitionibus nullæ omnino interueniunt fractiones, nam ſufficiet ſi ſumatur quilibet numerus integer cadens inter terminos inuentos 4. & 2 $\frac{6}{7}$. qualis eſt 3. vnde fiunt quæſiti numeri qui ſuprà 3. 15. 2. At in poſteriore, vbi poſitiones habent fractiones admixtas, maiore artificio res opus habet. Veruntamen ita expedietur. Quoniam tertius numerus ponitur 31 $\frac{1}{8}$ + $\frac{3}{8}$ N. euidens eſt vt ſolutio contingat in integris, oportere pro valore Numeri ſumi numerum integrum minorem quàm 7 $\frac{2}{11}$. cuius tres octauæ partes adſcita $\frac{1}{8}$ vnitatis faciant integrum. Quia vero vt habeantur $\frac{3}{8}$ cuiuſlibet numeri, ducendus eſt ille numerus in 3. & productus diuidendus per 8. Patet quærendum eſſe numerum minorem quàm 7 $\frac{2}{11}$ quo ducto in 3. & producto addendo 1. fiat numerus multiplex ad 8. ſeu quod idem eſt. Quærendus eſt numerus multiplex ad 8. qui excedat vnitate multiplicem ad 3. ita tamen vt multiplicator ipſius 3. ſit minor quàm 7 $\frac{2}{11}$. Id autem qui fieri poſſit abundè docuimus in elementis, immò demonſtrauimus vniuerſale hoc problema.

Datis duobus numeris inter ſe primis, inuenire multiplicem vnius, qui alterius multiplicem ſuperet dato numero, ita vt inuenti multiplices ſint minimi qui hoc præſtent.

Inuentiſque minimis, alios omnes ordinatim multiplices idem præſtantes oſtendimus inueniri poſſe vnde ſanæ propoſitæ quæſtionis ſolutiô manifeſta eſt, inuenieturque 16. multiplex ad 8. qui excedit vnitate 15. multiplicem ad 3. & diuiſo 15. per 3. fiet 5. quæſitus valor Numeri. Quare numeri qui prius reperiuntur 5. 3. 33.

Huius naturæ quæſtio proponitur in veteri Epigrammate quod extat apud Pithœum lib. 4. & tale eſt.

Vt tot emantur aues, bis denis vtere nummis
  Perdix, Anſer, Anas empta vocetur auis.
Sit ſimplex obolus pretium Perdicis, ematur
  Sex obolis Anſer, biſque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quæſtio, mentem
  Conſule, ſic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duæ, ſimplex erit Anſer.
  Accipe Perdices quatuor atque decem.

Huius quæſtionis ſenſus eſt. Viginti Nummis, quorum quilibet duos obolos valet, ſeu 40. obolis emuntur Aues 20. videlicet Perdices, Anſeres, Anates, ſed Perdix obolo vno conſtat, Anſer 6 obolis, Anas 4. Quæritur Perdicum numerus, itemque Anſerum atque Anatum. Ponatur Anſerum numerus 1 N. erit Perdicum & Anatum ſimul numerus 20 − 1 N. erit autem Anſerum omnium pretium 6 N. quo detracto à 40. obolis, remanet pretium Perdicum & Anatum ſimul 40 − 6 N. Quare 40 − 6 N. continet. Perdicum numerum ſemel, & Anatum numerum quater, ac proinde hinc auferendo numerum Perdicum & Anatum ſemel, nempe 20 − 1 N. remanet 20 − 5 N. triplum numeri Anatum, vnde Anatum numerus eſt 6 $\frac{2}{3}$ − + $\frac{5}{3}$ N. quo detracto à 20 − 1 N. remanet Perdicum numerus 13. $\frac{1}{3}$ + $\frac{2}{3}$ N & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Sed quia in numero Anatum reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum diuiſo 6 $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{3}$. fit 4. terminus infrà quem ſumendus eſt valor Numeri. Rurſus ob fractiones adiunctas, vt ſolutio contingat in integris, quia Perdicum numerus eſt 13 $\frac{1}{3}$ + $\frac{2}{3}$ N. patet valorem Numeri eſſe debere, numerum integrum cuius $\frac{2}{3}$ adſciſcentes $\frac{1}{3}$ faciant integrum. Seu quod idem eſt quærendus eſt multiplex ad 3. qui excedat vnitate multiplicem ipſius 2. ita tamen vt multiplicator ipſius 2. ſit minor quàm 4. inuenieturque ipſe 3. qui excedit vnitate ipſum 2. Quare diuiſo 2. per 2. fit 1. quæſitus valor Numeri. Eſt ergo Anſerum numerus 1. Anatum 5. Perdicum 14. vt voluit Epigrammatarius.

Iam verò diuidendus ſit 100. in quatuor numeros, vt primo ducto in 3. ſecundo in 1. tertio in $\frac{1}{5}$. quarto in $\frac{1}{7}$. ſumma productorum ſit 100. Ponatur primus 1 N. ergo reliquorum ſumma erit 100 − 1 N. & cùm ex primo in 3. fiant 3 N. erit ſumma trium reliquorum productorum 100 − 3 N. Supereſt igitur vt partiamur 100 − 1 N. in tres numeros vt primo ducto in 1. ſecundo in $\frac{1}{5}$. tertio in $\frac{1}{7}$ ſumma productorum ſit 100. − 3 N. id autem vt fieri poſſit, propter adiectam ab initio huic quæſtioni conditionem, oportet productum ex 1. maximo multiplicatorum in 100 − 1 N. nempe 100 − 1 N maiorem eſſe quàm 100 − 3 N. & rurſus productum ex $\frac{1}{7}$ minimo multiplicatorum in 100 1 N. nempe $\frac{100}{7}$ − $\frac{1}{7}$ N. minorem eſſe quàm 100 − 3 N. Et primùm quidem manifeſtum eſt, nam per ſe patet 100 − 1 N. maiorem eſſe quàm 100 − 3 N. quod ſignum eſt non dari minimum terminum ſupra quem ſumi debeat valor Numeri, ſed ritè ſolui poſſe quæſtionem quantumlibet exiguus ſtatuatur primus quatuor quæſitorum numerorum. At verò vt ſecundum conſequamur, cùm non ſtatim appareat an $\frac{100}{7}$ − $\frac{1}{7}$ N. ſit minor quàm 100 − 3 N. fingamus æquari, fiet 1 N. 30. maximus terminus, infrà quem vtique ſumendus eſt valor Numeri. Vnde iam conſtat quæſtionem infinitas recipere ſolutiones, cùm primus quatuor quæſitorum numerorum ſtatui poſſit quilibet numerus minor quàm 30. Ponatur verbi gratia 20. erit ergo trium reliquorum ſumma 80. & cùm ex 20. in 3. fiat 60. quo ſubducto à 100. remanet 40. erit vtique trium reliquorum productorum ſumma 40. Supereſt igitur vt diuidamus 80. in tres partes, vt prima ducta in 1. ſecunda in $\frac{1}{5}$. tertia in $\frac{1}{7}$. ſumma productorum ſit 40. Ponatur prima 1 N. erunt duæ reliquæ ſimul 80 − 1 N. & quia ex prima parte in 1. fit 1 N. patet duorum reliquorum productorum ſummam eſſe 40 − 1 N. quæ vtique continet $\frac{1}{5}$ ſecundæ partis & $\frac{1}{7}$ tertiæ. Quare multiplicando per 7. fiet 280 − 7 N. continens ſemel tertiam & $\frac{7}{5}$ ſecundæ. Proinde ſi hinc auferatur ſumma ſecundæ & tertiæ, puta 80 − 1 N. reſtat 200 − 6 N. continens $\frac{2}{5}$ ſecundæ. Quamobrem ipſa pars ſecunda reperietur 80 − $\frac{12}{5}$ N. quam auferendo à 80 − 1 N. reſtat pro tertia $\frac{7}{5}$ N. & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Nam poſito primo quatuor quæſitorum numerorum 20. erit ſecundus 1 N. tertius 80 − $\frac{12}{5}$ N. Quartus $\frac{7}{5}$ N. ſed quoniam in tertio ſunt vnitates cum defectu Numerorum diuiſo 80. per $\frac{12}{5}$ fit 33 $\frac{1}{3}$ terminus infrà quem ſumendus eſt valor Numeri. Quod ſi ſumas 30. fient quæſiti Numeri 20. 30. 8. 42. qui ſatisfaciunt propoſito. Et ſic infinitis alijs modis ſolui poteſt quæſtio, cùm admittendo fractiones infiniti numeri ſumi poſſint infra 33 $\frac{1}{3}$.

Verùm ſi requiratur ſolutionem in integris exhiberi, vtendum erit eodem artificio quod ſuprà explicauimus. Vt ſi quæſtio hæc ita proponatur. Fuerunt in ſympoſio perſonæ 100. viri, mulieres, pueri, puellæ. Et vir quilibet expendit tres aureos, mulier 1. puer $\frac{1}{2}$ puella $\frac{1}{3}$. Quæritur virorum, & mulierum, puerorúmque & puellarum numerus, eodem vtentes ductu euidenter inferemus ſumendum eſſe pro valore Numeri aliquem Numerum minorem quàm 33 $\frac{1}{3}$ quem quinarius metiatur, & ſic ſex ſolutiones in integris per hanc operationem reperientur, prout poſito virorum numero 20. ponetur mulierum numerus 5. vel 10. vel 15. vel 20. vel 25. vel 30. Itaque vt omnes ſolutiones quæ in in-

tegris poſſunt exhiberi, reperiamus, cum iam determinatum ſit virorum numerum poni poſſe quemlibet infrà 30. toties repetenda erit hæc operatio quot ſunt numeri integri infra 30. nimirum nouies & vicesies. Sed rem ſuccedere non poſſe inueniemus, ſi numerus virorum ponatur 1. vel 2. vel 3. vel 29. Nam ſi ponatur 1. & mulierum numerus 1 N. erit puerorum numerus 232 − $\frac{12}{5}$ N. At puellarum $\frac{7}{5}$ N. − 133. Quare termini intra quos cadere debet valor Numeri erunt 97. & 96. $\frac{2}{3}$. inter quos nullus cadit integer numerus. Similiter ſi virorum numerus ponatur 2. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 224 − $\frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. − 126. Quare termini intra quos conſiſtere debet valor Numeri erunt 93 $\frac{1}{3}$. & 90. inter quos nullus cadit integer quem quinarius metiatur. Rurſus ſi ſtatuatur virorum numerus 3. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 216 − $\frac{12}{5}$ N. & puellarum $\frac{7}{5}$ N. − 119. Quare termini intra quos ſumi debet valor Numeri reperientur 90. & 85. inter quos non cadit integer quem quinarius metiatur. Denique ſi numerus virorum ponatur 29. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 8 − $\frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. + 63. Quare terminus infra quem ſumendus eſt valor Numeri reperietur 3 $\frac{1}{3}$. Infra quem nullus eſt numerus integer quem quinarius metiatur. Cæterùm ſi virorum Numerus ſtatuatur quilibet cadens inter 3. & 29. res optimè ſuccedet, & reperientur in integris ſolutiones numero 81. quas omnes in ſequenti diagrammate exhibeo, monens primum numerum eſſe virorum, ſecundum mulierum, tertium puerorum, quartum denique puellarum.

28	27	26	26	25	25	25	24	24
5	5	10	5	15	10	5	15	10
4	12	8	20	4	16	28	12	24
63	56	56	49	56	49	42	49	42
24	23	23	23	23	22	22	22	22
5	20	15	10	5	20	15	10	25
36	8	20	32	44	16	28	40	4
35	49	42	35	28	42	35	28	49
22	21	21	21	21	21	20	20	20
5	25	20	15	10	5	30	25	20
52	12	24	36	48	60	8	20	32
21	42	35	28	21	14	42	35	28
20	20	20	19	19	19	19	19	19
15	10	5	35	30	25	20	15	10
44	56	68	4	16	28	40	52	64
21	14	7	42	35	28	21	14	7
18	18	18	18	18	17	17	17	17
35	30	25	20	15	40	35	30	25
12	24	36	48	60	8	20	32	44
35	28	21	14	7	35	28	21	14
17	16	16	16	16	16	15	15	15
20	45	40	35	30	25	45	40	35
56	4	16	28	40	52	12	24	36
7	35	28	21	14	7	28	21	14
15	14	14	14	14	13	13	13	13
30	50	45	40	35	55	50	45	40
48	8	20	32	44	4	16	28	40
7	28	21	14	7	28	21	14	7
12	12	12	11	11	11	10	10	10
55	50	45	60	55	50	65	60	55
12	24	36	8	20	32	4	16	28
21	14	7	21	14	7	21	14	7
9	9	8	8	7	7	6	5	4
65	60	70	65	75	70	75	80	85
12	24	8	20	4	16	12	8	4
14	7	14	7	14	7	7	7	7

Hinc apparet quæſtiones huiuſmodi à nobis perfectiſſimè reſolui, cùm tamen Nicolaus Tartalea aſſerat, neque per Algebram, neque per aliam certam regulam id fieri poſſe. Sed & alius non contemnendus Arithmeticus, cùm hanc ipſam quæſtionē ſub eadem prorſus hypotheſi ſibi propoſuiſſet enodandam, vnicam tantùm illius ſolutionem affert, eam ſcilicet quæ primum in ſuperiore diagrammate locum obtinet, eamque etiam non ſatis certa ratione inueſtigat, ſed illa vtitur regula quam in libello noſtro Iucundorum Problematum olim explicauimus, quamque vt nimis inperfectam meritò reiicimus.

Quod ſi poſtuletur exemplum in quo vnica ſolutio contingat in integris. Sit Perſonarum numerus 60. aureorum expenſorum ſumma 100. & vir quilibet expendat 2. aureos. Mulier $\frac{2}{3}$. Puer $\frac{3}{5}$. Puella $\frac{1}{2}$. Ponatur virorum numerus 1 N. Igitur 60 − 1 N. erit numerus mulierum, puerorum & puellarum ſimul, & 100 − 2 N. erit reliquorum aureorum ſumma, quare ducendo tum $\frac{2}{3}$. tum $\frac{1}{2}$ in 60 − 1 N. fiet 40 − $\frac{2}{3}$ N. maior quàm 100. − 2 N & 30 − $\frac{1}{2}$ N. minor quàm 100 − 2 N. & vtraque æquatione ſigillatim reſoluta fient termini intra quos conſiſtere debet valor Numeri 45. & 46. $\frac{2}{3}$. Proinde cùm inter eos cadat ſolus numerus integer 46. patet virorum Numerorum non poſſe poni niſi 46. Atque ideo relinquentur perſonæ 14. Aurei 8. ſtatuatur mulierum numerus 1 N. tandem inuenietur puerorum numerus 10 − $\frac{5}{3}$ N. Puellarum verò 4 + $\frac{2}{3}$ N. Quare cùm diuiſo 10. per $\frac{5}{3}$ prodeat 6. patet pro valore Numeri ſumendum eſſe Numerum infrà 6. quem ternarius metiatur ob fractiones poſitionibus admixtas. Itaque cùm infrà 6. ſolus numerus 3. habeat tertiam partem in integris; vnica continget ſolutio poſito ſcilicet valore Numeri 3. & erit virorum numerus 46. Mulierum 3. Puerorum 5. Puellarum 6. eodem prorſus artificio diuidetur datus numerus in quinque aut plures numeros, ita vt ſingulis in datos numeros ductis, ſumma productorum datum conficiat numerum. Quamobrem ex omni parte ſatisfactum eſt propoſito.

Cæterùm ad hanc quæſtionem facilè reducuntur Alligationis regulæ, quarum perfectam enodationem, neminem antè nos tradidiſſe audacter aſſerere auſim. Etenim cùm tria rei alicuius genera proponuntur alliganda, patet vulgari regula vnicam tantùm reperiri ſolutionem, quamuis infinitæ tradi poſſint. Quod vt exemplo comprobemus. Sint alliganda tria Auri genera. Primum 24. graduum bonitatis quos vulgo Karattos vocant. Secundum 22. Karattorum. Tertium 18. & conficienda ſit Maſſa librarum 60. auri Karattorum 20. ſanè per vulgarem illam Alligationis regulam vnica reperietur ſolutio, & ſumendæ erunt libræ 12. ex auro 24. Karattorum. Itemque libræ 12. ex auro 22. Karattorum. At denique libræ 36. ex auro 18. Karattorum. Sed quæſtio ſuaptè natura infinitas recipit ſolutiones, quas ſic indagabimus. Quoniam ducto 60. in 20. fit 1200. patet in tota maſſa conficienda contineri gradus bonitatis ſeu Karattos 1200. Quare ſupereſt vt diuidamus 60. in tres numeros, ita vt primo ducto in 24. ſecundo in 22. tertio in 18. ſumma productorum ſit 1200. Ponatur primus 1 N. erit ſumma reliquorum 60 − 1 N. & cùm ducto 24. in 1 N. fiant 24 N. erit reliquorum productorum ſumma 1200 − 24 N. quæ continet ſecundum numerum bis & vicesies. Tertium verò decies & octies. Quare cùm 60 − 1 N. contineat ſecundum & tertium ſemel, ducto eo in 18. fiet 1080 − 18 N. continens vtrumque decies & octies, & ſi hic auferatur à 1200. − 24 N. remanet 120 − 6 N. continens ſecundum quater. Proinde ſecundus eſt 30 − $\frac{3}{2}$ N. quo detracto à 60 − 1 N. remanet tertius 30 + $\frac{1}{2}$ N. & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Vt ergo habeamus terminum infra quem conſiſtere debet valor Numeri diuidamus 30. per $\frac{3}{2}$ fiet 20. quæſitus terminus. Igitur ex auro 24. Karattorum ſumi poteſt quilibet librarum numerus minor quàm 20. vnde conſtat infinitis modis ſolui poſſe quæſtionem. Verbi gratia, ſumantur ex prædicto auro libræ 18. ſumemus ex ſecundo libras 3. ex tertio libras 39. Rurſus ſumantur primi auri libræ 16. ſecundi 6. tertij 38. Rurſus ſumantur, primi auri libræ 14. ſecundi 9. tertij 37. vel ſumantur, primi auri libræ 10. ſecundi 15. tertij 35. vel ſumantur primi auri libræ 8. ſecundi 18. tertij 34. vel ſumantur primi auri libræ 6. ſecundi 21. tertij 33. vel ſumantur primi auri libræ 4. ſecundi 24. tertij 32. vel etiam ſumantur primi auri libræ 2. ſecundi 27. tertij 31. His omnibus modis, etiam per integros ſoluitur quæſtio, quod ſi fractiones admittere libeat, quæ ab hoc quæſtionum genere non excluduntur, infinitas alias ſolutiones reperiri poſſe manifeſtum eſt. Hæc dixiſſe ſufficiat, ne pulcherrimum vtiliſſimùmque inuentum poſteris inuidiſſe videamur.

QVÆSTIO XLII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς συναμφοτέρους λόγον ἔχῃ δεδομένον. Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου συναμφοτέρους εἶναι τρίς. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου συναμφοτέρους εἶναι τετράκις. τὸν δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου συναμφο-

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt, is ad eorum ſummam datam habeat rationem. Sit productus è primo in ſecundum, ad ſummam ipſorum triplus, productus è ſecundo in tertium, ſit ad ſummam eorum quadruplus,

& productus è primo in tertium, ſummæ amborum ſit quintuplus. Statuatur ſecundus 1 N. erit ex præcedenti lemmate primus $\frac{1N}{1N - 3}$. eodem modo tertius erit $\frac{4N}{1N - 4}$. Reſtat vt productus ex primo in tertium ad ſummam ipſorum ſit quincuplus. Sed productus ex primo in tertium eſt $\frac{4Q}{1Q + 12 - 7N}$ ſumma verò primi & tertij eſt $\frac{7Q - 24N}{1Q + 12 - 7N}$. quæ ſic habetur. Quoniam oportet addere minutias $\frac{3N}{1N}$, & $\frac{4N}{1N - 4}$. Ipſi quidem numeri in denominatores alternatim multiplicabuntur, verbi gratia 3 N. in denominatorem alterius, hoc eſt in 1 N. − 4. & rurſus 4 N. in denominatorem alterius, puta in 1 N. − 3. ſic facta eſt ſumma 7 Q. − 24 N. ſub denominatione partis quæ fit ex denominatorum mutua multiplicatione, hoc eſt 1 Q. + 12 − 7 N. Habemus autem & productum ex primo in tertium $\frac{4Q}{1Q + 12 - 7N}$. Quamobrem $\frac{4Q}{1Q + 12 - 7N}$. quincuplum eſt ſummæ. Proinde ſumma quinquies puta $\frac{35Q - 120N}{1Q + 12 - 7N}$. æqualis eſt $\frac{4Q}{1Q + 12 - 7N}$. & omnia ducantur in communem denominatorem, Puta 1 Q. + 12 − 7 N. fiunt 12 Q. æqualis 35 Q. − 120 N. & fit 1 N. $\frac{120}{31}$. Ad hypoſtaſes. Poſueram primum $\frac{3N}{1N - 3}$. ſecundum 1 N. tertium $\frac{4N}{1N - 4}$. At 1 N. inuentus eſt $\frac{120}{31}$. hunc ſi ducas in primum, eo ducto in 3 N. fiet $\frac{360}{31}$. At eo ducto in denominatorem 1 N. − 3. fient $\frac{27}{31}$. erit igitur primus $\frac{360}{27}$. ſecundus autem $\frac{120}{31}$. non enim habebat numericam minutiam. At tertius ſimiliter inuenietur, nam ducto $\frac{120}{31}$ in 4 N. fiet $\frac{480}{31}$. Eodem modo ducto $\frac{120}{31}$ in denominatorem 1 N. − 4. fiet $\frac{4}{31}$. Eſt ergo tertius $\frac{480}{4}$. & demonſtratio eſt manifeſta.

τέρους ἐστὶ πενταπλάσιος. τετάχθω ὁ δεύτερος ϛ^ε ᾱ. ἔσται δὴ διὰ τὸ λῆμμα ὁ πρῶτος ϛϛ^ῶν γ̄. ἐν μορίῳ ϛ^ῦ ᾱ λείψει μ° γ̄. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ϛϛ^ῶν δ̄. ἐν μορίῳ ϛ^ῦ ᾱ. λείψει μ° δ̄. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου συναμφοτέρου εἶναι πενταπλάσιον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ^ῦ ιβ̄. ἐν μορίῳ δ^ῦ ᾱ μ° ιβ̄. λείψει ϛϛ^ῶν ζ̄. συναμφότερος δὲ ἐστιν ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος δ^ῦ ζ̄. λείψει ϛϛ^ῶν κδ̄ μορίου δ^ῦ ᾱ. μ° ιβ̄. λείψει ϛϛ^ῶν ζ̄. οὕτως. ὅταν γὰρ δέῃ συνθεῖναι μόρια οἷον ϛϛ^ῶν γ̄. μορίου ϛ^ῦ ᾱ. λείψει μ° γ̄. καὶ ϛϛ^ούς δ̄. μορίου ϛ^ῦ ᾱ. λείψει μ° γ̄. καὶ ϛϛ^ούς δ̄. μορίου ϛ^ῦ ᾱ. λείψει μ° δ̄. οἱ μὲν ϛϛ^οὶ ἐπὶ τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιασθήσονται, οἷον ϛϛ^οὶ γ̄. ἐπὶ τὰ ἑτέρου μόρια τουτέστιν ἐπὶ ϛ^ὸν ᾱ. λείψει μ° δ̄. καὶ πάλιν οἱ ϛϛ^οὶ δ̄. ἐπὶ τὰ μόρια τοῦ ἑτέρου ἐπὶ ϛϛ^ὸν ᾱ. λείψει μ° γ̄. οὕτως ἐποίησεν ἡ σύνθεσις δ^ῦ ζ̄. λείψει ϛϛ^ῶν κδ̄. μορίου τοῦ ὑπὸ τῶν μορίων, τουτέστι δ^ῦ ᾱ. μ° ιβ̄. λείψει ϛϛ^ῶν ζ̄. ἔχομεν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δ^ῦ ιβ̄. μορίου δ^ῦ ᾱ. μ° ιβ̄. λείψει ϛϛ^ῶν ζ̄. δυνάμεις ἄρα ιβ̄. μορίου δ^ῦ ᾱ. μ° ιβ̄. λείψει ϛϛ^ῶν ζ̄. πενταπλάσιαι εἰσὶ τῆς συνθέσεως. πεντάκις ἄρα ἡ σύνθεσις γίνεται δ^ῦ λε̄ ⋔ ϛϛ^ῶν ρκ̄. μορίου δ^ῦ ᾱ. μ° ιβ̄ ⋔ ϛϛ^ῶν ζ̄. ἴσαι δ^ῦ ιβ̄. μορίου τοῦ αὐτοῦ, καὶ πάντα ἐπὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν μόριον δ^ῦ ᾱ. μ° ιβ̄ ⋔ ϛϛ^ῶν ζ̄. καὶ γίνονται δ^ῦ ιβ̄. ἴσαι δυνάμεσι λε̄ ⋔ ϛϛ^ῶν ρκ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ὸς ρκ̄ λα^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. εἶχεν δὲ τὸν μὲν πρῶτον ϛϛ^ῶν γ̄. μορίου ϛ^ῦ ᾱ ⋔ μ° γ̄. τὸν δὲ δεύτερον ϛ^ὸν ᾱ. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ^ῶν δ̄. μορίου ϛ^ῦ ᾱ. ⋔ μ° δ̄. εὑρέθη δὲ ὁ ϛ^ὸς ρκ̄ λα^ων. ἐπεὶ μὲν ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιῶ, ἐπὶ ϛϛ^οὺς γ̄. ἔσονται μ° τξ̄ λα^ων. λοιπὸν ἐπὶ τὸ μόριον ρκ̄ λα^ων. ἐπὶ ϛ^ὸν ᾱ. λείψει μ° γ̄. γίνονται μ° κζ̄ λα^ων. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος τξ̄ κζ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ρκ̄ λα^ων. οὐ γὰρ εἶχεν ἀριθμητικὸν μόριον. ὁ δὲ τρίτος ὁμοίως, ρκ̄ λα^ων. ἐπὶ τοὺς τέσσαρας ϛϛ^ούς. γίνονται υπ̄ λα^ων. ὁμοίως, καὶ ἐπὶ τὸ μόριον, ρκ̄ λα^ων. ἐπὶ ϛ^ὸν ᾱ. ⋔ μ° δ̄. γίνονται μ° κη̄ λα^ων. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος μ° υπ̄ δ^ων. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XLII.

HÆC quæſtio pendet à præcedente, vt diſertis verbis monet Diophantus. Cæterùm in ſua verſione Xilander multa omiſit, quæ clarioris doctrinæ gratia poſuit Diophantus, vt apparet ex textu Græco, & ex noſtra verſione.

QVÆSTIO XLIII.

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, is ad compoſitum ex tribus datam

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν

μένον ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου τῶν τριῶν ἐστὶ τριπλασίονα. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου τῶν τριῶν ἐστὶ τετραπλασίονα. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ τρίτου, καὶ τοῦ πρώτου τῶν τριῶν ἐστὶ πενταπλασίονα. ἐπεὶ οὖν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχει δεδομένον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ τυχόντα, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν τυχόντα λόγον ἔχῃ τὸν ἐπιταχθέντα. ἔστω ὁ τυχὼν μο ε. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου τυχόντος καὶ τοῦ δευτέρου τυχόντος ἐστὶ τριπλασίων τουτέστι τοῦ ε. ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, ἄρα καὶ τοῦ δευτέρου ἔσται μο ιε. δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ιε ςx. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου τοῦ ε. ἐστὶ τετραπλασίων. ὁ ἄρα ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου ἔσται μο κ. ἔστι δὲ ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται κ ςx. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ τρίτου ὅς ἐστι τ ςx. ταῦτα τοῦ ε. εἶναι πενταπλάσια, γίνονται μο τ. ἴσαι δυ κε. καὶ εἰ ἦν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. λελυμένον ἂν ἦν μοι τὸ ζητούμενον, ἀλλ' αἱ μο τ. ὑπὸ τοῦ ιε. ἐστὶ καὶ τοῦ κ. ἀλλ' ὁ ιε. τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ε. ὁ δὲ κ. τετραπλασίων ἐστὶ ε. θέλομεν οὖν τοῦ τριπλασίονος τοῦ ε. ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα τοῦ ε. πολλαπλασιασθέντος γινόμενον πρὸς τὸν πενταπλασίονα τοῦ ε. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ὁ δὲ ε. τυχών ἐστι. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ ζητεῖν τινα ἀριθμὸν ὅπως ὁ τριπλασίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ὁ γινόμενος, πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτοῦ, λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς α. καὶ ὁ τριπλασίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτοῦ ποιεῖ δυ ιβ. δεῖ τοίνυν τοῦτον πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτοῦ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα ιβ. πρὸς ἀριθμοὺς ε. ἐθέλομεν εἶναι ἐν λόγῳ ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν, καὶ αὐτὸς ἔσται τετράγωνος. κύβοι ἄρα ξ. ἴσοι τετραγώνῳ. ἔστω ἄρα ἴσοι δυ ϡ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ιε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ζητούμενος μο ιε. τάσσω οὖν αὐτὸν μο ιε. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου μο με. καὶ ἔστιν ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται με ςx. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ξ ςx. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου τουτέστι ,βψ δυx. τῶν μο ιε. κατασκευάσαι πενταπλάσιον, τὸ ἄρα ,βψ δυx. ἴσον μο οε. καὶ γίνεται ὁ ς μο

habeat rationem. Sit productus ex primo in ſecundum ad ſummam trium triplus; at productus ex ſecundo in tertium, ſit ſummæ quadruplus. Denique productus ex tertio in primum, ſummæ omnium ſit quincuplus. Quia igitur productus ex binorum mutua multiplicatione ad ſummam trium datam habet rationem. Quæro primùm tres numeros, & aliquem vtcumque adſcitum, ad quem producti ex binorum mutuo ductu datas habeant rationes. Arbitrarius eſto 5. Tunc quia productus ex primo in ſecundum triplus eſt arbitrarij numeri, nempe ipſius 5. vtique productus ex primo in ſecundum erit 15. eſto ſecundus 1 N. ergo primus $\frac{15}{N}$. Rurſus quia productus ex ſecundo in tertium eſt quadruplus ipſius 5. vtique productus ex ſecundo in tertium erit 20. At ſecundus eſt 1 N. ergo tertius erit $\frac{20}{N}$. Supereſt vt productus ex primo in tertium, nimirùm $\frac{300}{Q}$. ſit quincuplus ipſius 5. Proinde fiunt 300. æquales 25 Q. Hic ſi ſpecies ad ſpeciem rationem haberet quæ eſt quadrati ad quadratum, ſoluta eſſet quæſtio. Enim vero 300. orti ſunt ex 15. in 20. At 15. triplum eſt ipſius 5. & 20. eſt eiuſdem 5. quadruplum. Volumus ergo vt triplo ipſius 5. per quadruplum eiuſdem multiplicato, producti ad quincuplum eiuſdem 5. ratio ſit quæ quadrati ad quadratum. Atqui 5. arbitrarius eſt. Hoc igitur mihi negotij incumbit, vt quæram numerum, cuius triplus & quadruplus inter ſe multiplicati numerum producant qui ad quincuplum eiuſdem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Eſto qui quæritur 1 N. & triplus eius ductus in quadruplum facit 12 Q. Oportet igitur hunc ad quintuplum eiuſdem rationem habere quæ eſt quadrati ad quadratum. Volumus ergo 12 Q ad 5 N. eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quamobrem altero in alterum ducto fiet quadratus. Proinde 60 C. æquantur quadrato, ſit ille 900 Q. & fit 1 N. 15. Ad poſitiones, erit quæſitus 15. Pono ergo eum 15. Quare productus ex primo in ſecundum erit 45. Atqui ſecundus eſt 1 N. ergo primus erit $\frac{45}{N}$. ſimiliter inuenietur tertius $\frac{60}{N}$. ſupereſt vt productus ex primo in tertium,

tium, hoc eſt $\frac{540}{1Q}$ ipſius 15. quincuplus reperiatur. Igitur $\frac{2700}{1Q}$ æquatur 75. & fit 1 N. 6. Ad poſitiones. erit primus 7 $\frac{1}{2}$. ſecundus 6. tertius 10. Horum ſumma ſi foret 15. ſoluta planè eſſet quæſtio. Statuo itaque ſummam trium 15 Q. Ipſos autem tres in numeris, quales eos inuenimus, primum ſcilicet 7 $\frac{1}{2}$ N. ſecundum 6 N. tertium 10 N. Supereſt igitur vt trium ſumma ſit 15 Q. eſt autem 23 $\frac{1}{2}$ N. Quare 23 $\frac{1}{2}$ N. æquantur 15 Q. & fit 1 N. $\frac{47}{30}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{352}{30}\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{282}{30}$. tertius $\frac{470}{30}$.

ϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μο ζ. α ϛ^. ὁ δὲ δεύτερος μο ϛ. ὁ δὲ τρίτος μο ι. καὶ εἰ ἦν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν μο ιε. λελυμένον ἦν μοι τὸ ζητούμενον. τάσσω οὖν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ιε. αὐτοὺς δὲ τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμῷ, ὡς εὕρομεν τὸν μὲν πρῶτον ϛϛ ζ. α ϛ^. τὸν δὲ δεύτερον ϛϛ ϛ. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ ι. καὶ λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς ἴσους δυ ιε. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ϛϛ κγ. α ϛ^. ἀριθμοὶ ἄρα κγ. α ϛ^. ἴσοι δυ ιε. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο μζ λ^. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τνβ λ^. α ϛ^. ὁ δὲ δεύτερος σπβ λ^. ὁ δὲ τρίτος υο λ^.

IN QVAESTIONEM XLIII.

HIc reſtituto textu, vt fecimus, omnia ſunt perſpicua, nec maiore explicatione indigent: nonnulla etiam omiſerat Xilander, quorum defectu res obſcurabatur, vt videre eſt ſi verſio illius cum noſtra conferatur.

QVÆSTIO XLIV.

INvenire tres numeros, vt compoſitus ex tribus multiplicatus in primum faciat triangulum; in ſecundum, faciat quadratum, in tertium faciat cubum. Statuatur ſumma trium 1 Q. Primus autem fractio quadratica vnitatum triangularium, puta $\frac{6}{1Q}$. ſecundus fractio quadratica vnitatum quadratarum, vt $\frac{4}{1Q}$. Tertius denique fractio quadratica vnitatum cubicarum, nimirum $\frac{8}{1Q}$. & quidem 1 Q. multiplicatus in primum facit 6. qui eſt triangulus, & 1 Q. multiplicatus in ſecundum facit 4. qui eſt quadratus, & rurſus 1 Q. multiplicatus in tertium facit 8. qui eſt cubus. Supereſt vt trium ſumma ſit 1 Q. ſed trium ſumma eſt $\frac{18}{1Q}$. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. multiplicentur, fiet 1 QQ. æqualis 18. Oportet igitur 18. eſſe quadratoquadratum. Atqui 18. eſt compoſitus ex triangulo, quadrato, & cubo. Proinde reperiendus eſt quadratus, latus habens quadratum, & diuidendus in triangulum, quadratum, & cubum. Eſto is 1 QQ. Quadratus autem 1. QQ. + 1 − 2 Q. ſi ergo de 1 QQ. abſtulero 1 QQ. + 1 − 2 Q. relinquetur 2 Q. − 1. Hunc rurſus oportet diuidere in cubum, & triangulum. Eſto cubus 8. relinquitur ergo triangulus

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιῇ τρίγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιῇ κύβον. τετάχθω δὴ οἱ τρεῖς δυνάμεως α. ὁ δὲ πρῶτος δυναμοστὸν μονάδων τριγωνικῶν, ἔστω ϛ δυ^. ὁ δὲ δεύτερος δυναμοστὸν μονάδων τετραγωνικῶν ἔστω δ δυ^. ὁ δὲ τρίτος δυναμοστὸν μονάδων κυβικῶν. ἔστω η δυ^. καὶ ἡ δύναμις μία πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ϛ. ὅς ἐστι τρίγωνος, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιεῖ μο δ. ὅς ἐστι τετράγωνος, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μο η. ὅς ἐστι κύβος. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἴσους δυ α. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς εἰσὶ ιη δυ^. ἴσοι δυ α. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν, γίνεται δυ α. ἴση μο ιη. δεῖ οὖν τὸν ιη. ἴσον δυναμοδυνάμει, ἀλλ᾽ ὁ ιη. σύνθεσίς ἐστι τριγώνου, καὶ τετραγώνου, καὶ κύβου ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, καὶ αὐτὸν διελεῖν εἰς τρίγωνον, καὶ τετράγωνον, καὶ κύβον. ἔστω δυδυ α. ὁ δὲ τετράγωνος δυδυ α μο α λεῖψει δυ β. ἐὰν ἄρα ἀπὸ δυδυ μιᾶς ἄρω δυδυ α. μο α. λεῖψει δυ β. λοιπὸς καταλείπεται δυ β λεῖψει μο α. πάλιν ταῦτα δεῖ διαιρεθῆναι εἰς τε κύβον, καὶ τρίγωνον, καὶ ἔστω ὁ κύβος μο η. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίγωνος δυ β λεῖψει μο. θ. πᾶς δὲ τρίγωνος ὀκτάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μονάδα τε-

τράγωνος γίνεται. δυνάμεις ἄρα ιϛ. λείψει μ° οα. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς δ. λείψει μ° α. γίνεται ὁ ς μ° θ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τρίγωνος μ° ρνγ. ὁ δὲ τετράγωνος ,ςυ. ὁ δὲ κύβος μ° η. ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν ἐκ τῶν τελῶν συγκείμενον τετράγωνον δυ α. τὸν δὲ πρῶτον ρνγ δυ. πα. ἐπειδὴ τρίγωνον γενέσθαι. τὸν δὲ δεύτερον ,ςυ δυ. πα. ἐπειδὴ τετράγωνον γενέσθαι. τὸν δὲ τρίτον η δυ. πα. ἐπειδὴ κύβον γενέσθαι. καὶ ἡ δύναμις α. τετράγωνος οὖσα, ἐφ' ὃν ἂν πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ, ὃν μὲν τρίγωνον, ὃν δὲ τετράγωνον, ὃν δὲ κύβον. δεῖ δὴ τοὺς τρεῖς εἶναι δυ α. εἰσὶ δὲ ,ςφξα δυ. πα. ἴσον δυ α. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν. γίνεται δυδυ α. ἴση μ° ,ςφξα. καὶ γίνεται ὁ ς μ° θ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρνγ πα. ὁ δὲ δεύτερος ,ςυ πα. ὁ δὲ τρίτος η πα. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

2 Q. − 9. Porrò quiuis triangulus per 8. multiplicatus, & adſumens vnitatem, facit quadratum. Proinde 16 Q. − 71. æquantur quadrato. Formo quadratum à 4 N. − 1. fit 1 N. 9. Ad poſitiones. Erit triangulus 153. quadratus 6400. cubus 8. Venio ad id quod initio propoſitum fuit & ſtatuo compoſitum ex tribus quadratum 1 Q. Primum autem $\frac{153}{81}$. vt fiat triangulus. Secundum $\frac{6400}{81}$. vt fiat quadratus. Tertium denique $\frac{8}{81}$. vt fiat cubus. & 1 Q. cùm ſit quadratus ductus in vnumquemque, facit primum triangulum, ſecundum quadratum, tertium cubum. Oportet autem tres ſimul eſſe 1 Q. ſunt autem $\frac{6561}{81}$. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia in 1 Q. ducantur, fit 1 QQ. æqualis 6561. & fit 1 N. 9. Ad poſitiones. erit primus $\frac{153}{81}$. ſecundus $\frac{6400}{81}$. tertius $\frac{8}{81}$. & demonſtratio manifeſta.

IN QVAESTIONEM XLIV.

HIc tota obſcuritas naſcitur ex fractionibus quadraticis, quæ vt iam ſæpe monuimus ſemper ambiguè exprimuntur apud Diophantum. Deerant & nonnulla verba quæ repoſuimus, ea more noſtro virgulis includentes. Numerus triangulus dicitur ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, & per vnitatem progredientis, cuius vltimus terminus, qui & idem eſt cum numero qui exprimit multitudinem terminorum dicitur latus trianguli vt quinque terminorum 1. 2. 3. 4. 5. ſumma 15. eſt triangulus cuius latus 5. & ſex terminorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. ſumma 21. eſt triangulus cuius latus 6. Quod fuſius explicat Diophantus libro de numeris multangulis. Nos quoque in appendice ad eundem librum vniuerſaliſſimè demonſtrabimus Theorema quod de Numeris triangulis profert Diophantus. nimirum, Omnis triangulus per octo multiplicatus & adſciſcens vnitatem quadratum facit. Interim tamen peculiari demonſtratione libet id oſtendere, ſupponendo modum illum communem inueniendi ſummam cuiuſcunque progreſſionis arithmeticæ, ducendo ſcilicet ſummam extremorum in ſemiſſem numeri terminorum, quem etiam demonſtrat Diophantus loco citato. Vnde infertur in progreſſione, cuius ſumma eſt numerus triangulus, vbi primus terminus eſt 1. maximus verò æquatur numero terminorum, ſeu lateri trianguli, ipſum triangulum haberi ſi latus ipſius vnitate auctum ducatur in ſemiſſem eiuſdem lateris. His poſitis, ſic pronuncio.

Omnis numerus triangulus per octo multiplicatus, & adſciſcens vnitatem, quadratum facit, cuius latus eſt duplum lateris ipſius trianguli vnitate auctum.

A 21.
B... C... D. E
F 168. G. 169.
1. ſecundi H .... K. L

Sit numerus triangulus A cuius latus B D. cuius ſemiſſis B C. & ſit vnitas D E. & octuplum ipſius A eſto F cui addita vnitate fiat G. ſumaturque H K duplum ipſius B D. cui addatur vnitas K L. dico G eſſe quadratum à latere H L. etenim ex ſuprà dictis conſtat triangulum A æquari producto ex B C in totum B E. ſed hic productus æquatur productis ex B C in B C. & in C D. & in D E. hoc eſt duplo quadrati ipſius B C & ipſi B C. ſemel. Quare octuplum ipſius A puta F. æquatur ſedecuplo quadrati ipſius B C. & octuplo ipſius B C. Ergo G continet ſedecuplũ quadrati ipſius B C. octuplum ipſius B C & præterea vnitatẽ. Porro cùm B D ſit duplus ad B C. & rurſus H K ſit duplus ad B D. patet H K eſſe quadruplum ipſius B C. ac proinde quadratus ipſius H K æquatur ſedecuplo quadrati ipſius B C. & duplum ipſius H K æquatur octuplo eiuſdem B C. Igitur G æquatur quadrato ipſius H K. & duplo ipſius H K. & vnitati. Sed & quadratus ipſius H L æquatur quadrato H K. & quadrato K L. hoc
4. ſecundi. eſt vnitati, & duplo producti ex H K. in vnitatem K L. hoc eſt duplo ipſius H K. Ergo G æqualis eſt quadrato ipſius H L. Quod erat demonſtrandum. Nec refert vtrum B D. ſecari poſſit biſariam indiuiſa vnitate, necne, cùm hæc demonſtratio nitatur ſolùm propoſitionibus libri ſecundi Euclidis, quæ abſtrahunt ab integris & à fractis, vt manifeſtum eſt. Porro hinc euidenter colligitur omnem quadratum imparem vnitate multatum, eſſe multiplicem octonarij, nam metitur eum octonarius

per numerum triangulum, cuius latus æquatur ſemiſſi lateris quadrati vnitate multati.

Diligenter autem attendenda eſt operatio Diophanti, qui poſitiones ſuas appoſitiſſimè inſtituit vt ſolutio contingat rationalis. Etenim cùm quærendus ſit quadratoquadratus conſtans ex triangulo, quadrato, & cubo, ponit eum 1 QQ. Tum argutè quadratum ſtatuit 1 QQ. + 1. – 2 Q. à latere 1 Q. – 1. quo ablato ab 1 QQ. ſupereſt 2 Q. – 1. qui ex cubo & ex triangulo componi debet. Hinc ergò ſi auferatur cubus quilibet, puta 8. reſtat 2 Q. – 9. æquandus triangulo. Quamobrem oportet vt ductus in 8. & adſciſcens vnitatem, faciat quadratum per theorema ſuprà demonſtratum. Vnde fit 16 Q. – 71. æquandus quadrato. Hoc autem fieri minimè poſſet, niſi 16. quadratorum numerus, eſſet quadratus. Itaque.

Aduerte primò in quadrato detrahendo ab 1 QQ. talem reperiri debere quadratorum numerum, vt is ad 8. habeat rationem quadrati ad quadratum, quales ſunt 1. 8. 32. &c. ſic poni poterat quadratus ille 1 QQ. + 19 – 8 Q. à latere 1 Q. 4. vel etiam 1 QQ. + 256 – 32 Q. à latere 1 Q. – 16. & ſic de aliis. Verbi gratia ſi ponatur quadratus 1 QQ. + 16 – 8 Q. eo detracto ab 1 QQ. reſtabit 8 Q. – 16. vnde ſi auferas cubum aliquem, puta 8. remanebit 8 Q. – 24. æquandus triangulo, ac proinde ducto eo in 8. & producto addendo vnitatem, fiet 64 Q. – 191. æquandus quadrato, cuius latus ſi fingas 8 N. – 1. fiet 1 N. 12. cuius quadratoquadratus optimè ſatisfacit propoſito.

Aduerte ſecundò, alium etiam quemlibet cubum quàm 8. ſumi poſſe, vt in hypotheſi Diophanti ſi ſumatur cubus 27. fiet 2 Q. – 28. æquandus triangulo, quem ſi ducas in 8. & producto addas 1. fiet 16. Q. – 223. æquandus quadrato, cuius latus ſi ponas 4 N. – 1. fiet 1 N. 28. cuius quadratoquadratus rurſus implet poſtulata.

Aduerte poſtremò in fingendo latere vltimi quadrati, talem adhibendam eſſe cautionem, vt valor Numeri reperiatur in integris numeris, cùm numerus triangulus non poſſit eſſe niſi integer. Id autem ſemper ſuccedet operando modo à Diophanto tradito, ſi quadrati latus fingatur à tot numeris qui ſint latus quadratorum in numero quadrato æquando contentorum – 1. Cæterùm vix aliter id fieri poſſe, ſatis experiendo deprehendes. Ex operatione autem Diophanti facilè eſt elicere Canonem ad inueniendum quadrato quadratum qui conſtet ex triangulo, quadrato, & cubo nimirum.

OBSERVATIO D. P. F.

EXperientiam non ſatis exactam fecit Bachetus. Sumatur quilibet cubus v.g. cuius latus multiplici ternarii ſuperaddas vnitatẽ Erunt v.g. 2 Q. – 344 æquando triangulo ergo 16. Q. – 2751 æquabuntur quadrato cuius latus finges ſi libet, 4 N – 3. &c. Nihil enim vetat quo minus generali methodo loco etiam ipſius 3. reliquos in infinitum impares vſurpemus, variando cubos.

Sume cubum quemlibet, & huic adde vnitatem, fiet latus quæſiti quadratoquadrati.

Quod ſi velis reperire quadratum, & cubum, & triangulum, ex quibus inuentus quadratoquadratus componitur. Adde 1. quadratoquadrato inuento, & hinc aufer duplum quadrati ab eodem latere profecti, relinquetur quadratus quæſitus. Cubus verò is eſt quem ab initio ſumpſiſti. Triangulus verò reperietur ſi ab inuento quadratoquadrato auferas compoſitum ex quadrato & cubo iam inuentis. Verbi gratia, ſume cubum 1. cui adde 1. fiet 2. latus quæſiti quadratoquadratis. Is ergo eſt 16. quem dico componi ex quadrato, cubo, & triangulo. Nam adde 1. ad 16. fit 17. vnde aufer duplum quadrati à latere 2. puta 8. remanet quæſitus quadratus 9. cubus verò eſt is quem ſumpſiſti ab initio, nempe 1. Quare à quadratoquadrato 16. auferendo 9. & 1. ſimul, remanet triangulus 6. ſed & quadratum ſic aliter inuenies, aufer 1. à quadrato ab eodem latere profecto, à quo proficiſcitur quadratoquadratus inuentus, reſiduum erit latus quæſiti quadrati, vt in eodem exemplo, cùm quadratus lateris 2. fit 4. aufer hinc 1. remanet 3. latus quæſiti quadrati 9.

Rurſus aliter inuenietur triangulus hac arte. Cape duplum cubi ab initio ſumpti, & huic adde vnitatem, fiet latus quæſiti trianguli. Vt in eodem exemplo, duplo cubi 1. adde 1. fiet 3. latus trianguli 6.

Hoc verò lemmate ſoluto, ſoluetur & propoſita quæſtio huiuſmodi Canone.

Sume quadratoquadratum ex triangulo, quadrato, & cubo compoſitum. Tum diuide ſigillatim triangulum, quadratum & cubum, per quadratum à latere quadratoquadrati ſumpti, orientur quæſiti numeri.

Vt in noſtra hypotheſi, diuide ſigillatim 6. 9. 1. per 4. fient quæſiti numeri $\frac{6}{4}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{1}{4}$. nam eorum ſumma eſt 4. qua ducta in primum fit triangulus 6. & eadem ducta in ſecundum 1. fit quadratus 9 & eadem ducta in tertium, fit cubus 1.

Dignum quoque animaduerſione eſt, ex vi analyſeos Diophantææ ſequi, ſummam quæſitorum numerorum eſſe quadratum numerum, quoniam ponitur huiuſmodi ſumma 1 Q. ſic vides in illius hypotheſi, ſummam numerorum eſſe 81. At in noſtra 4. & ſic de alijs.

Sed & operæ pretium fuerit adnotaſſe, quæſtionem hanc eodem prorſus artificio extendi poſſe ad quoſlibet polygonos & quaſlibet poteſtates, dummodo iis adnumerentur quadratus & triangulus. verbi gratia.

Inueniantur quinque numeri, vt ſumma ipſorum ducta in primum, fiat triangulus, in ſecundum quadratus, in tertium cubus, in quartum Pentagonus, in quintum quadrato quadratus.

Hic euidens eſt reperiendum eſſe quadratoquadratum compoſitum ex triangulo, quadrato, cubo, pentagono, & quadratoquadrato. Is eſto 1 Q Q. quadratus autem 1 Q Q. + 1 − 2 Q. quo detracto ab 1 Q Q. remanet 2 Q. − 1. diuidendus in cubum, pentagonum, quadratoquadratum, & triangulum. Eſto cubus 8. pentagonum 5. Quadratoquadratus 1. relinquitur ergo triangulus 2 Q. − 15. qui ductus in 8. & adſumens 1. facit 16 Q. − 119. æquandandum quadrato. Eſto latus eius 4 N. − 1. fiet 1 N. 15. Eſt ergo triangulus 435. quadratus 50176. cubus 8. Pentagonus 5. Quadratoquadratus 1. Veniamus iam ad propoſitam quæſtionem, & ſtatuantur ſumma quæſitorum numerorum 1 Q. primus verò $\frac{435}{1 Q}$. ſecundus $\frac{50176}{1 Q}$. tertius $\frac{8}{1 Q}$. quartus $\frac{5}{1 Q}$ quintus $\frac{1}{1 Q}$. Erit illorum ſumma $\frac{50625}{1 Q}$. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. 15. Igitur primus eſt $\frac{435}{225}$. ſecundus $\frac{50176}{225}$. tertius $\frac{8}{225}$ quartus $\frac{5}{225}$. quintus $\frac{1}{225}$.

QVÆSTIO XLV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλάσσονος λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἔτι δὲ καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι τριπλασίονα. ἐπεὶ δὲ συναμφότερος ὁ μέσος καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ τετράγωνον. ποιείτω μο δ. ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος. ἔστω ἀριθμοῦ α. μο β. ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται μο β. ⋔ ς α. καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ςς β. ἡ ἄρα ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ἔσται ςς ς. καὶ ὁ μείζων ἄρα ἔσται ςς ζ. μο β. λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τό τε συναμφότερον τὸν μείζονα, καὶ τὸν μέσον ποιεῖν τετράγωνον τό τε τὸν μείζονα, καὶ τὸν ἐλάχιστον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεταί μοι διπλῆ ἡ ἰσότης ςς η μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ςς ς. μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικάς, εὐχερής ἐστιν ἡ ἴσωσις. πλάσσω ἀριθμοὺς δύο, ἵνα τὸ ὑπ' αὐτῶν ᾖ ςς β. καθὼς ἴσμεν διπλῆν ἰσότητα. ἔστωσαν ς τὸ ἥμισυ, καὶ μο δ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ριβ. ἐλθὼν ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ μο β. τὸν ς α. τουτέστι τὰς μο ριβ. θέλω οὖν τὸν ς ἀριθμὸν εὑρεθῆναι ἐλάττονα μο β. ὥστε καὶ ςς ς μο δ. ἐλάσσονες ἔσονται μο ις. ἐὰν γὰρ ἡ δυὰς ἐπὶ ςς ς. γίνεται καὶ προσλάβῃ μο δ.

INVENIRE tres numeros, vt interuallum maioris & medij, ad interuallum medij & minoris datam habeat rationem; ſed & bini ſumpti quadratum conſtituant. Imperetur vt interuallum maioris & medij, interualli medij & minimi ſit triplum. Iam cùm ſumma medij & minimi ſit quadratus, eſto 4. ergo medius maior eſt binario. eſto 1 N. + 2. Igitur minimus erit 2 − 1 N. & quoniam interuallum maximi & medij, eſt triplum interualli medij & minimi interuallum autem medij & minimi eſt 2 N. erit interuallum maximi & medij 6 N. Quàmobrem maximus erit 7 N. + 2. Superſunt duo poſtulata, nimirum vt maximus cum medio faciat quadratum, & vt maximus cum minimo faciat quadratum, & occurrit duplicata æqualitas, nempè 8 N. + 4. æquales quadrato, & 6 N. + 4. æquales quadrato, & quia vnitates ſunt quadratæ, expedita eſt æquationis ratio. Statuo duos numeros quorum mutuo ductu fiant 2 N. ſicut nouimus in duplicata æqualitate faciendum. ſunto $\frac{1}{2}$ N. & 4. fit 1 N. 112. At vbi me ad poſitiones confero, non poſſum de 2. auferre 1 N. nimirum 112. Volo igitur numerum inueniri minorem quàm 2. atque ſic etiam 6 N. + 4. minores erunt quam 16. nam binario in 6 N. multiplicato, & additis 4. fiunt 16. Quandoquidem ergo quæro 8 N. + 4. æquari quadrato,

& 6 N. + 4. æquari quadrato, ſed & à binario fit quadratus 4. ſunt tres quadrati 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & 4. & interuallum maximi & medij eſt triens interualli medij & minimi: eò res rediit vt inueniantur tres quadrati, vt interuallum maximi & medij, ſit triens interualli medij & minimi, ſed & minimus ſit 4. Medius autem minor quàm 16. Ponatur minimus 4. At medij latus 1 N. + 2. Ipſe igitur erit 1 Q. + 4 N. + 4. Quia ergo interuallum maximi & medij, eſt triens interualli medij & minimi, at interuallum medij & minimi eſt 1 Q. + 4 N. vtique maximi & medij interuallum erit $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. At eſt medius 1 Q. + 4 N. + 4. Igitur maximus erit 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. æqualis quadrato. Omnia nouies. Ergo 12 Q. + 48 N. + 36. æquatur quadrato, & huius quadrans, nempè 3 Q. + 12 N. + 9. æquatur quadrato. Atqui oportet & medium minorem eſſe quàm 16. Quare & latus minus eſſe oportet quàm 4. latus autem medij eſt 1 N. + 2. Proinde 1 N. + 2. minus ſunt quam 4. & ſublato vtrimque binario. 1 N. minor eſt quàm 2. volens itaque 3 Q. + 12 N. + 9. æquare quadrato, formo quadratum à 3. cum defectu aliquot numerorum, & fit 1 N. ex aliquo numero ſexies ſumpto, & adſciſcente 12. nimirum 12 N. æquationis, & diuiſo per interuallum quo numeri quadratus ſuperat quadratos qui ſunt in æquatione, nempè 3. Eò itaque deducta res eſt, vt inueniatur numerus qui ſexies ſumptus, & adſciſcens 12. diuiſuſque per interuallum quo ipſius quadratus excedit ternarium, quotientem binario minorem exhibeat. Eſto quæſitus 1 N. Hic ſexies ſumptus & adſciſcens 12. facit 6 N. + 12. Quadratus autem illius detracto ternario facit 1 Q. − 3. Volo ergo 6 N. + 12. diuidi per 1 Q. − 3. & facere quotientem minorem quam 2. Atqui 2. diuiſus per vnitatem, facit quotientem 2. Proinde 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habet rationem quam 2. ad 1. Quare & planus plano inæqualis eſt. Igitur productus ex 6 N. + 12. in 1. minor eſt producto ex 2. in 1 Q. − 3. hoc eſt 6 N. + 12. minus ſunt quàm 2 Q. − 6. Adiiciantur

ποιεῖ μο ιϛ. ἐπεὶ οὖν ζητῶ ϛϛ^οὶ η. μο δ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ϛϛ^οὺς ϛ. μο δ. ἴσους τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἀπὸ τῆς δυάδος τουτέστι μο δ. τετράγωνός ἐστι. γεγόνασι τρεῖς τετράγωνοι ϛϛ η. μο δ. καὶ ϛϛ ϛ. μο δ. καὶ μο δ. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστίν. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ᾖ, ἔτι δὲ ὁ μὲν ἐλάχιστος ᾖ μο. δ. ὁ δὲ μέσος ἐλάσσων μο ιϛ. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάχιστος μο δ. ἡ δὲ τοῦ μέσου πλευρὰ ϛο α. μο β. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ α. ϛϛ δ. μο δ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστι, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου δυ α. ϛϛ δ. ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ μέσου ἔσται δυ α γ^×. ϛο α. α γ^×. καὶ ἔστι ὁ μέσος δυ ϛϛ δ. μο δ. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυ α. α γ^×. ϛϛ ε. α γ^× μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ. πάντα ἐννάκις δυνάμεις ἄρα ιβ. ϛϛ^οὶ μη. μο λϛ. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον αὐτῶν δυ γ. ϛϛ^οὶ ιβ. μο θ. ἴσον τετραγώνῳ, δεῖ δὲ καὶ τὸν μέσον ἐλάσσονα εἶναι μο ιϛ καὶ τὴν πλευρὰν δηλαδὴ ἐλάσσονα εἶναι μο δ. ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ μέσου ἐστὶν ϛο α. μο β. ἀριθμὸς ἄρα εἷς μο β. ἐλάττονές εἰσι μο δ. καὶ κοινῶν ἀφαιρεθεισῶν τῶν β μο. ὁ ϛο ἔσται ἐλάσσων μο β. γέγονε οὖν μοι δυ γ. ϛϛ^οὶ ιβ. μο θ. ἴσας ποιῆσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνόν τινα ἀπὸ μο γ. λειπόντων ϛϛ^οὶ τινας, καὶ γίνεται ὁ ϛο ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ προσλαβόντος τὸν ιβ. τουτέστι τῆς ἰσώσεως τοὺς ϛϛ^οὺς ιβ. καὶ μερισθέντος εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ϛο τετράγωνος τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τῇ ἰσώσει τειῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ϛο. ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο ιβ. μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνος, τριάδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μο β. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛο α. οὗτος ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο ιβ. ποιεῖ ϛϛ^οὺς ϛ. μο ιβ. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας μο γ. ποιεῖ δυ α. ⋔ μο γ. θέλω οὖν ϛϛ^οὺς ϛ. μο ιβ. μερίζεσθαι εἰς δυ α ⋔ μο γ. καὶ ποιεῖν τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μο β. καὶ ὁ β μεριζόμενος εἰς μονάδα μίαν ποιεῖ τὴν παραβολὴν, δυάδα, ὥστε ϛϛ^οὶ ϛ μο ιβ πρὸς δύναμιν α

↑ μº γ̄. ἐλάσσονα λόγον ἔχουσιν, ἤπερ δύο πρὸς ἕνα. καὶ χωρίῳ χωρίον ἄνισον. ὁ ἄρα ὑπὸ ϛϛ ϛ̄ μº ιβ̄. καὶ μονάδος μιᾶς, ἐλάσσων ἐστὶ, τοῦ ὑπὸ δυάδος καὶ δυνάμεως ᾱ ↑ μº γ̄. τουτέστι ϛϛοὶ ϛ̄ μº ιβ̄. ἐλάσσονές εἰσι δυ β̄ ↑ μº ϛ̄. καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ μονάδες, μείζονες ϛϛοὶ θ̄ μº. ιη. αἱ δυνάμεις β. ὅταν δὲ τοιαύτην ἴσωσιν ἰσώσωμεν, ποιοῦμεν τῶν ϛϛ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ, γίνεται θ̄. καὶ τὰς δυ β̄. ἐπὶ τὰς μº ιη̄. γίνονται λϛ̄. πρόσθες τοῖς θ̄. γίνονται με. ὧν πλευρὰ οὐκ ἐλάττον ἐστι μº ζ̄. πρόσθες τὸ ἡμίσευμα τῶν ϛϛ καὶ μέρισον εἰς δυνάμεις γίνεται ὁ ϛ οὐκ ἐλάττων μº ε̄. γέγονεν οὖν μοι δυνάμεις γ̄. ϛϛοὶ ιβ̄. μº θ̄. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μº γ̄. λείψει ἀριθμῶν ε̄ καὶ γίνεται ὁ ϛ μº μβ ^{κβ}. τουτέστι κα ^{ια}. τέθεικα δὲ τὴν τοῦ μέσου τετραγώνου πλευρὰν ϛ ᾱ. μº β̄. ἔσται ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μº μγ̄ ^{ια}. αὐτὸς δὲ ὁ τετράγωνος μº ͵αωμθ ^{ρκα}. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω μονάδας ͵αωμθ ^{ρκα}. ὄντα τετράγωνον ἴσον τοῖς ϛϛοῖς ϛ̄. μº δ̄. καὶ πάντα εἰς ρκα. καὶ γίνεται ὁ ϛ ͵ατξε ψκϛ. καὶ ἔστιν ἐλάσσων δυάδος. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις τοῦ προβλήματος τοῦ ἐξ ἀρχῆς. ὑπεστησάμεθα δὲ τὸν μὲν μέσον ϛ ᾱ. μº β̄. τὸν δὲ ἐλάχιστον μº β̄ ↑ ϛ ᾱ. τὸν δὲ μέγιστον ϛϛ ζ̄. μº β̄. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ᾱ. ͵αζ ψκϛ. ὁ δὲ δεύτερος ͵βωιζ ψκϛ. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὁ τρίτος πζ ψκϛ. καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον τὸ ψκϛ. οὐκ ἔστι τετράγωνος ἕκτον δὲ ἐστιν αὐτοῦ, ἐὰν λάβωμεν ρκα. ὅ ἐστι τετράγωνος. πάντων οὖν τὸ ἕκτον. καὶ ὁ μὲν πρῶτος ͵αωλδ ^{ρκα} ᾱ ^{ϛ}. ὁ δὲ δεύτερος υξθ ^{ρκα}. ᾱ ^{ϛ}. ὁ δὲ τρίτος ιδ ^{ρκα}. ᾱ ^{ϛ}. καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς, ἵνα μὴ τὸ ἥμισυ ἐπιτρέχῃ, εἰς τέσσαρα ἔμβαλε. καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ͵ζτλη ^{υπδ}. ὁ δὲ δεύτερος ͵αωοη ^{υπδ}. ὁ δὲ τρίτος νη ^{υπδ}. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

quæ deſunt vtrimque vnitates, erunt 2 Q. maiores quàm 6 N. + 18. In æquatione autem hac explicanda, dimidium numerorum in ſe ducimus, & fit 9. ducimus etiam quadratos in vnitates, & fiunt 36. & addito 9. fiunt 45. cuius latus non minus eſt 7. Adde ſemiſſem numerorum, & diuide per quadratos, fit 1 N. minor 5. Oportet igitur 3 + 12. N. + 9. æquare quadrato a latere 3 — 5 N. & fit 1 N. $\frac{42}{22}$ hoc eſt $\frac{21}{11}$. Poſueram autem medij quadrati latus 1 N. + 2. erit ergo huiuſmodi latus. $\frac{43}{11}$ ipſe verò quadratus $\frac{1849}{121}$. venio igitur ad primò propoſitum, & ſtatuo $\frac{1849}{121}$ qui eſt quadratus, æqualem 6 N. + 4. & omnia ducendo in 121. fit 1 N. $\frac{1365}{726}$. minor vtique binario. Ad poſitiones quæſtionis initio propoſitæ. Statueramus medium 1 N. + 2. minimum 2 — 1 N. Maximum verò 7 N. + 2. erit ergo maximus $\frac{11007}{726}$. ſecundus $\frac{2817}{726}$. minimus ſeu tertius $\frac{87}{726}$. & quia denominator 726. non eſt quadratus ſed eius ſextans 121. eſt quadratus, omnium ſextantes accipiamus, & erit ſimiliter primus $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$. ſecundus $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$. tertius $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$. Quod ſi in integris hæc deſideras, ne ſemiſſis intercurrat, omnia quadruplica, & erit primus $\frac{7338}{484}$. ſecundus $\frac{1878}{484}$. tertius $\frac{58}{484}$. & demonſtratio manifeſta.

IN QVAESTIONEM XLV.

PRAECLARVM eſt hoc problema, & admirandæ ſubtilitatis, in quo etiam continetur nouus modus vtendi duplicata æqualitate omnium quos hactenus explicauimus, elegantiſſimus. Cùm ergo tres operationes inſtituat Diophantus, age ſingulas perſequamur, vt multa dilucidentur, in quibus omnino cæcutiit Xilander.

In prima itaque operatione. Aduerte primò pro quadrato quem conficiunt medius & minimus ſumi potuiſſe quemlibet vnitatum numerum quadratum. Author ſumpſit 4. minimum ſcilicet more ſuo.

Aduerte ſecundo cur inferat medium maiorem eſſe debere binario, cauſam eſſe quia medius debet eſſe maior minimo. Quare poſita ſumma medij & miuimi 4. oportet medium excedere ſemiſſem ipſius 4.

Aduerte tertiò cùm æquandi ſint quadrato 8 N. + 4 & 6 N. + 4. Diophantum indicare primùm, modum illum reſoluendi duplicatam æqualitatem, quo ſæpè in ſimili vſus eſt libro tertio. Quia enim vnitatum numerus vtrobique quadratus eſt, procedit æquatio, ſi ſumantur duo numeri quorum mutuo ductu fiat interuallum 2 N. ita tamen vt in ſemiſſe ſummæ illorum contineatur 2. latus quadrati 4. tales ſunt ½ N. & 4. Quare ſi horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur ipſi 8 N. + 4. vel ſi eorundem interualli ſemiſſis quadratus æquetur ipſi 6 N. + 4. fiet vtrobique 1 N. 112. Hinc autem hoc in commodi accidit, vt per hunc Numeri valorem reſolui non poſſint hypoſtaſes.

Etenim cùm minimus poſitus ſit 2 − 1 N. euidens eſt valorem Numeri debere eſſe minorem quàm 2. Proinde cùm hoc modo reſoluendo duplicatam æqualitatem vnica ſolutio reperiri poſſit, qua fit 1 N. 112. patet eum hoc loco inutilem eſſe. Igitur.

Aduerte quartò aliud hîc genus duplicatæ æqualitatis tradi à Diophanto, quo in data hypotheſi, & alijs omnibus ſimilibus infinitæ reperiri poſſunt ſolutiones, hac arte. Conſideratis tribus numeris 8 N. + 4. 6 N. + 4. 4. Quorum minimus 4 eſt vnitatum numerus quadratus. At interuallum maiorum 2 N. eſt triens interualli minorum 6 N. Quærendi ſunt duo quadrati, quorum interuallum ſit triens interualli quo minor illorum ſuperabit 4. quales ſunt 64. & 49. Tunc verò ſiue æques 64. & 8 N. + 4. ſiue 49. & 6 N. + 4. fiet vtrobique idem valor numeri $7\frac{1}{2}$. Hoc autem ita neceſſario inuenire, ac proinde modum iſtum reſoluendi duplicatam æqualitatem eſſe legitimum, ſic demonſtrabitur. Sint tres numeri A. B C. & interuallum maiorum A B. eſto D. interuallum minorum B C. eſto E. Rurſus ſint tres F G H. & maiorum F G. interuallum eſto K. minorum L. Ponaturque H æqualis ipſi C. & ſic eadem ratio D ad E. quæ K ad L. dico ſi G fiat æqualis ipſi B. & ipſum F fore æqualem ipſi A. in quo conſiſtit vis omnis duplicatæ æqualitatis.

D— E—
A— B—C—
F 64. G 49. H 4.
K 15. L 45.

Etenim quia B G ponuntur æquales, ſi ab his demantur æquales C H. erunt & reſidui E L. æquales. Cùm ergo ſit D ad E. vt K ad L. erunt & ipſi D K æquales. Quamobrem additis æqualibus D. K ad æquales B G. fient & toti A F æquales. Quod demonſtrandum erat. Itaque vt reperiat quadratos quales ſunt F. G. quorum ſcilicet interuallum ſit triens interualli quo minor G. ſuperat 4. ſecundam inſtituit operationem Diophantus.

In ſecunda operatione. Aduertè primò minoris quæſitorum quadratorum latus ritè poni 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. vt in eius quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. vnitatum numerus æquetur ipſi 4. ac proinde exceſſus quadrati illius ſupra 4. nimirum 1 Q. + 4 N. conſtet ex ſolis quadratis & numeris, quorum triens cùm ſit $\frac{1}{3}$ Q. + $1\frac{1}{3}$ N. conſtans etiam ex ſolis quadratis & numeris, eo addito ad minorem quadratum, fit maior quadratus $1\frac{1}{3}$ Q. + $5\frac{1}{3}$ N. + 4. vbi vnitatum numerus repetitur idem quadratus 4. quod accidit quia is reperiebatur in minore quadrato, & vt dictum eſt, maior quadratus fit addendo minori ſolos quadratos & numeros, vnde vnitates manent immutatæ. Neceſſe autem fuit vnitatum numerum quæ ſunt in maiori quadrato, quadratum fuiſſe, ad hoc vt latus eius fingi potuerit.

Aduerte ſecundò numerum quadrato æquandum, puta in $\frac{4}{3}$ Q. + $5\frac{1}{3}$ N. + 4. duci in 9. ad tollendas fractiones, tum productum diuidi per 4. vt æquatio reducatur ad minimos numeros, vnde fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato. Nam vt alias ſæpè monuimus tam quadrato in quadratum ducto, quàm per quadratum diuiſo, producitur quadratus.

Aduerte tertiò numerum 3 Q. + 12 N. + 9. æquandum eſſe quadrato cum quadam Numeri determinatione. Etenim vt ſuprà oſtenſum eſt, 6 N. + 4. ita æquandus eſt quadrato, vt fiat 1 N. minor quàm 2. At ſi 1 N. ſit minor quàm 2. erunt 6 N. minores quàm 12. Quare adiecto 4. erit 6 N. + 4. minor quàm 16. ac proinde latus quadrati cui æquandus eſt 6 N. + 4. debet eſſe minus quàm 4. Poſitum autem eſt latus illud 1 N. + 2. Igitur 1 N. + 2. minus eſt quàm 4. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. minor quàm 2. Rectè igitur concludit Diophantus numeri 3 Q. + 12 N. + 9. latus ita fingendum eſſe, vt fiat 1 N. minor quàm 2. Porro neceſſe eſt hoc latus fingi 3 − certo numero Numerorum, vnde patet fieri valorem Numeri, ſi per quadratum numeri Numerorum in latere poſitorum ternario multatum, diuidatur ſextuplum eiuſdem numeri Numerorum, auctum numero 12. Itaque benè infertur quærendum eſſe numerum cuius ſextuplum auctum numero 12. & diuiſum per quadratum quæſiti numeri, ternario multatum, det quotientem minorem quàm 2. Ad hunc ergo numerum inueniendum tertiam molitur operationem Diophantus.

In tertia operatione. Cùm 6 N. + 12. debeat diuidi per 1 Q. − 3. ita vt fiat quotiens minor binario, Diophantus ita ratiocinatur. Quouis numero per alium diuiſo, quotiens eſt denominator proportionis diuiſi ad diuiſorem, qui denominator eò maior eſt, quo maior eſt proportio, & contrà. Cùm igitur binario per 1. diuiſo fiat quotiẽs 2. & diuiſo 6 N. + 12 per 1 Q. − 3. debeat fieri minus quàm 2. ſequitur 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habere rationem, quam 2. ad 1. Datis igitur quatuor numeris 6 N. + 12. 1 Q. − 3. 2. 1. Cùm minor ſit ratio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum, ſequitur ex primo in quartum produci minorem numerum, quàm ex ſecundo in tertium, vt demonſtrauit Clauius ad decimam nonam ſeptimi. Rectè igitur infert Diophantus 6 N. + 12. minus eſſe quàm 2 Q. − 6. & adiectis æqualibus 6 N. + 18. minus eſſe quam 2 Q. Hoc autem vt ſit, oportet vtique 2 Q. æquari numero alicui maiori quàm 6 N. + 18. Quod vt præſtet conſiderat primùm Diophantus qualis fiat valor Numeri ſi 2 Q. ponantur æquales 6 N. + 18. quæ eſt ſecunda regula compoſitarum, quamque modo ſibi familiari reſoluit, ducendo ſcilicet numerum quadratorum 2., in vnitates 18. vnde fit 36. cui addit quadratum ſemiſſis numeri Numerorum, puta 9. & fit 45. cuius lateri ſi addatur 3. ſemiſſis numeri Numerorum, & ſumma diuidatur per numerum Quadratorum 2. fit valor Numeri. Sed hæc æquatio ſolutionem dat irrationalem, quia 45. non habet latus quadratum. Sumitur ergo loco 45. proximè maior quadratus 49. cuius lateri 7. addendo 3. fit 10 quo diuiſo.

per 2. prodit 5 valor numeri. In hac autem æquatione 6 N. + 18. ponitur minor quàm 2 Q. Quia 2 Q. fiunt æquales 6 N. + 20. Eadem de cauſa ſtatui poteſt valor Numeri quilibet numerus major quàm 5. puta 6. 7. 8. &c. Tunc enim ſemper 2 Q. fient æquales alicui numero maiori quàm 6 N. + 18.

Hæc quidem ad perfectam Diophantæi Problematis explicationem ſatis ſuperque ſufficiunt. Quoniam verò hîc vtitur author elegantiſſimè duplicata æqualitate, vnde re ſubtilius conſiderata modos aliquot adinuenimus eadem vtendi, etiam in diſſimili caſu, quibus ſanè difficillima pulcherrimáque problemata feliciter explicari poſſunt, minimè pigebit non vulgare inuentum curioſo lectori tradere vt illo perfruatur. Quemadmodum ergo in hac quæſtione Diophantus docet modum quo duo numeri ſimul æquentur quadrato, cùm vterque componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum ſunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum, numeri autem vnitatem ſunt inæquales & quadrati: ſic aio modum dari poſſe reſoluendi duplicatam æqualitatem, cùm vterque propoſitorum numerorum quadrato æquandorum, componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum ſunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum; ſed & numeri vnitatum inæquales ſunt, ſiue quadrati ſint, ſiue non. Id autem præſtabimus in duplici caſu.

Primus caſus eſt, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale eſt, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiſo, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto, ſuperſit vnitatum numerus ſolus quadratus. verbi gratia. Propoſiti ſint quadrato æquandi 3 N. + 13. & 1 N. + 7. quia horum interuallum eſt 2 N. + 6. quo diuiſo per 2. fit quotiens 1 N. + 3. quo ablato de 1 N. + 7. ſupereſt quadratus 4. explicabitur æquatio hac arte. Conſideratis tribus numeris 3 N. + 13. 1 N. + 7. & 4. cùm maiorum interuallum, puta 2 N. + 6. duplus ſit interualli minorum, puta 1 N. + 3. Quærendi ſunt duo quadrati; quorum interuallum ſit duplum interualli, quo minor illorum ſuperat 4. Quod facilè fiet, infinitiſque modis inſiſtendo veſtigiis Diophanti. Eſto enim latus minoris 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. cuius exceſſus ſupra 4. eſt 1 Q. + 4 N. cuius duplum 2 Q. + 8 N. quo addito ad minorem quadratum, fiet maior 3 Q. + 12 N. + 4. hic ergo æquandus eſt quadrato, ſed prius determinandum eſt de valore Numeri. Quia enim minor numerorum quadrato æquandorum eſt 1 N. + 7. patet talem ei quadratum æquari debere, qui ſit maior quàm 7. Quare cùm latus proximum ipſius 7. ſit 2 $\frac{3}{4}$. debet & latus quadrati maius eſſe quàm 2 $\frac{3}{4}$. At latus huius quadrati ſupra poſitum eſt 1 N. + 2. hoc ergo maius ſit oportet, quàm 2 $\frac{3}{4}$. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. maior quàm $\frac{3}{4}$. Quoniam igitur vt æquemus quadrato 3 Q. + 12 N. + 4. latus eius ponendum eſt 2. − certo numerorum numero, vnde fiet valor Numeri diuidendo quadruplum numeri Numerorum auctum numero 12. per quadratum eiuſdem numeri numerorum multatum ternario. Euidens eſt quærendum eſſe numerum, cuius quadruplum auctum numero 12. & diuiſum per quadratum quæſiti numeri multatum ternario, det quotientem maiorem quàm $\frac{3}{4}$. Ponatur quæſitus numerus 1 N. ergo $\frac{4 N. + 12.}{1 Q. - 3.}$ maior eſt quàm $\frac{3}{4}$ & omnia ducendo in 1 Q. − 3. fit 4 N. + 12. maior quàm $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{9}{4}$. additoque defectu, & omnia per 4. multiplicando, fit 16 N. + 57. maior quàm 3 Q. Quamobrem æquando 3 Q. numero alicui minori quàm 16 N. + 57. puta 16 N. + 53 $\frac{1}{3}$ cùm fiat 1 N. 7 $\frac{2}{3}$ pronuncio quæſitum numerum ſumendum eſſe minorem quàm 7 $\frac{2}{3}$. talem tamen vt eius quadratus excedat 3. ſumatur 3. Igitur numeri 3 Q. + 12 N. + 4. fingo latus 2 − 3 N. & fit 1 N. 4. & ſunt quæſiti quadrati 100. & 36. Nam ſiue æques 100. & 3 N. + 13. ſiue 36. & 1 N. + 7. fit vtrobique idem valor Numeri 29. Quod erat propoſitum.

Itaque in hoc caſu, vt æquatio ſit explicabilis. Oportet vt interualli propoſitorum numerorum diuidendo Numeros per Numeros minoris numeri, vel contrà; & per quotientem diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus quo detracto ab vnitatibus minoris numeri, ſuperſit quadratus. Vt in exemplo allato vbi interuallum eſt 2 N. + 6. minor numerus 1 N. + 7. quia diuidendo 2 N. per 1 N. & per quotientem 2. diuidendo vnitates 6. fit 3. quo detracto de 7. remanet quadratus 4. ideo æquatio potuit explicari. Quod ſi proponantur quadrato æquandi 8 N. + 25. & 6 N. + 21. quorum interuallum 2 N. + 4. Quia diuidendo 6 N. per 2 N. & per quotientem 3. multiplicando vnitates interualli 4. fit 12. quo ablato de 21. remanet quadratus 9. ideo poterit explicari æquatio, quærendo duos quadratos quorum interuallum ſit triens interualli, quo minor ſuperat 9. Ponatur latus minoris 1 N. + 3. erit ipſe 1 Q. + 6 N. + 9. & exceſſus eius ſuper 9. erit $\frac{1}{3}$ Q. + 2 N. quo ipſi minori quadrato addito, fiet maior 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 8 N. + 9. & omnia ducendo in 9. fiet 12 Q. + 72 N. + 81. æquandus quadrato, & ſi Numeri determinationem inueſtiges, inuenies quadrati latus fingendum eſſe 9 − tot numeris qui non excedant 14. ſed quorum quadratus excedat 12. Ponatur 9 − 4 N. fiet 1 N. 36. & erunt quæſiti quadrati 2025. & 1521. quos ſi æques propoſitis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 250.

Secundus caſus eſt. Cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale eſt, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiſo, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto, deficiat vnitatum numerus ſolus, qui ad multiplicatorem vel diuiſorem.

rationem

rationem habeat quadrati ad quadratum. Vt ſi proponantur æquandi quadrato 6 N. + 25. & 2 N. + 3. quorum interuallum 4 N. + 22. quia hoc diuiſo per 2. fit 2 N. + 11. quo detracto à minore numero ſupereſt − 8. & numerus 8. ad diuiſorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Conſideratis tribus numeris 6 N. + 25. 2 N. + 3. & − 8. quoniam maiorum interuallum, puta 4 N. + 22. duplum eſt interualli minorum, quod eſt 2 N. + 11. Quæram duos quadratos, quorum interuallum ſit duplum interualli quo minor ſuperat − 8. Ponatur minor 1 Q. huius interuallum ſuprà − 8 eſt 1 Q. + 8. cuius duplum 2 Q. + 16. quo addito ad minorem quadratum, fit maior 3 Q. + 16. Hoc ergo vt æques aptè quadrato, ſi quæras Numeri determinationem, inuenies latus ponendum eſſe 4 − tot numeris qui non excedant 4 $\frac{1}{2}$. & quorum quadratus ſuperet 3. Ponatur ergo latus illud 4 − 3 N. fiet 1 N. 4. & erunt quæſiti quadrati 64. & 16. Nam ſiue æques 64. & 6 N. + 25. ſiue 16. & 2 N. + 3. fit vtrobique 1 N. 6 $\frac{1}{2}$. Itaque in hoc caſu, vt æquatio ſit explicabilis, oportet vt interualli propoſitorum numerorũ diuidendo Numeros per Numeros minoris, vel contra, & per quotientem hunc primum diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus, à quo detrahendo vnitates minoris numeri, ſuperſit numerus qui ad primum quotientem habeat rationem quadrati ad quadratum. Vt in allato exemplo, vbi interuallum eſt 4 N. + 22. minor numerus 2 N. + 3. quia diuidendo 4 N. per 2 N. & per quotientem 2. diuidendo 22. vnitates interualli fit 11. à quo auferendo 3. vnitates minoris numeri, ſupereſt 8. qui ad quotientem 2. habet rationem quadrato numero expreſſam, ideo æquatio potuit explicari. Quod ſi proponantur quadrato æquandi 15 N. + 39. & 12 N. + 31. quorum interuallum 3 N. + 8. quia diuidendo 12 N. per 3 N. fit quotiens 4. Quo ducto in 8. fit 32. à quo auferendo 31. ſupereſt 1. qui ad quotientem 4. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Conſideratis tribus numeris 15 N. + 39. 12 N. + 31. & − 1. quia maiorum interuallum 3 N. + 8. eſt quadrans interualli minorum quod eſt 12 N. + 32. Quærendi ſunt duo quadrati, quorum interuallum ſit quadrans interualli quo minor ſuperat − 1. eſto minor 1 Q. erit maior $\frac{5}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$ æquandus quadrato, omnia in 4. fit 5 Q. + 4. æqualis quadrato, & ſi quæras Numeri determinationem. Inuenies latus eius ponendum 2 − certo numero vnitatum qui non ſit maior quàm 2 $\frac{1}{3}$. nec minor quàm 2 $\frac{1}{4}$. Ponatur ergo 2 − 2 $\frac{1}{4}$ N. fiet 1 N. 144. & erunt quæſiti quadrati 25920 $\frac{1}{4}$ & 20736. quos ſi æques propoſitis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 1725 $\frac{5}{12}$.

Hac arte in æquatione quam reſoluit Diophantus propoſitione 17. lib. 3. æquans quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. Cùm ille vnicam ſolutionem reperire poſſit, nos infinitas dabimus. Etenim quia interuallum eſt 5 N. + 5. & diuidendo 5 N. per 5 N. fit 1. per quem diuidendo vnitates 5. fit quotiens 5. à quo auferendo 4. ſupereſt 1. qui ad priorem quotientem 1. habet rationem quadrati ad quadratum, puta æqualitatis, ideo explicabitur æquatio ſi quærantur duo quadrati, quorum interuallum ſit æquale interuallo quo minor ſuperat − 1. ſit minor 1 Q. erit maior 2 Q. + 1. quadrato æquandus, ſed ſi quæras Numeri determinationem inuenies latus fingendum eſſe 1 − tot numeris qui ſint minus quàm 2. & quorum quadratus exceedat 2. fingatur 1 − 1 $\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. 28. vt apud Diophantum. Rurſus fingatur 1 − $\frac{5}{3}$ N. fiet 1 N. $\frac{30}{7}$ eruntque quæſiti quadrati $\frac{1849}{49}$ $\frac{900}{49}$. & primum ſi æques 10 N. + 9. ſecundum 5 N. + 4. fiet 1 N. vtrobique $\frac{704}{245}$.

Porrò vtraque regula ſuam vim obtinet qualicunque ſigno afficiantur numeri quadrato æquandi, vt conſtat ex ſequentibus exemplis.

Sint quadrato æquandi 24. − 8 N. & 9 − 2 N. quia horum interuallum eſt 15 − 6 N. quo diuiſo per 3. fit 5 − 2 N. quo detracto à minore ſupereſt 4. quadratus numerus, reſoluetur æquatio per primam regulam; ſit minoris quadrati latus 1 N. + 2. erit ipſe 1 Q. + 4 N. + 4. Ergo maior 4 Q. + 16 N. + 4. cuius latus ſi ponas 2. − 8 N. fiet 1 N. $\frac{4}{5}$. & quæſiti quadrati $\frac{196}{25}$. & $\frac{784}{25}$. quos ſi æques propoſitis numeris, fiet vtrobique idem valor Numeri $\frac{29}{50}$.

Rurſus ſint quadrato æquandi 30 N. − 17. & 10 N. − 11. quia horum interuallum eſt 20 N. − 6. quo diuiſo per 2. fit 10 N. − 3. quo detracto de minore ſupereſt − 8. qui ad diuiſorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, reſoluetur æquatio per ſecundam regulam. Sit minor quadratus 1 Q. erit maior 3 Q + 16. cuius latus eſto 4 + 1 N. fiet 1 N. 4. Erunt ergo quadrati 64. & 16. qui ſi æquentur propoſitis numeris, fiet vtrobique valor Numeri $\frac{27}{10}$.

Rurſus ſint æquandi quadrato 24 N. − 2 & 8 + 10. cùm horum interuallum ſit 16 N. − 12. quo diuiſo per 2. fit 8 N − 6. quo detracto à minore ſupereſt 16. quadratus. Explicabitur æquatio per primam regulam. Sit minoris quadrati latus 4 + 1 N. erit ipſe 16 + 8 N. + 1 Q. ergo maior erit 16 + 24 N. + 3 Q. cuius latus eſto 4 + 2 N. fiet 1 N. 8. ergo quæſiti quadrati ſunt 400. & 144. qui ſi æquentur propoſitis numeris, fit vtrobique valor Numeri $\frac{67}{4}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Sed proponatur ſi placet hæc duplicata æqualitas nempè 2 N. + 5. & 6 N. + 3. æquandi quadrato. Quadratus æquãdus 2 N. + 5. erit 16 & quadratus æquandus 6

N. + 3. erit 36. & inuenientur alij in infinitum quæſtioni ſatisfacientes, nec difficile eſt regulam generalem ad huiuſmodi quæſtionum ſolutionem proponere, vt vix limitatio iſta Bacheti ſit tanto viro digna, cum ad infinitos caſus extendi, quod in duobus tantum adinuenit, facillime poſsit, imo & ad caſus omnes poſsibiles.

QVÆSTIO XLVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔτι δὲ σὺν δύο λαμβανόμενοι, ποιῶσι τετράγωνον. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου, ἔστω τριπλασίαν. ἐπεὶ ὁ μέγιστος καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον, ποιείτωσαν δυ ιϛ. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται μείζων δυ η. ἔστω δυ η. μο β. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος, μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἔστι συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δυνάμεις ιϛ. συναμφότερος ἄρα ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος, ἐλάσσων μέν ἐστι δυνάμεων ιϛ. μείζων δὲ δυνάμεων η. ἔστω οὖν συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δυνάμεις θ. ἔστι καὶ ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δυ ιϛ. ὧν ὁ μέγιστός ἐστι δυ η. μο β. ἔσται ἄρα καὶ ὁ μέσος δυ η. λεῖψει μο β. ὁ δὲ τρίτος δυ α. λεῖψει μο β. καὶ ἐπεὶ θέλω τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τὸν ἀπὸ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι τριπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου ἐστὶ δυ ξδ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δυ ζ. καὶ θέλομεν τὰς δυνάμεις ξδ. τῶν δυ ζ. εἶναι τριπλασίονα. ἀλλ' αἱ δυ ζ. τριπλάσιον γινόμεναι ποιοῦσι δυ κα. ἀλλ' αἱ δυνάμεις ξδ. ἐκ τοῦ τριακοντάκις καὶ δίς ἐστι τῶν μο β. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὃς τριακοντάκις, καὶ δὶς γινόμενος ποιεῖ μο κα. ἔστι δὲ τὰ κα λβ^{ων}. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δυ η. μο κα λβ^{ων}. τὸν δὲ μέσον δυ η. λεῖψει μο κα. λβ. καὶ λοιπόν ἐστιν τὸ ἐπίταγμα, συναμφότερον τὸν μέσον, καὶ τὸν ἐλάσσονα εἶναι τετράγωνον, ἔστι δὲ ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δυ θ. λεῖψει μο μβ λβ. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ γ. λεῖψει μο ϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛο. ͵αρζ ϙϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τϛ. ϑ λγ. αψοϛ. ὁ δὲ δεύτερος σξγ. γφμδ. λγ. αψοϛ. ὁ δὲ τρίτος λγ. ηχπα λγ. αψοϛ.

INVENIRE tres numeros, vt exceſſus quo quadratus maximi ſuperat quadratum medij, ad interuallum medij & minimi, datam habeat rationem, ſed & bini ſumpti faciant quadratum. Porrò exceſſus quo quadratus mıximi ſuperat quadratum medij, ad exceſſum medij ſupra minimum ſit triplus. Quandoquidem maximus & medius faciunt quadratum, faciant 16 Q. ergo maximus eſt maior quàm 8 Q. eſto 8 Q. + 2. & quando maximus & medius coniuncti ſuperant ſummam maximi & minimi, at maximus & medius ſimul ſunt 16 Q. erit vtique ſumma maximi & minimi minor quidem quàm 16 Q. ſed maior quàm 8 Q. Igitur ſumma maximi & minimi eſto 9 Q. Atqui ſumma maximi & medij eſt 16 Q. quorum maximus eſt 8 Q. + 2. erit ergo medius 8 Q. − 2. Tertius verò 1 Q. − 2. & quia volo exceſſum quo quadratus maximi ſuperat quadratum medij, ad exceſſum medij ſupra minimum eſſe triplum, ſed exceſſus quo quadratus maximi ſuperat quadratum medij eſt 64 Q. At interuallum medij & minimi eſt 7 Q. cuius triplum eſt 21 Q. Porro 64 Q. fiunt ex 32. in 2. ducto: incumbit ergo mihi vt numerum aliquem inueniam, qui per 32 multiplicatus faciat 21. eſt autem $\frac{21}{32}$. Pono igitur primum 8 Q. + $\frac{21}{32}$. Medium 8 Q. − $\frac{21}{32}$. tertium 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & reſtat implendum vnum poſtulatorum, nimirum vt ſumma medij & minimi ſit quadratus numerus. eſt autem hæc ſumma 9 Q. − $\frac{42}{32}$. hoc ergo æquatur quadrato à latere 3 N. − 6. & fit 1 N. $\frac{123}{576}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{3009000}{331776}$. ſecundus $\frac{2615544}{331776}$ tertius $\frac{332681}{331776}$.

IN QVAESTIONEM XLVI.

Hic quatuor præſtanda ſunt. Primo ſumma maximi & medij debet eſſe quadratus, ideo ſtatuitur 16 Q. & poni poterat quilibet alius quadratorum numerus quadratus. Quia verò ex duobus inæqualibus numeris, patet maiorem illorum excedere ſemiſſem ſummæ ipſorum eodem numero, quo minor deficit ab eodem ſemiſſe, ideo poſito maximo 8 Q. + 2. ſequitur medium eſſe 8 Q. − 2.

Secundò ſumma maximi & minimi debet quoque eſſe quadratus, ſed quia ſumma maximi & minimi, minor eſt ſumma maximi & medij eodem numero quo medius ſuperat minimum, ideo cùm poſita ſit ſumma maximi & medij 16 Q. oportet vtique ſummam maximi & minimi minorem eſſe quàm 16 Q. Quia verò, vt dictum eſt, ipſe maximus maior eſt quàm 8 Q. multò magis ſumma maximi & minimi, maior erit quam 8 Q. quare rectè concludit Diophantus, pro ſumma maximi & minimi ſumendum eſſe quadratum minorem quàm 16 Q. maiorem quàm 8 Q. puta 9 Q. vnde ſi auferatur maximus qui poſitus eſt 8 Q. + 2. reſtat minimus 1 Q. − 2.

Tertiò exceſſus quadrati maximi ſuper quadratum medij ad exceſſum medij ſupra minimum, datam rationem habere debet, putà triplam. Quia verò maximus eſt binomium conſtans ex quadratis & vnitatibus, puta 8 Q. + 2. At minimus eſt reſiduum eiuſdem binomij, puta 8 Q. − 2. Quadratus autem binomij excedit quadratum ſui reſidui, quadruplo plani ſub partibus comprehenſi, vt conſtat ex geneſi quadrati per quartam ſecundi Euclidis, cùm quadrati partium ſint iidem tam in binimio quàm in reſiduo, ideo ſequitur interuallum quadratorum maximi & medij eſſe quadruplum producti ex 8 Q. in 2. nimirum 64 Q. At interuallum medij & minimi eſt 7 Q. cuius triplum 21 Q. æquari deberet 64 Q. Hoc ergo vt per ipſas poſitiones conſequamur, quærendus eſt numerus loco ipſius 2. qui quater ductus in 8. ſeu in 32. ſemel, efficiat 21. hoc habetur diuidendo 21. per 32. eſtque $\frac{21}{32}$. Hunc igitur ſumentes loco ipſius 2. erit maximus 8 Q. + $\frac{21}{32}$. medius 8 Q. − $\frac{21}{32}$. Minimus 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & ſic per ipſas poſitiones tribus poſtulati partibus eſt ſatisfactum.

Quartò reſtat vt ſumma medij & minimi ſit quadratus. Quare 9 Q. − $\frac{21}{16}$ æquandus eſt quadrato, cuius latus ponitur à Diophanto 3 N. − 6. non abſque cautione aliqua. Etenim talis inueniri debet valor Numeri, vt 1 Q. ſit maior quàm $\frac{21}{32}$. quia ſcilicet minimus numerus poſitus eſt 1 Q. − $\frac{21}{32}$. At 1 Q. maior erit quàm $\frac{21}{32}$. ſi ſit maior vnitate, & ſi 1 Q. maior ſit vnitate, erit & 1 N. maior vnitate. Itaque cùm fiat valor Numeri ex quodam quadrato adſciſcente $\frac{21}{16}$. & ſic diuiſo per ſextuplum ſui lateris, vt autem fiat quotiens maior vnitate, oportet diuiſum numerum eſſe maiorem diuiſore, quærendus eſt numerus cuius quadratus adſciſcens $\frac{21}{16}$ ſit maior ſextuplo ipſius numeri. Porro talis eſt 6. & omnis numerus ſuprà 6. Quia enim quadratus ipſius 6. æquatur ſextuplo ſui lateris, & quadratus cuiuslibet numeri ſupra 6. eſt maior ſextuplo ſui lateris, patet addendo $\frac{21}{16}$. ad huiuſmodi quadratum fieri ſemper numerum maiorem ſextuplo lateris. Ideo numeri 9 Q. − $\frac{21}{16}$. latus ritè ponetur 3 N. − 6. vel 3 N. − 7. vel 3 N. − 8. & ſic in infinitum.

Cæterùm eodem prorſus artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres numeros, vt exceſſus quadrati medij ſupra quadratum minimi ad interuallum, quo maximus ſuperat medium datam, habeat rationem. Sed & bini ſumpti faciat quadratum. Sit data ratio tripla.

Ponatur ſumma minimi & medij 4 Q. & eſto medius 2 Q. + 1. minimus 2 Q. − 1. Tum ponatur ſumma minimi & maximi quilibet quadratus maior quàm 4 Q. puta 9 Q. erit ergo maximus 7 Q. + 1. Eſt porro interuallum quadratorum minorum 8 Q. At interuallum maiorum 5 Q. cuius triplum 15 Q. æquari deberet 8 Q. fit autem 8 Q. ex 2 Q. quater in vnitatem. Itaque quærendus eſt numerus loco vnitatis, qui ductus in 2. quater, ſeu qui ductus in 8. ſemel, efficiat 15. is eſt $\frac{15}{8}$. hunc ergo ſumentes loco vnitatis ponemus minimum 2 Q. − $\frac{15}{8}$. medium 2 Q. + $\frac{15}{8}$. maximum 7 Q. $\frac{15}{8}$. Supereſt vt ſumma medij & maximi æquetur quadrato. fit ergo 9 Q. + $\frac{15}{4}$ æqualis quadrato, cuius latus ita fingendum eſt vt fiat valor Numeri maior vnitate, quia minimus poſitus eſt 2 Q. − $\frac{15}{8}$. Quare oportet vt 1 Q. ſit maior quàm $\frac{15}{16}$. quod accidit ſi ſit maior vnitate. Porrò fiet valor numeri ex quodam quadrato multato numero $\frac{15}{4}$. & diuiſo per ſextuplum ſui lateris. Quare vt hac diuiſione prodeat quotiens maior vnitate, oportet 1 Q. − $\frac{15}{4}$ maiorem eſſe quàm 6 N. vnde tandem fit 1 Q. maior quàm 6 N. + $\frac{15}{4}$. qua æquatione reſoluta fit 1 N. maior quàm 7. Igitur numeri 9 Q. + $\frac{15}{4}$ latus fingemus 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ ſuperent 7. Ponatur 3 N. − 10. fiet 1 N. $\frac{77}{48}$. eruntque quæſiti numeri $\frac{3769}{1152}$. $\frac{8089}{1152}$. $\frac{45823}{2304}$. qui ſatisfaciunt poſtulatis, nam bini faciunt quadratos $\frac{5929}{576}$. $\frac{53361}{2304}$. $\frac{62001}{2304}$. quorum latera $\frac{77}{24}$. $\frac{231}{48}$. $\frac{249}{48}$. interuallum verò quadratorum primi & ſecundi eſt $\frac{51226560}{1327104}$. ſeu $\frac{88935}{2304}$. triplus vtique interualli ſecundi & tertij quod eſt $\frac{29645}{2304}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM

LIBER QVINTVS.

QVÆSTIO I.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ιβ. γεωμετρικὴ δὲ ἐστὶν ἀναλογία, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀριθμὸς πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. ζητῶ πρότερον τίς τετράγωνος λείψει μο ιβ ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ τοῦτο ῥᾴδιον, καί ἐστιν ὁ μβ. α δ'. τάσσω οὖν ἕνα τῶν ἄκρων μο μβ. α δ'. τὸν δὲ ἕτερον δυ α. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς ς α ∠'. λοιπόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν ⋔ μο ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔστι δυ α λείψει μο ιβ ἴσον τετραγώνῳ. καὶ ςςοὶ ς α ∠' λείψει μο ιβ. ἴσοι τετραγώνῳ. ἡ τούτων ὑπεροχή ἐστιν δυ α ⋔ ςς ς. α ∠'. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ςς α κατὰ ςς α ⋔ μο ς. α ∠'. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι μο ρξθ ιϛ'. ταῦτα ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι, ςςοῖς ς. α ∠'. λείψει μο ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ρξα ρδ'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο μβ. α δ'. ὁ δὲ δεύτερος ͵βτμϛ ιϛ'. α ∠'. ὁ δὲ τρίτος ιγ. τκα ͵αωιϛ.

INVENIRE treſ numeros in geometrica proportionalitate, vt quiuis eorum detracto dato numero faciat quadratum. Eſto datus 12. Eſt autem geometrica proportionalitas, cùm numerus ſub extremis contentus habet medium pro latere quadrato, Quæro primùm quis quadratus, detractis 12. faciat quadratum, hoc autem facilè fit & eſt $42\frac{1}{4}$. Pono ergo alterum extremorum $42\frac{1}{4}$. alterum 1 Q. Igitur medius erit $6\frac{1}{2}$ N. Reſtat vt horum vterque demptis 12. faciat quadratum. Proinde 1 Q. — 12. æquatur quadrato, & quadrato, & $6\frac{1}{2}$ N. — 12. æquatur quadrato horum interuallum eſt 1 Q. — $6\frac{1}{2}$ N. menſuratio. Metitur 1 N. per 1 N. — $6\frac{1}{2}$. horum interualli ſemiſſis in ſe, facit $\frac{169}{16}$. hoc æquatur minori, ſeu $6\frac{1}{2}$ N. — 12. & fit 1 N. $\frac{161}{104}$. Ad poſitiones. Erit primus $42\frac{1}{4}$. ſecundus $\frac{1046}{104}\cdot\frac{1}{2}$. tertius $\frac{25921}{10816}$.

In V. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

RESTITVTO textu, nihil hîc ſupereſt difficultatis. Quadratum qui detracto 12. relinquat quadratum, inuenit Diophantus per vndecimam ſecundi, vt benè monet Xilander, cùm hoc nihil aliud ſit quàm quærere duos quadratos interuallo 12. differentes. Cæterùm cùm ex duobus numeris quadrato æquandis 1 Q. — 12. & $6\frac{1}{2}$ N. — 12. non conſtet quiſnam ſit maior altero, poteſt eorum interuallum ſtatim 1 Q. — $6\frac{1}{2}$ N. vt fecit Diophantus, vel etiam $6\frac{1}{2}$ N. — 1 Q. ſupponendo ſcilicet $6\frac{1}{2}$ N. — 12. eſſe maiorem, & eadem nihilominus inuenietur ſolutio. Nam metientes erunt $6\frac{1}{2}$ — 1 N. & 1 N. quorum ſummæ ſemiſſis quadratus $\frac{169}{16}$ æquatur maiori, putà $6\frac{1}{2}$ N. — 12. vt prius. Hinc etiam facilè Canonem fabricabimur.

Sume pro primo quæſitorum, quemlibet quadratum, qui detracto dato numero quadratum relinquat. Huius quadranti adde datum numerum, fiet ſecundus. Hunc diuide per latus primi, orietur latus tertij.

Sic ponendo primum 42 $\frac{1}{4}$ cum Diophanto, cùm eius quadrans ſit 10 $\frac{9}{16}$. & addendo 12. fiat 22. $\frac{9}{16}$ ſeu $\frac{361}{16}$. tantus erit ſecundus. Quo diuiſo per 6 $\frac{1}{2}$. quod eſt latus primi, fit latus tertij $\frac{361}{104}$. & ipſe tertius $\frac{130321}{10816}$. Diophantus loco $\frac{361}{16}$ poſuit ſecundum more ſuo $\frac{2346}{104}$ $\frac{1}{2}$ exprimens eum per partes à numero 104. denominatas.

QVÆSTIO II.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quilibet ipſorum adſumens datum numerum, faciat quadratum. Eſto datus 20. Rurſus quæro quis quadratus adſcito 20. faciat quadratum; eſt autem 16. Pono ergo alterum extremorum 16. alterum verò 1 Q. Igitur medius erit 4 N. Proinde ob ea quæ in præcedente dicta ſunt, reſtat 4 N. + 20. æquari quadrato, & 1 Q. + 20. æquari quadrato, & eſt horum interuallum 1 Q. − 4 N. Menſuratio metitur 1 N. per 1 N. − 4. horum interualli ſemiſſis in ſe facit 4. æqualem minori ſeu 4. N. + 20. Quod eſt abſurdum. Oporteret enim 4 maiorem eſſe quam 20. ſed vnitates 4. ſunt quadrans de 16. Porrò 16. non eſt caſu oblatus. Sed eſt quadratus qui adſciſcens 20. facit quadratum. Eò igitur deuentum eſt vt quæratur quadratus, cuius quadrans ſit maior quàm 20. & adſumens 20. faciat quadratum. Vtique quadratus hic maior erit quàm 80. At 81. eſt quadratus maior quàm 80. Ergo ſi latus quadrati quem quærimus ſtatuimus 1 N. + 9. erit ipſe quadratus 1 Q. + 18 N. + 81. hunc oportet additis 20. facere quadratum. Proinde 1 Q. + 18 N. + 101. æquantur quadrato. Eſto quadrato à latere 1 N. − 11. Erit ergo quadratus 1 Q. + 121. − 22 N. Hæc æquantur 1 Q. + 18 N. + 101. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erat autem quæſiti quadrati latus 1 N. + 9. Erit ergo quadratus 90 $\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio proponebatur, & ſtatuo primum 90 $\frac{1}{4}$. tertium 1 Q. medius ergo erit 9 $\frac{1}{2}$ N. & eo ventum eſt vt quæram quo pacto & 1 Q. + 20. & 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. æquentur quadrato. Interualli ſemiſſis in ſe facit $\frac{361}{16}$ quod æquatur minori, hoc eſt 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. & fit 1 N. $\frac{41}{152}$. Ad poſitiones. Erit primus 90 $\frac{1}{4}$. ſecundus $\frac{389}{152}$ $\frac{1}{2}$. tertius $\frac{1681}{23104}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὲ τὸν κ̄. πάλιν ζητῶ τίς τετράγωνος προσλαβὼν μο κ̄. ποιεῖ τετράγωνον, ἔστι δὲ ὁ ις̄. τάσσω τοίνυν ἕνα τῶν ἄκρων μο ις̄. τὸν δὲ ἕτερον τῶν ἄκρων δυ ᾱ. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς δ̄. καὶ κατὰ τὴν προτέραν λοιπὸν γίνεται ζητεῖν ςς δ̄ μο κ̄. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ δυ ᾱ. μο κ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ δυ ᾱ. λείψει ςς δ̄. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ς ᾱ. κατὰ ς ᾱ. λείψει μο δ̄. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ποιεῖ μο δ̄. ἴσας τῷ ἐλάσσονι ςς δ̄. μο κ̄. ὅπερ ἄτοπον. δεῖ γὰρ τέσσαρας μονάδας μὴ ἐλάσσονας εἶναι μο κ̄. ἀλλ᾽ αἱ μο δ̄. τέταρτόν εἰσι τῶν ις̄. αἱ δὲ μο ις̄. οὐκ εἰσὶν αἱ τυχοῦσαι. ἀλλ᾽ ὁ τετράγωνός ἐστιν ὁ προσλαβὼν μο κ̄. καὶ ποιῶν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος ἔχει μέρος τέταρτον, ὃ μεῖζόν ἐστι μο κ̄. προσλαβὼν δὲ μο κ̄. ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται μείζων μο π̄. ἔστι δὲ ὁ πᾱ τετράγωνος μείζων π̄. ἐὰν ἄρα τὴν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰν κατασκευάσωμεν ἀπὸ ς ᾱ. μο θ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ ᾱ. ςς ιη̄. μο πᾱ. ταῦτα μετὰ μο κ̄. ὀφείλει γίνεσθαι τετράγωνος. ἔστιν ἄρα δυ ᾱ. ςς ιη̄. μο ρᾱ. ἴσοι τετραγώνῳ ἔστω ἀπὸ πλευρᾶς ς ᾱ. λείψει μο ια̅. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυ ᾱ. μο ρκᾱ. λείψει ςς κβ̄. ταῦτα ἴσα δυ ᾱ. ςς ιη̄. μο ρᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς μονάδος ἡμίσεος. ἦν δὲ ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰ ς ᾱ. μο θ̄. ἔσται ἄρα ὁ τετράγωνος μο ϙ̄. ᾱ δ˜. νῦν ἀνατρέχω ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω πρῶτον τῶν ἄκρων μο ϙ̄. ᾱ δ˜. τὸν δὲ τρίτον δυ ᾱ. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς θ˜. ᾱ β˜. καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ζητεῖν δυ ᾱ. μο κ̄. ἴσας τετραγώνῳ. καὶ ςς θ˜. ᾱ β˜. μο κ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ δυ ᾱ. λείψει ςς θ˜. ᾱ β˜. μετρεῖ ς ᾱ κατὰ ς ᾱ. λείψει μο θ˜. ᾱ β˜. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτό ἐστι τξᾱ ις˜. ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι ςς θ˜. ᾱ β˜. μο κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μᾱ ρνβ˜. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϙ˜ ᾱ δ˜. ὁ δεύτερος τπθ̄. ρνβ˜. ᾱ β˜. ὁ τρίτος ᾳχπᾱ β˜. τρδ˜.

IN QVAESTIONEM II.

IN prima operatione occurrunt quadrato æquandi 4 N. + 20. & 1 Q. + 20. ſed explicari non poteſt huiuſmodi æquatio, quia horum interuallum eſt 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 4 quorum interuallum 4. cuius ſemiſſis quadratus 4. æquari debet minori, putà 4 N. + 20. quod eſt impoſſibile, quia 4. non eſt maior quàm 20. Conſiderat ergo Diophantus vnde 4. prouenerit, eſt autem quadratus ſemiſſis numeri Numerorum 4. pro ſecundo poſiti. At ſecundus ſtatuitur numerus Numerorum qui latus eſt quadrati pro primo poſiti, quia enim primus poſitus eſt 16. fit ſecundus
11. octaui. 4. N. Quoniam ergo quadratus ſemiſſis cuiuſlibet numeri, eſt quadrans quadrati totius numeri, eò quod quadrati ſunt in ratione duplicata laterum, rectè concludit Diophantus quadratum 4. eſſe quadrantem quadrati 16. Quare eò deuentum eſt, vt loco 16. ſtatuamus pro primo aliquem alium quadratum, qui adſcito 20. faciat quadratum, & cuius quadrans ſit maior quàm 20. Reliqua plana ſunt, nec maiore explicatione indigent. Sed ex ipſa operatione talis Canon elici poteſt.

Sume pro primo quemlibet quadratum, qui adſcito dato numero quadratum faciat, & cuius quadrans excedat datum numerum. Ab huius quadrante aufer datum numerum, relinquetur ſecundus, quem diuide per latus primi, orietur latus tertij.

QVÆSTIO III.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσθεῖναι τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ τὸν ε̅. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς. ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ὃν μὲν ἀπὸ ςοῦ α̅. μο γ̅. ὃν δὲ ἀπὸ ςοῦ μο δ̅ καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυ α̅ ςς ς̅. μο θ̅. ὃς δὲ δυ α̅. ςς η̅. μο ις̅. ἀφαιρῶ ἀπὸ ἑκάστου μο ε̅. καὶ τάσσω ὃν μὲν δυ α̅. ςς ς̅. μο δ̅. ὃν δὲ δυ α̅. ςς η̅. μο ια̅. τὸν δὲ τρίτον τὸν συναμφοτέρων δὶς παρὰ μονάδα, τουτέστι δυ δ̅. ςς κη̅. μο κθ̅. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον μετὰ μο ε̅. ποιεῖν τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα δ̅. ςοὶ κη̅. μο λδ̅. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β̅. λείψει μο ς̅. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ δ̅. μο λς̅. λείψει ςς κδ̅. ἴσαι δυνάμεσι δ̅. ςοῖς κη̅. μο λδ̅. καὶ γίνεται ὁ ςὸς μο α̅ κςων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,βωξα κςων. ὁ δὲ δεύτερος ,ζχμε κςων. ὁ δὲ τρίτος β. τλς κςων.

DATO numero apponere tres numeros, vt quilibet ipſorum, & qui à binis producitur quibuſuis datum adſumens numerum, faciat quadratum. Datus eſto 5. Quoniam habemus in poriſmatibus; ſi duo ſint numeri, quorum tam vterque, quam productus eorum multiplicatione eodem dato numero adſcito faciat quadratum, oriuntur à duobus quadratis continenter proximis. Expono duos huiuſmodi quadratos, alterum à latere 1 N. + 3. alterum à latere 1 N. + 4. & fiunt quadrati, alter quidem 1 Q. + 6 N. + 9. alter verò 1 Q. + 8 N. + 16. Aufero ab vtroque 5. & ſtatuo alterum 1 Q. + 6 N. + 4. alterum 1 Q. + 8 N. + 11. tertium autem duplum ſummæ horum dempta vnitate, hoc eſt 4 Q. + 28 N. + 29. Reſtat ergo vt & hic adſumpto 5. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 28 N. + 34. æquantur quadrato, à latere ſcilicet 2 N. + 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 28 N. + 34. & fit 1 N. $\frac{1}{26}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{2861}{676}$. ſecundus $\frac{7645}{676}$. tertius $\frac{20336}{676}$.

IN QVAESTIONEM III.

PORISMA quod aſſumit Diophantus, vniuerſalius propoſitum, demonſtrauimus propoſitione decima tertia libri ſecundi poriſmatum. Nam propoſitio illa hic facilè applicatur, ſi quod ibi vniuerſaliter demonſtratur de quibuſcumque quadratis, adaptetur quadratis continenter proximis. Etenim cùm laterum interuallum ſit vnitas, quæ numeros quos diuidit non immutat, patet quadratos multatos dato numero, vnà cum duplo ſummæ illorum, vnitate multato, præſtare quod ait Diophantus, & reliqua plana ſunt.

Porrò vſus erit huius poriſmatis, quare demonſtratum eſt loco citato, ſi proponatur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres numeros, vt quem bini producunt adſcito dato numero quadratum faciat, ſed & quilibet in eundem aliquem numerum ductus, & aſſumens eundem datum numerum, fiat quadratus.

Datus eſto 5. & quilibet ductus in 2. & adſumens eundem 5. fiat quadratus. Exponantur duo quadrati, quorum interuallum ſit 2. ſintque eorum latera 1 N. + 3. & 1 N. + 5. erunt ipſi quadrati 1 Q. + 6 N. + 9. & 1 Q. + 10 N. + 25. aufer ab vtroque 5. & reſidua diuide per interuallum laterum 2. fient ½ Q + 3 N + 2. & ½ Q. + 5 N. + 10. primus & ſecundus quæſitorum, tertius autem erit duplum ſummæ illorum multatum eodem interuallo laterum 2. putà 2 Q. + 16 N. + 22. Reſtat vt & huius duplum adſcito 5. quadratum faciat. Igitur 4 Q. + 32 N. + 49. æquatur quadrato, eſto latus eius 2 N. − 17. fiet 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{302}{25}$. $\frac{622}{25}$. $\frac{1798}{25}$. qui ſatisfaciunt propoſito.

OBSERVATIO D. P. F.

Ex hac propoſitione facilè deducetur ſequens quæſtio. Inuenire 4. numeros eâ conditione, vt quod ſub binis producitur, adſcito dato numero faciat quadratum. Inueniantur tres quæſtioni ſatisfacientes ita vt ſinguli dato numero aucti conficiant quadratos iuxta hanc propoſitionem. Ponatur quartus inueniendus eſſe 1 N. + 5 orietur triplicata æqualitas cuius ſolutio noſtræ methodi beneficio erit in promptu. Vide adnotata ad 24. quæſtionem lib. 6. ſoluetur itaque quæſtio quam propoſuit Bachetus ad quæſtionem 12. lib. 31. per hanc methodum quæ cum multò ſit generalior, hoc præterea amplius habet quam methodus Bacheti quod tres priores numeri aucti dato numero conficiant quadratos in noſtrâ ſolutione. An verò ita ſolui poſſit quæſtio vt etiam quartus auctus dato numero conficiat quadratum, Hoc ſanè hactenus ignoramus. Inquiratur itaque vlterius.

QVÆSTIO IV.

DATO numero, inuenire alios tres, vt quiuis ipſorum, & qui ex binis quibuſque fit, multatus dato numero faciat quadratum. Eſto datus 6. Rurſum ſimiliter expono duos quadratos continenter proximos, alterum 1 Q. alterum 1 Q. + 2 N. + 1. & his adiicio datum numerum, & ſtatuo primum 1 Q. + 6. ſecundum 1 Q. + 2 N. + 7. tertium ſimiliter duplum amborum dempta vnitate, hoc eſt 4 Q. + 4 N. + 25. Reſtat vt & is detracto 6. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 4 N. + 19. æquantur quadrato, eſto latus eius 2 N. − 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 4 N. + 19. & fit 1 N. $\frac{17}{28}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{4993}{784}$. ſecundus $\frac{6729}{784}$. tertius $\frac{22660}{784}$.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἑκάτερός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° ς̄. πάλιν δὴ ὁμοίως ἐκτίθεμαι δύο τετραγώνους τοὺς κατὰ τὸ ἑξῆς ὄντας, ὃν μὲν δυ α̅. ὃν δὲ δυ α̅. ςς β̅. μ° α̅. καὶ τούτοις προστίθημι τὸν δοθέντα, καὶ τάσσω μὲν τὸν πρῶτον δυ α̅ μ° ς̄. τὸν δεύτερον δυ α̅ ςς β̅ μ° ζ̄. τὸν δὲ τρίτον ὁμοίως τοῦ διπλασίονος συναμφοτέρου παρὰ μονάδα α̅. τουτέστι δυ δ̅. ςς δ̅. μ° κε̅. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον λείψαντα μ° ς̄. ποιεῖν τετράγωνον. δυ ἄρα δ̅. ςς δ̅. μ° ιθ̅. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β̅. ⋔ μ° ς̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ δ̅ μ° λς̅. λείψει ςς κδ̅. ἴσον δυ δ̅. ςς δ̅. μ° ιθ̅. καὶ γίνεται ὁ ς ιζ κη^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,δϡϟγ. ψπδ. ὁ δὲ δεύτερος ,ςψκθ. ψπδ. ὁ δὲ τρίτος β̅. ,βχξ. ψπδ.

IN QVAESTIONEM IV.

PORISMA quoque quod hîc aſſumitur, demonſtratum eſt à nobis propoſitione decimaquarta libri ſecundi poriſmatum, ſed vniuerſalius, cuius etiam vſus ampliari poteſt, eodem prorſus modo, quo ad præcedentem docuimus id fieri poſſe in ſimili poriſmate.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν. ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τάσσομεν οὖν τῶν ἐκκειμένων τετραγώνων. ἕν μὲν δυ ᾱ. ςς β̄. μο ᾱ. ὃν δὲ δυ ᾱ. ςς δ̄. μο δ̄. τὸν δὲ τρίτον δυ δ̄. ςς ιβ̄. μο ιβ̄. λοιπὸν δεῖ κατασκευάσαι τὸν τρίτον, τουτέστι δυ δ̄. ἀριθμοὺς ιβ̄. μο ιβ̄. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ ἐκείνου τὸ τέταρτον γίνεται δύναμις ᾱ. ἀριθμοὶ γ̄. μο γ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςο ᾱ. ⋔ μο γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος. δυ ᾱ. μο θ̄. ⋔ ςς ς̄. ἴσαι δυ ᾱ. ςςοὶ γ̄. μο γ̄. καὶ γίνεται ὁ ςο μο β̄ γων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε̄ θων, ὁ δὲ τρίτος ρϟς̄ θων.

INVENIRE tres quadratos, vt quem bini faciunt planum, ſiue adſciſcat amborum ſummam, ſiue reliquum, faciat quadratum. Habemus rurſum in poriſmatibus. Quod duobus quibúſque quadratis continenter proximis adinueniri poreſt alius numerus, qui cum ſit ſummæ illorum duplus, & binario amplior, tres facit numeros, quorum bini quem producunt, ſiue adſciſcat amborum ſummam, ſiue reliquum, faciat quadratum. Statuo igitur trium quæſitorum quadratorum, alterum 1 Q. + 2 N. + 1. alterum 1 Q. + 4 N. + 4. tertium 4 Q. + 12 N. + 12. Reſtat vt tertiũ, nempè 4 Q. + 12 N. + 12. æquemus quadrato, ſed & huius quadrans fit 1 Q. + 3 N. + 3. æqualis quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 3. eſt ergo quadratus ipſe 1 Q. + 9 − 6 N. æqualis 1 Q. + 3 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{25}{9}$. ſecundus $\frac{64}{9}$. tertius $\frac{196}{9}$.

IN QVAESTIONEM V.

Hic codex manu exaratus poriſmatis explicationem ſic exhibet. ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς, προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμός, ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, ὅστις τὸν ἑκκαίδεκα μείζονα, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπόν, ποιεῖ τετράγωνον. Vnde nos, tanquam ſubreptitia, expunximus verba illa, ὅστις τὸν ἑκκαίδεκα μείζονα. Ipſum verò poriſma demonſtrauimus vniuerſaliſſimè propoſitione decimaſexta libri ſecundi poriſmatum. Itaque nihil hîc ſupereſt difficultatis.

QVAESTIO VI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν λείψας δυάδα ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπόν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπὶ ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ πρὸ τούτου εὑρεθέντων ἀριθμῶν, προσθῶ δυάδα, οἱ γινόμενοι ποιοῦσι τὸ προκείμενον. τὸ δὴ γινόμενον τοιοῦτόν ἐστι. τάσσομεν γὰρ ἕνα τῶν ζητουμένων δυ ᾱ. μο β̄. τὸν δὲ ἕτερον δυ ᾱ. ςςοὺς β̄. μο γ̄. τὸν δὲ τρίτον δυ δ̄. ςςοὺς δ̄. μο ς̄. καὶ μένει τὰ ἐπιταχθέντα. λοιπόν ἐστι δυ δ̄. ςςοὺς δ̄. μο δ̄. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον, ὥστε καὶ δύναμιν ᾱ. ςὸν ᾱ. μο ᾱ. ἴσους εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ

INVENIRE tres numeros, vt quiuis eorum binario multatus faciat quadratum, & qui fit ex binorum mutuo ductu, ſiue amborum ſummam abiiciat, ſiue reliquum, fiat quadratus. Si cuiuis ſuperiore quæſtione inuentorum numerorum adiicio 2. ſic confecti ſatisfaciunt poſtulatis. Quod itaque dicitur tale eſt. Ponimus vnum eorum qui quæruntur 1 Q. + 2. Alterum 1 Q. + 2 N. + 3. tertium 4 Q. + 4 N. + 6. & fit quod iubetur. Reſtat vt 4 Q. + 4 N. + 4. æquetur quadrato. Proinde & quadrans eius æquatur quadrato, nempè 1 Q. + 1 N. + 1. Quod ſi latus quadrati ponamus à differentia, erit

1 N

1 N − 2. fit quadratus 1 Q + 4 − 4 N. æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{19}{25}$. ſecundus $\frac{114}{25}$. tertius $\frac{246}{25}$. & euidens eſt demonſtratio.

διαφορᾶς. ἔστω ἀπὸ ϛ^{ος} ᾱ λ μ^{ο} β̄. γίνεται ὁ τετράγωνος: δ^{υ} ᾱ. μ^{ο} δ̄. λ ϛϛ δ̄. ἴσος δ^{υ} ᾱ. ϛ^{ῷ} ᾱ. μ^{ο} ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} γ̄ ^{ε}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιθ̄ ^{κε}. ὁ δεύτερος ριδ̄ ^{κε}. ὁ δὲ τρίτος σμϛ̄ ^{κε}. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM VI.

IN huius quæſtionis propoſitione, habet codex manuſcriptus, ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε τὸν ὅλον, ποιῇ τετράγωνον, pro quo repoſuimus, ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν, &c.

Porrò duplicem modum tangit Diophantus, ſoluendi quæſtionem iſtam. Primus eſt addendo binarium tribus numeris præcedentem ſoluentibus, vbi nulla opus eſt operatione Algebræ. Secundus eſt per operationem Algebræ ſupponendo poriſma quod oſtendimus propoſitione decima ſeptima libri ſecundi. Nimirum. Si ſumantur duo quadrati, itemque duplum ſummæ illorum & quadrati interualli laterum, fient tres numeri, quibus ſi addatur ſigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producent mutuo ductu, is, ſiue multetur amborum ſumma, ſiue reliquo, fiet quadratus. Vnde ſanè operatio Diophanti manifeſtè pendet, ſed & primus modus hinc ſuam mutuatur demonſtrationem, vt luce clarius eſt.

Huc pertinet quæſtio quam tradidit Vieta Zetetico duodecimo libri quinti. Quamuis eam imperfectè tractauerit, omittens alteram illius partem, eò quod Poriſmatum quæ demonſtrauimus propoſitione decimaſexta, & decimaſeptima libri ſecundi perfectam cognitionem non habuit. Nos vniuerſaliſſimè proponemus hoc pacto.

Inueniantur tres quadrati, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, additus ei qui fit ex quadrato dato, ſiue in amborum ſummam, ſiue in reliquum, conficiat quadratum.

Datus quadratus eſto 9.

Ponatur primi latus 1 N. ſecundi 1 N. + 3. erunt quadrati 1 Q & 1 Q. + 6 N. + 9. & ſit tertius duplum primi & ſecundi, & quadrati interualli laterum, ſeu ipſius 9 puta 4 Q. + 12 N. + 36. Conſtat ergo per decimamſextam ſecundi poriſmatum productum ex binorum mutuo ductu adſcito producto ex quadrato 9. ſiue in amborum ſummam, ſiue in reliquum, facere quadratum. Reſtat vt tertius ſit quadratus. Ergo 4 Q + 12 N. + 36. æquandus eſt quadrato, cuius latus eſto 2 N. + 4. fiet 1 N. 5. Erunt ergo quæſiti quadrati 25. 64. 196. & ſatisfaciunt propoſito.

Ruſus.

Inueniantur tres numeri, vt quiuis eorum multatus duplo dati quadrati, faciat quadratum; & productus ex binorum mutuo ductu, detracto eo qui fit ex dato quadrato, ſiue in ſummam amborum, ſiue in reliquum, relinquat quadratum.

Datus quadratus eſto 9.

Si tribus per præcedentem inuentis quadratis addas duplum dati quadrati, puta 18. fient quæſiti numeri 43. 82. 214. qui ſatisfaciunt poſtulatis, vt conſtat ex decimaſeptima ſecundi poriſmatum. Itaque non ſatis feliciter quæſtiones iſtas explicauit Franciſcus Vieta loco citato, cùm numerorum quos inuenit proprietates penitus perſpectas non habuerit.

QVÆSTIO VII.

Lemma ad id quod ſequitur.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione addito vtriuſque quadrato, ſummam faciat quadratum. Eſto primus 1 N. ſecundus vnitatum quotlibet, puta 1. & eſt productus eorum multiplicatione 1 N. ſumma verò quadratorum eſt 1 Q. + 1 adde 1 N. fit 1 Q. + 1 N. + 1 æqualis quadrato. Eſto latus eius 1 N. − 2. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τοὺς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετραγώνους τὴν σύνθεσιν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ πρῶτος ϛ^{ος} ᾱ. ὁ δεύτερος μ^{ο} ὅσων θέλεις. ἔστω μ^{ο} ᾱ. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ αὐτῶν ϛ^{ος} ᾱ. ὁ δὲ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ποιεῖ δ^{υ} ᾱ. μ^{ο} ᾱ. μετὰ τοῦ ϛ^{ου} ᾱ. γίνεται δ^{υ} ᾱ. ϛ^{ος} ᾱ. μ^{ο} ᾱ. ἴσοι τετραγώνῳ. ἔστω ἡ τοῦ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ^{ος} ᾱ. λείψει μ^{ο} β̄. γίνεται ὁ τετράγωνος δ^{υ}

α̅. μ° δ̅. λείψει ς̅ δ̅. ἴσον Δ^υ α̅. καὶ γίνεται ὁ ς̅ γ̅ ε^×. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̅ ε^×. ὁ δὲ δεύτερος ε̅ ε^×. καὶ ἀρθέντος τοῦ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° γ̅. ὁ δεύτερος ε̅. καὶ ποιοῦσι τὸ προκείμενον. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον. ὁσάκις δὲ ἐὰν θέλῃς τὸν γ̅. καὶ τὸν ε̅. ποιήσουσιν οἱ γινόμενοι ἀριθμοὶ τὸ ἐπίταγμα.

æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad poſitiones. erit primus $\frac{3}{5}$. ſecundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, erit primus 3. ſecundus 5. & poſtulatis reſpondent, nam productus eorum multiplicatione cum ſumma quadratorum, facit quadratum. Quotieſcunque autem voles ternarium & quinarium ſumere, facient numeri qui naſcuntur, id quod iuberis.

IN QVAESTIONEM VII.

Hic triplex varietas contingere poteſt. Primo enim poſito altero 1 N. alter ſtatui poteſt quotlibet vnitatum. Deinde primus etiam poni poteſt quilibet Numerorum numerus. Denique latus numeri quadrato æquandi diuerſimodè fingi poteſt.

Reſtat probandum quod ait Diophantus, nimirum. Si dentur duo numeri quæſtioni ſatisfacientes, duo alij quicunque in eadem ratione ſumpti, ſoluent quæſtionem. Sint A B propoſitum implentes, ſint videlicet eorum quadrati C D. & productus multiplicationis E. & ſumma C E D. ſit F. quadratus numerus. Tum ſumantur G H in ratione ipſorum A B. & ſint eorum quadrati K M, & productus L, & ipſorum K L M. ſumma ſit N. Dico N. eſſe quadratum. Quia enim vt conſtat ex conſtructione vndecimæ octaui eſt C ad E. & E ad D. ſicut A ad B, & ſimiliter eſt K ad L. & L ad M. ſicut G ad H. cùm ſit A ad B. vt G ad H ex hypotheſi, erit & C ad E. & E ad D, ſicut

A 3. B 5. F. 49.
C 9. E 15. D 25.

G 6. H 10. N 196.
K 36. L 60. M 100.

12. ſeptimi. K ad L & L ad M. & permutando erit C ad K. vt E ad L. & vt D ad M. ¹ Quare & antecedentium ſumma, puta F ad ſummam conſequentium, puta ad N. eſt vt vnus antecedens C ad vnum conſequentem K. Sed vterque C & K quadratus eſt. Ergo F ad N. rationem habet quadrati ad quadratum.

24. octaui. Ac proinde cùm F ſit quadratus ² & N. quadratus erit. Quod demonſtrandum erat.

Ex ipſa autem operatione formatur huiuſmodi Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum ſui lateris vnitate auctum, duo numeri quicumque in ratione quotientis ad vnitatem, ſatisfacient propoſito.

Cæterùm eadem arte ſoluetur hæc quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum, detracto producto relinquat quadratum.

Eſto primus 1 N. ſecundus 1. fit productus 1 N. ſumma quadratorum 1 Q. + 1. vnde auferendo 1 N. manet 1 Q. + 1 − 1 N. æquandus quadrato. Eſto latus 1 N. − 3. fit 1 N. $\frac{8}{5}$. eſt ergo primus $\frac{8}{5}$ ſecundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, fit primus 8. ſecundus 5. & ſatisfaciunt poſtulatis. Hinc etiam elicietur iſte Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum ſui lateris vnitate multatum, quotiens ad vnitatem habebit rationem quæſitorum numerorum.

Vbi hoc animaduerſione dignum occurrit, ſi ſumantur duo numeri huic quæſtioni ſatisfacientes, maior quoque illorum & eorum interuallum quæſtionem ſoluunt. At minor illorum & interuallum, ſoluunt quæſtionem Diophanti. Contrà, ſi duo numeri ſoluant quæſtionem Diophanti, ſumma ipſorum, & alteruter eorundem, noſtram hanc quæſtionem ſoluunt. Sic ſumptis 8. & 5. noſtram quæſtionem ſoluentibus (nam ſumma quadratorum detracto producto, facit quadratum 49.) maior 8. & interuallum 3. eandem ſoluunt quæſtionem; nam rurſus ſumma quadratorum detracto producto facit 49. At minor 5. & interuallum 3. ſoluunt quæſtionem Diophanti, cùm ſumma quadratorum adſumpto producto, rurſus faciat 49. Huius rei demonſtratio, ab huiuſmodi theoremate pendet.

Si numerus ſecetur in duas partes, quadrati partium, vnà cum producto multiplicationis earundem, æquantur quadratis à toto & à qualibet parte, multatis producto multiplicationis ex toto in eandem partem.

A . . . . . B . . . C

Sit numerus A C. ſectus in A B B C. dico quadratos ex A B. B C. vnà cum producto ex A B in B C. æquari quadratis ex A C. A B multatis producto ex A C in A B. Itemque quadratis ex A C. B C. multatis producto ex A C in B C. Quia enim quadratus ex

4. ſecundi. A C. ¹ æquatur quadratis ipſorum A B. B C. & duplo producti ex A B. in B C. addito quadrato ex A B, erit ſumma quadratorum ex A C. A B. æqualis quadrato ex A B. bis, ex B C ſemel, & duplo

3. ſecundi. producti ex A B in B C. At quadratus ex A B cum producto ex A B in B C. ² æquatur producto ex A C in A B. Quare auferendo à ſumma quadratorum ex A C.

ſit A B. productum ex A C in A B, ſeu quod idem eſt, quadratum ex A B & productum ex A B in B C, remanent quadrati ex A B. B C, vnà cum producto ex A B in B C. Eadem prorſus ratione oſtendemus auferendo à quadratis ex A C.. B C. productum ex A C in B C. remanere quadratos ex A B B C. vnà cum producto ex A C. in B C. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE tria triangula rectangula, quorum areæ ſint æquales. Primùm oportet quærere duos numeros, vt productus eorũ multiplicatione cum ſumma quadratorum faciat quadratũ. Hoc autem ſuprà oſtẽſum eſt, & ſunt 3. & 5. quorum mutuo ductu productus cum ſumma quadratorum facit quadratum, cuius latus eſt 7. Compono ergo tria triangula rectangula à duobus numeris, alterum à 7. & 3. alterum à 7. & 5. & præterea alterum à 7. & à ſumma inuentorum numerorum 3. & 5. hoc eſt à 8. Erunt igitur triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. & ſunt triangula, quorum eadem eſt area 840.

ΕΥΡΕΙΝ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδά. πρότερον δεῖ ζητῆσαι δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ γ. καὶ ε. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν, μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν ζ. συντάσσω τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ἀπό τε τοῦ ζ. καὶ τοῦ γ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τοῦ ε. καὶ ἔτι ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τῆς συνθέσεως τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν τουτέστι γ. καὶ τοῦ ε. τουτέστι η. ἀπὸ ἄρα τοῦ ζ. καὶ τοῦ η. ἔσται οὖν τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ριγ. καὶ ἔστι τὰ τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδὰ ἀπὸ μ° ωμ.

IN QVAESTIONEM VIII.

MAGNA hìc verborum iactura facta erat in textu Diophanti, vt bene animaduertit Xilander, nos eam reſarcire conati ſumus, verba reponentes quæ virgulis incluſa vides. Itaque nil ſupereſt difficultatis, niſi vt demonſtretur trium triangulorum rectangulorum, modo quem tradit Diophantus inuentorum, æquales eſſe areas, quod præſtabimus more noſtro, ſi prius hoc veluti lemma præmiſerimus.

Si duobus quadratis addatur ſigillatim productus ex mutuo laterum ductu, erit compoſitorum eadem ratio, quæ & laterum ipſorum.

Sint quadrati A B. quorum latera C D. ex quorum mutuo ductu fiat G. Dico ſummam duorum [a] A G. ad ſummam duorum G B ſe habere, vt C ad D. etenim vt conſtat ex vndecima octaui, A G B ſunt continuè proportionales in ratione C ad D. Quare cùm ſit A ad G. vt G ad B. erit & componendo ſumma duorum A G ad G. ſicut ſumma duorum G B. ad B. & permutando, erit ſumma duorum A G. ad ſummam duorum G B. ſicut G ad B. hoc eſt ſicut C ad D. Quod erat demonſtrandum.

A 9. G 12. B 16.
C 3. D 4.

Hoc poſito ſint numeri A B præcedenti quæſtioni ſatisfacientes, ſint videlicet eorum quadrati E F. & productus mutuo illorum ductu G. & ſumma ipſorum E F G. ſit quadratus H. cuius latus C. ſumma verò ipſorum A B. ſit D. cuius quadratus K. Tum vt vult Diophantus [b] formetur triangulum à numeris C A. ſit videlicet hypotenuſa L. ſumma quadratorum H E. & ſit baſis M. interuallum eorundem. & ſit cathetus N. duplum producti ex C in A. Similiter formetur triangulum à numeris C B. ſitque hypotenuſa P. ſumma quadratorum H F. At ſit baſis Q. interuallum eorundem ac demum cathetus R ſit duplum producti ex C in B. Ruſus formetur triangulum à numeris C D. ſitque hypotenuſa S. ſumma quadratorum H K. ſit baſis T. interuallum eorundem. & ſit cathetus V duplum producti ex C. in D. Dico tria triangula L M N. P Q R. S T V. præſtare quod requiritur, hoc eſt areas eorum æquales eſſe, ſeu productos ex M in N. ex Q. in R. & ex T in V æquales eſſe, ſic enim ſequitur areas æquales eſſe [c], cùm ſint ſemiſſes huiuſmodi productorum. Itaque quoniam idem C ductus bis in ipſos A B D. producit ipſos N R V. [d] erit N ad R. vt A ad B. & rurſus R ad V. vt B ad D. Quoniam verò M eſt interuallum quadratorum H E. & H eſt ſumma ipſorum E F G. patet M æquari ipſis F G ſimul. Rurſus quia Q. eſt interuallum quadratorum H F. patet Q. æquari ipſis E G. Eſt autem ſumma duorum E G ad ſummam duorum G F. ſicut A ad B per Lemma aſſumptum. Igitur eſt Q ad M. ſicut A ad B. Cùm ergo oſtenſum ſit eſſe N ad R. vt A ad B. patet eſſe N ad R. vt Q ad M. Quare [e] planus ſub extremis N M. æquatur plano ſub mediis R Q. ac proinde triangulorum L M N. P Q R. æquales ſunt areæ. Præterea cùm oſtenſum ſit Q. æquari duobus E G. quadrato

G 15.
H 49. E 9. F 25. K 64.
C 7. A 3. B 5. D 8.
L 58. M 40. N 42.
P 74. Q 24. R 70.
S 113. T 15. V 112.

[b] 5. 3. poriſm.
[d] defin. 3 3. poriſ.
17. ſeptimi.
[e] 19. ſeptimi.

3. ſecundi. ſcilicet ipſius A. & producto ex A in B. [s] æquabitur idem Q. producto ex ſumma duorum A B, hoc eſt ex D in A. Quoniam verò K eſt quadratus ſummæ ipſorum A B [t]. patet K æquari ipſis E F. & du-
4. ſecundi. plo G. Quare ex K auferendo H qui continet ipſos E F G ſemel, patet reliquum T æqualem eſſe ipſi G. ac proinde fieri ex A in B. Itaque cùm idem A ductus in B. & in D. producat T & Q. erit T ad Q. vt B ad D. Sed vt B ad D. ſic oſtenſum eſt eſſe R ad V. Igitur vt R ad V. ſic T vt
t. 19. ſeptimi. ad Q. Quare [t] rurſus qui continetur ſub extremis R Q. æquatur contento ſub mediis V T. vnde ſequitur triangulorum P Q R. S T V æquales eſſe areas, ac per conſequens tria expoſita triangula eandem prorſus aream habere. Quod erat demonſtrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm vero inueniri poſſunt 4. aut etiam plura in infinitum triangula æqualis areæ nihil videtur obſtare quo minus quæſtio ſit poſsibilis. inquiratur itaque vlterius.

Nos hoc problema conſtruximus imò & data qualibet trianguli areâ infinita triangula eiuſdem areæ exhibemus v.g. data areâ 6. trianguli 3. 4. 5. en aliud triangulum eiuſdem areæ $\frac{7}{10}$ $\frac{120}{7}$ $\frac{1201}{70}$. *aut ſi placet eadem denominatio* $\frac{49}{70}$ $\frac{1200}{70}$ $\frac{1201}{70}$.

Perpetua & conſtans methodus hæc eſt. Exponatur quodlibet triangulum cuius hypothenuſa Z. baſis B. perpendiculum D. ab eo ſic formatur aliud triangulum diſsimile eiuſdem areæ, nempe formetur abs Z. quadrato & B in D. bis, & planoplana lateribus ſimilia applicentur Z in B. quadratum bis – Z in D. quadratum bis hoc nouum triangulũ habebit aream æqualem areæ præcedentis, ab hoc ſecundo eâdem methodo formetur tertium, à tertio quartum, à quarto quintum & fient triangula in infinitum diſſimilia eiuſdem areæ & ne dubites plura tribus dari poſſe inuentis tribus Diophanti 40. 42. 58. 24. 70. 74. & 15. 112. 113. quartum adiungimus diſsimile eiuſdem tamen areæ. $\frac{1412881}{1189}$ *hypothe.* $\frac{1412880}{1189}$ *baſis.* $\frac{1681}{1189}$ *perpendic.*

Et omnibus in eundem denominatorem ductis fient 4 triangula in integris æqualis areæ quæ ſequuntur.

Primum.	47560.	49938.	68962.
Secundum.	28536.	83230.	87986.
Tertium.	17835.	133168.	134357.
Quartum.	1681.	1412880.	1412881.

Eidemque methodo inuenientur triangula eiuſdem areæ in infinitum, & quæſtio ſequens vltra Diophantæos limites progredietur.

En etiam aliâ methodo triangulum cuius area facit ſextuplum quadrati ſicut 3. 4. 5.

Nempe 2896804. 7216803. 7776485.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. παντὸς δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τετράκις τὸ ἐμβαδὸν ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἔσονται ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσαι, ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενος ἔσται τέσσαρα ἐμβαδὰ τριγώνων, ὧν εἰσὶν αἱ ὑποτείνουσαι. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδά.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus, ſumma trium ſiue addita, ſiue detracta, faciat quadratum. Quoniam volumus vt quadratus primi, ſumma trium ſiue addita, ſiue dempta, faciat quadratum. In omni autem triangulo rectangulo, quadratus hypotenuſæ, ſiue adiecto quadruplo areæ, ſiue detracto, facit quadratũ. Erunt vtique tres numeri, hypotenuſæ triangulorum, rectangulorũ at ſumma trium erit quadruplũ areæ triangulorum, quorum hypotenuſæ ſunt ipſi numeri. Eò itaque res redit, vt tria triangula inueniantur, quorum eadem ſit area.

Id autem iam demonſtratum eſt, & ſunt triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. Nunc ad propoſitum ab initio rediens, ſtatuo tres in numeris hypotenuſarum triangulorum, & erit primus 58 N. ſecundus 74 N. tertius 113 N. ſummam verò trium, pono in quadratis quadrupli areæ. Proinde 3360 Q. æquantur 245 N. & fit 1 N. $\frac{7}{96}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{406}{96}$. ſecundus $\frac{518}{96}$. tertius $\frac{791}{96}$.

τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ριγ. νῦν τάσσω ἐλθὼν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμοῖς, τῶν ὑποτεινουσῶν τῶν τριῶν, ὥστε καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ςς νη. ὁ δὲ δεύτερος ςς οδ. ὁ τρίτος ςς ριγ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἐν δυνάμεσι τοῦ τετραπλασίονος τοῦ ἐμβαδοῦ. δυνάμεις ἄρα ͵γτξ. ἴσαι ςς οῖς σμε. καὶ γίνεται ὁ ς ζ. ϟϛων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος υϛ ϟϛων. ὁ δὲ δεύτερος φιη ϟϛων. ὁ δὲ τρίτος ψϟα. ϟϛων.

IN QVAESTIONEM IX.

Ex dictis ad præcedentem facilis redditur hæc quæſtio. Quod aſſumitur de quadrato hypotenuſæ trianguli rectanguli, qui aſſumpto vel dempto quadruplo areæ, quadratum facit; iam à nobis demonſtratum eſt ad vigeſimam ſecundam tertij, vbi etiam vſurpatur à Diophanto.

OBSERVATIO D. P. F.

Ex ſupradictis patet poſſe nos conſtruere generaliter problema inuenire quotcumque numeros vt vnius cuiuſque quadratus ſumma omnium ſiue addità ſiue detractâ quadratum faciat. Hanc quæſtionem forte Bachetus ignorauit. Diophantum quippè promouiſſet vt ſuprà 31. quæſtione lib. 4. & alijs in locis ſi quæſtionis huius ſolutionem detexiſſet.

QVÆSTIO X.

Datis tribus numeris quadratis, poſſunt inueniri tres numeri, quorum bini quadratos iſtos producant alter in alterum ductus. Nam ſi ſint dati quadrati 4. 9. & 16. & ponamus vnum quæſitorum 1 N. erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{1N}$. alter $\frac{9}{1N}$. Reſtat vt productus ex ſecundo in tertium faciat 26. atqui productus ex ſecundo in tertiũ eſt $\frac{36}{1Q}$. Hoc ergo æquatur 16. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit primus 1 $\frac{1}{2}$. ſecundus 2 $\frac{2}{3}$. tertius 6. ſed vt hoc etiam methodo exponatur. Inueni $\frac{36}{1Q}$. æqualia 16. & omnia per 1 Q. multiplicando fiunt 16 Q. æquales 36. & fit 1 Q. $\frac{36}{16}$. cuius latus $\frac{6}{4}$. atqui 6. fit ex mutuo ductu laterum ipſorum 4. & 9. hoc eſt primi & ſecundi. Denominator verò 4. eſt latus alterius quadrati 16. Quamobrem cùm iuſſus fueris tres numeros inuenire, quorum bini mutuo ductu datos quadratos producant, vt 4. 9. 16. ſume productum ex

ΤΡΙΩΝ τετραγώνων ἀποδοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς. ἐὰν γὰρ ὦσιν οἱ δοθέντες τετράγωνοι. ὅ τε δ. καὶ ὁ θ. καὶ ὁ ις. καὶ τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων ς α. ἔσονται οἱ λοιποὶ δύο, ὁ μὲν δ ςου. ὁ δὲ θ ςου. καὶ λοιπόν ἐστι τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου, ποιεῖν μο ις. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου ἐστὶ λϛ δυ. ἴσος μο ις. καὶ γίνεται ὁ ς μο α. α ϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος α. α ϛ. ὁ δὲ δεύτερος β. α ϛ. α. ὁ τρίτος ϛ. ἵνα δὲ καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ. εὗρον λϛ δυ. ἴσα μονάσι ις. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν γίνονται δυνάμεις ις. ἴσαι μο λϛ. καὶ γίνεται ἡ δύναμις λϛ ιϛων. ἡ πλευρὰ ὁ ϛ δων. ἀλλὰ τὰ ϛ. τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δ καὶ τοῦ θ. τουτέστι τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου τὸ δὲ μόριον τουτέστι τὰ δ. πλευρά ἐστι τοῦ ις τετραγώνου. ὅταν οὖν σοι προβληθῇ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. οἷον τὸν δ. καὶ τὸν θ. καὶ τὸν ις. ποίει τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δ. καὶ τοῦ θ. γίνεται ϛ. μέριζε ταῦτα παρὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ις τετραγώνου, γίνεται ὁ ς ϛ δων. καὶ

πάλιν τὸν δ. τετράγωνον παρὰ τὸν ϛ δ^x. γίνονται μ° ιϛ ϛ^x. καὶ πάλιν τὸν θ. τετράγωνον. παρὰ τὸν ϛ δ^x. γίνονται μ° ϛ. ἔσται ἄρα ὁ πρῶτος ϛ δ^x. ὁ δεύτερος ιϛ ϛ^x. ὁ τρίτος μ° ϛ.

lateribus ipſorum 4. & 9. fit 6. hunc diuide per latus alterius quadratus 16. fit 1 N. $\frac{6}{4}$. Rurſus diuide quadratum 4. per $\frac{6}{4}$. fiunt $\frac{16}{6}$. & rurſum diuide quadratum 9. per $\frac{6}{4}$. fiunt 6. erit igitur primus $\frac{6}{4}$. ſecundus $\frac{16}{6}$. tertius 6.

IN QVAESTIONEM X.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & Canon quem tradit ab ea depromitur.

Poſſet tamen breuius & facilius explicari Canon iſte, hoc pacto.

Numeros quos producunt dati numeri, dum inter ſe bini & bini multiplicantur, diuide per reliquum, quotientum latera quæſitos exhibent numeros.

Vt in exemplo Diophanti productum ex 4. in 9. putà 36. Diuide per reliquum 16. fiet $\frac{9}{4}$. cuius latus $1\frac{1}{2}$. eſt vnus quæſitorum. Rurſus productum ex 4. in 9. putà 64. diuide per reliquum 9. fit $\frac{64}{9}$. cuius latus $2\frac{2}{3}$. eſt ſecundus quæſitorum. Denique productum ex 9. in 16. putà 144. diuide per reliquum 4. fit 36. cuius latus, eſt tertius quæſitorum.

Porrò vniuerſalius etiam proponi poteſt ipſa quæſtio in hunc modum.

Datis tribus numeris, inuenire tres numeros, quorum bini inuicem ducti, datos producant numeros. Oportet autem ſolidum ſub datis numeris contentum eſſe quadratum.

Sint dati 6. 8. 12. Ponatur primus 1 N. ſecundus $\frac{6}{1N}$. tertius $\frac{8}{1N}$. Reſtat vt ex ſecundo in tertium fiat 12. fit autem $\frac{48}{1Q}$ hoe ergo æquatur 12. & fit 1 N. 2. ſunt igitur quæſiti numeri 2. 3. 4.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦμεν πρότερον τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδὰ, καὶ εὑρόντες λαμβάνομεν τοὺς ἀπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τετραγώνους. ἔστι δὲ ὁ μὲν ͵γτξδ. ὁ δὲ ͵ευοϛ. ὁ δὲ α. Μ ͵βψξθ. καὶ ἔχοντες τούτους, εὑρίσκομεν ὡς προγέγραπται τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. ἔστω δὲ τοὺς κειμένους. τούτους δὲ ἐξεθέμεθα, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν τετραγώνων ἐάν τε προσλάβῃ μονάδας ͵γτξ. ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' αἱ ͵γτξ. μονάδες ὁ τετράκις ἐστὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἑκάστου τοῦ τριγώνου. καὶ διὰ τοῦτο τίθημι τάσσω ἐν ϛϛ^οῖς. ὃν μὲν ἀριθμῶν ͵δσϟβ ριγ^ων. ὃν δὲ κθ^ων ͵γψλη. ὃν δὲ ζ. ͵αρπζ. καὶ ὁ ὑπὸ δύο αὐτῶν ποιεῖ τοὺς ἐπάνω τετραγώνους. λοιπὸν δεῖ τοὺς γ. ἰσῶσαι δυνάμεσι ͵γτξ. καὶ πάντα ἵνα ἐν μορίοις γένηται βάλλομεν ῑ. ͵βψμϛ. ὁ ϛ^ὸς ϛϛ ͵δχε. ͵ητϛ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος ϛϛ ζβ. ͵ηψλα. μορίου τοῦ αὐτοῦ. καὶ γίνονται οἱ τρεῖς ϛ^οὶ ͵αωκδ. ͵ϛσι. μορίου ῑ. ͵βψμϛ. ἴσοις δυνάμεσι ͵γτξ. καὶ πάντα εἰς ῑ. ͵βψμϛ. ͵ϛσι. ἴσος δ^ϋ α. ͵ηψμζ. ͵δφμξ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ὸ μ° ͵αωκα. ͵ϛτιδ. μορίου Β μοιράδος α. καὶ α. ͵ηψμζ. μ° ͵δψμξ. μορίου κοινοῦ ληφθέντος τινὸς, ὅπερ ἐστὶ ἀδύνατον. φανερὸν γὰρ ἥμισυ ἄλλη εἶναι ϛϛ^ῶν. ἔσται ὁ ϛ^ὸς μ° ͵αωκα. ͵ϛτιδ. μορίου α. ͵ηψμζ. μ. φξϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος.*

INVENIRE tres numeros, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, omnium ſumma ſiue detracta quadratum faciat. Rurſum primò quærantur tria triangula æquales areas habentia. Quibus inuentis ſumemus quadratos hypotenuſarum. Eſt autem primus 3364. ſecundus 5476. tertius 12769. Hos nacti, inueniemus, vt iam traditum eſt, tres numeros, vt producti ex binorum mutuo ductu faciant datos quadratos, qui ſint ij quos expoſuimus autem iſtos, quia quiuis ipſorum ſiue addas ei, ſiue adimas 3360. facit quadratum. At 3360. eſt quadruplum areæ ſingulorum triangulorum. Ea propter nunc in numeris pono primum $\frac{4292}{113}$. N. ſecundum $\frac{4181}{29}$. N. tertium $\frac{3277}{37}$ N. quorum bini inuicem ducti faciunt ſupradictos quadratos. Reſtat vt hi tres æquentur 3360 Q. & omnia vt vnius fiant denominationis, reducantur ad 121249. erit primus $\frac{4605316}{121249}$. N. ſecundus $\frac{17480761}{121249}$. N. tertius $\frac{10738729}{121249}$. N. & fit trium ſumma $\frac{32824806}{121249}$ N. æqualis 3360 Q. & omnia in 121249. fiunt 32824806. N. æquales 407396640 Q. & fit 1 N. $\frac{32824806}{407396640}$. Ad poſitiones, erit primus.

IN QVAESTIONEM XI.

HÆc quæſtio, vt bene monet Xilander, à duobus præcedentibus pendet omnino, & operatio Diophanti plana eſt, ſed tota minutiarum tractatio in textu Græco ſcatet mendis. Quamobrem malui in mea verſione rem ſubiicere per veros numeros modo nobis conſueto, quàm in verbis & in numeris Diophantæis omni ex parte reſtituendis diutius animum torquere.

Porro quod deeſt in Diophanto (ipſa nimirum quæſtionis ſolutio) ſic à nobis ſupplebitur fit 1 N. [illegible]. ſeu in minimis [illegible]. Ad poſitiones erit primus [illegible]. ſecundus [illegible] tertius denique [illegible]. Vt autem propoſito ſatisfaciant huiuſmodi numeri, tu ſi vacat experire, nos ad ea quæ maioris ſunt momenti interim progrediemur.

QVAESTIO XII.

VNITATEM diuidere in duas partes, & vtrique ſegmento datum numerum adjicere, & facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem eſſe, * neque duplum eius N. vnitas maiorem habere quadrantem quàm eſt numerus, quo ipſum metitur primus numerus. * Imperatum ſit vt vtrique portioni adiungamus 6. itáque efficiamus quadratum. Quia ergo volumus vnitatem ſecare, & vtrique ſegmento addere 6. & facere quadratum: ſumma duorum qui ſic fient quadratorum erit 13. Oportet igitur diuidere 13. in duos quadratos, vt vterque ipſorum maior ſit ſenario. Ergo ſi 13. diuidam in duos quadratos, quorum interuallum vnitate ſit minus, ſoluo quæſtionem. Sumo ſemiſſem de 13. qui eſt 6 $\frac{1}{2}$. & quæro quam partem poſſim ad 6 $\frac{1}{2}$. adiungere, ita vt quadratum conficiam. Multiplico per 4. & quæro poſtmodum partem quadratam, quæ ſi ad 26. adjciatur faciat quadratum. ſit pars apponenda $\frac{1}{1Q}$. fiunt 26. + $\frac{1}{1Q}$. æqualia quadrato, & ſi omnia per 1 Q. multiplicentur, fiunt 26 Q. + 1. æqualia quadrato, eſto latus eius 5 N. + 1. & fit 1 N. 10. Quadratus ergo 100. Pars quadratica $\frac{1}{100}$. Proinde pars addenda ad 26. eſt $\frac{1}{100}$. Quare pars addenda ad 6 $\frac{1}{2}$. eſt $\frac{1}{400}$. & facit quadratum à latere $\frac{51}{20}$. Oportet igitur ita diuidere 13. in duos quadratos, vt vtriuſq; latus proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. Et quæro quo numero ternatius multatus, & quo binarius auctus faciat ſupradictum numerum $\frac{51}{20}$. Statuo itáque duos quadratos, alterum à latere 11 N. + 2. alterum à latere 3 − 9 N. & fit ſumma quadratorum ab his ortorum. 202 Q. +

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, * μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἢ μ° ᾱ. μείζονα ἔχῃ μέρος δ^{ον}. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α^{ου}. ς^{ου}. * ἐπιτετάχθω δὴ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μ° ς̄. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν θέλομεν τὴν μονάδα τεμεῖν, καὶ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μονάδας ς̄ καὶ ποιεῖν τετράγωνον. τὸ ἄρα σύνθεμα τῶν τετραγώνων ἔσται μ° ιγ̄. δεήσει ἄρα τὸν ιγ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ μ° ς̄. ἐὰν οὖν τὸν ιγ̄. διέλω εἰς δύο τετραγώνους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος ᾱ. λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιγ̄. τὸ ἥμισυ, γίνεται ς̄. ᾱ ς^{ον}. καὶ ζητῶ τί μόριον προσθεῖναι μονάσι ς̄. ᾱ ς^{ον}. καὶ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ πάντα τετράκις. ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς κς̄. μονάσι καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον ᾱ ς^{ον}. καὶ γίνονται μ° κς̄. ᾱ ς^{ον}. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν. γίνονται δ^{υ} κς̄. μ° ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^{οι} ε̄. μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} μ° ι. δύναμις γὰρ μ° ρ̄. τὸ δυναμοστὸν μ° ᾱ ρ^{ον}. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς κς̄. προστιθέμενον ᾱ. ρ^{ον}. τὸ ἄρα ταῖς μονάσι ς̄. ᾱ ς^{ον}. γίνεται ᾱ υ^{ον}. καὶ ποιεῖ τετράγωνον τὸν ἀπὸ πλευρᾶς νᾱ κ^{ων}. δεῖ οὖν τὸν ιγ̄. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα νᾱ κ^{ων}. καὶ ζητῶ τὶ ἢ τρεῖς λείψασα προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ τὸν αὐτὸν, τουτέστι νᾱ κ^{ων}. τάσσω οὖν δύο τετραγώνους ἕνα μὲν ἀπὸ ς^{ῶν} ια̅. μ° β̄. τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ μ° γ̄. λείψει ς^{ῶν} θ̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. δυνάμεις σβ̄. μ° ιγ̄. λείψει ς^{ῶν} ι. ἴσοις μ° ιγ̄. καὶ γίνεται

ὁ ς̄ˢ ς̄ ˡᵉ. ἔσται ἄρα ἑνὸς τ̄ τετραγώνων ἡ πλευρὰ σνζ ˡᵉ. ἡ δὲ τῦ ἑτέρου σπ̄ ˡᵉ. καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τ̄ ἀπ' αὐτ̄ τετραγώνων, ἄρα μῦ μᵒ ς̄. ἔσται τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ςτπ̄ ... τὸ δὲ ἕτερον ,δωμγ̄ ... καὶ δῆλον ὡς ἑκάτερον μῦ μονάδων ς̄. ποιεῖ τετράγωνον.

13 — 10 N. æqualis 13. & fit 1 N. ... Erit igitur alterius quadrati latus ... alterius verò ... & ſi ab vtroque quadratorum inde factorum auferamus 6; erit alterum ſegmentum vnitatis ... alterum ... & liquet horum vtrumque adſcito 6. facere quadratum.

IN QVAESTIONEM XII.

PVLCHERRIMVM problema, ſed miſerrimè affectum, ita vt medicantis manum vix admittat, & cùm in eo enodando multùm deſudauerit Xilander, id tamen quod potiſſimum eſt prætermiſit, accuratam ſcilicet appoſitæ conditionis explicationem. Quàm enim ſit neceſſaria conditionis huius cognitio, manifeſtum eſt ex eo quod in hypotheſi Diophanti tota vis æquationis conſiſtit in diuiden-do numero 13. in duos quadratos, quorum quilibet ſit maior quàm 6. minor quàm 7. Nullibi au-tem traditus eſt modus diuidendi numerum aliquem in duos quadratos, niſi numerus ille ſit quadra-tus, vel ſuapte natura ex duobus quadratis compoſitus. Itaque cùm euidens ſit, ponendo latera qua-dratorum 11. N. + 2. & 3. — 9 N. æquationem ſuccedere non poſſe niſi quadrati ipſorum 2. & 3. ſi-mul efficiant 13. Neceſſe eſt vtique 13. componi ex duobus quadratis. Atqui 13. eſt duplum dati nu-meri 6. vnitate auctum. Certum ergo eſt conditionem à Diophanto allatam requirere debere, vt du-plum dati numeri vnitate auctum, ſit quadratus numerus, vel compoſitus ex duobus quadratis. Quod etiam validè confirmatur verbis illis. *Oportet autem datum neque imparem eſſe.* Nam ſi datus numerus ſit impar, nullo modo duplum eius vnitate auctum poteſt eſſe quadratus, vel compoſitus ex duobus quadratis, vt facilè eſt demonſtrare. Sit enim numerus impar A B. cuius duplum eſto

A... B... C. D

A C. cui addita vnitate C D. fiat A D. dico primo A D. non eſſe quadratum. Si enim ponatur quadratus; cùm numero pari A C. addita vnitate C D, fiat A D eſt

[a] 21. 1. poriſ. A D impar. Ergo à quadrato impari A D, detracta vnitate C D[a] reliquus A C eſt pariter par. [b] Qua-

[b] 8. 1. poriſ. mobrem illius dimidium A B eſt numerus par, contrà hypotheſim. Rurſus dico numerum A D non componi ex duobus quadratis. Etenim cùm A D oſtenſus ſit, impar, neceſſe eſt è duobus qua-

[c] 20. & 21. 1. poriſm. dratis ex quibus componi dicitur[c], alterum parum eſſe, alterum imparem. [d] At omnis quadratus par, eſt pariter par. Et ab omni quadrato impari auferendo vnitatem relinquitur pariter par.

[d] 16 1. poriſ. Igitur à toto A D ablata vnitate, reliquus A C componetur ex duobus pariter partibus, [e] ac proin-

[e] 8. 1. poriſm. de A C. pariter par eſt. [f] Quamobrem illius dimidium A B, par, eſt contrà hypotheſim.

Reliqua verò verba. *Neque duplum eius*, &c. adeo vitiata ſunt, vt nullam commodè recipere poſſint explicationem. Non dubito quidem Diophantum reſpexiſſe ad aliquam numerorum non vulgarem proprietatem, qua definitur quis numerus par deligendus ſit, vt duplum eius vnitate au-ctum ſit quadratus numerus, vel compoſitus ex duobus quadratis. Sed quid ſibi velit in tanta ver-borum caligine diuinare non poſſunt. Id oneris relinquam illi qui in codicem aliquem emendatio-rem inciderit. Sufficiat nobis appoſitiſſimam attuliſſe conditionem, cum qua neceſſe eſt conditio-nem Diophanti coincidere ſi rectè præſcribatur. Sanè quod ait Xilander verba illa corrupta, viden-ri velle, debere eum qui datur eſſe duplum numeri primi, id vtique futile eſt, & nulli fundamento nixum, quodque ipſa ſtatim experientia refelli poteſt, nam ſi datus ſit 10. is eſt duplus numeri primi 5. & tamen quæſtioni ſoluendæ minimè reperitur idoneus, nam oporteret diuidere in duos quadra-tos numerum 21. Quod quidem impoſſibile eſt, vt reor, cùm is neque quadratus ſit, neque ſuapte natura compoſitus ex duobus quadratis.

OBSERVATIO D. P. F.

N*Vmerus 21. non poteſt diuidi in duos quadratos in fractis. Hoc autem facillime demonſtrare poſſumus, & generalius omnis numerus cuius triens non habet trientem non poteſt diuidi in duos quadratos neque in integris neque in fractis.*

Aliquando mihi venit in mentem Diophantum voluiſſe duplum dati numeri paris vnitate auctum eſſe numerum primum, quandoquidem omnes fere huiuſmodi numeri componuntur ex duobus quadratis, quales ſunt 5. 13. 17. 29. 41. aliique primi numeri qui ſublata vnitate re-linquunt numerum pariter parem. Veruntamen neque hæc explicatio ſuſtineri poteſt. Nam pri-mum hac ratione per huiuſmodi conditionem excluderentur omnes numeri, quorum duplum vnitate auctum eſt quadratus numerus, quos tamen aptiſſimos eſſe ſoluendæ quæſtioni pa-tet, quia quilibet quadratus diuidi poteſt in duos quadratos per octauam ſecundi; ſed & infrà

exemplo

exemplo id comprobabimus. Deinde excluderentur etiam multi numeri, quorum duplum vnitate auctum componitur ex duobus quadratis, quales ſunt 22. 58. 62. & alij innumerabiles. Nam dupli horum vnitate aucti ſunt 45. 117. 125. quorum nullus eſt primus numerus, cùm quilibet multos habeat metientes; vnuſquiſque tamen è duobus quadratis conflatur, primus ſcilicet ex quadratis 36. & 9. ſecundus ex quadratis 81. & 36. tertius ex quadratis 100. & 25. Itaque ſatius erit conditionem à nobis allatam amplecti, donec aliquis ex emendatiore codice reſtituat Diophantum. Solùm hoc moneo in codice Vaticano, hæc verba ſic haberi. *μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδι ᾱ. μείζονα ἔχῃ μέρος τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.*

OBSERVATIO D. P. F.

VEra limitatio hæc eſt, generalis nempe & omnes numeros inutiles excludens. Oportet datum numerum non eſſe imparem, neque duplum eius vnitate auctum per maximum quadratum ex quo menſuratur diuiſum diuidi à quouis numero primo vnitate minori quàm multiplex quaternarij.

Porro quoniam operatio Diophanti ſubtilis eſt, & non vulgaris artificij, placet eam explicare, quoad potero breuiter & dilucidè. Primum itaque cùm 13. diuidendus ſit in duos quadratos, quorum vterque maior ſit ſenario, rectè quæritur pars quadrati quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita faciat quadratum, ſic enim diuidendo poſtmodum 13. in duos quadratos, quorum quilibet proximè accedat ad inuentum quadratum, ſatisfactum erit propoſito, nam quilibet illorum non multùm diſtabit à $6\frac{1}{2}$. Reducit autem omnia ad integros more ſuo Diophantus, multiplicando $6\frac{1}{2}$ per 4. vnde fit 26. Nam inuenta parte quadratica quæ ad 26. addita quadratum faciat, illius vtique quarta pars addita ad $6\frac{1}{2}$ faciet quadratum. Ponitur ergo pars huiuſmodi $\frac{1}{1Q}$. quia ſcilicet pars quadratica fit diuidendo vnitatem per aliquem quadratum; vnde ſequitur 26 + $\frac{1}{1Q}$ æquari quadrato; vt autem rurſus ad integros fiat reductio, ducuntur omnia in 1 Q. & fit 26 Q. + 1. æquandus quadrato; cuius latus ita fingendum eſt vt valor Numeri ſit maior vnitate, ſi enim ſit vnitate minor, patet $\frac{1}{1Q}$. fore plerũque maiorem vnitate, ac proinde non fore propriè partem quadraticam, vnde ſequitur inuentum quadratum, tota vnitate, vel etiam maiore interuallo ſuperaturum numerũ $6\frac{1}{2}$. Verbi gratia ſi fingatur latus ſupradicti quadrati 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. æqualis 26 Q. + 1. & fiet 1 N. $\frac{2}{25}$. Quare $\frac{1}{1Q}$ erit $\frac{625}{4}$ cuius quadrans $\frac{625}{16}$ additus ad $6\frac{1}{2}$ quadratum facit $\frac{729}{16}$. qui excedit ipſum $6\frac{1}{2}$ plus quàm 39. vnitatibus, ac proinde quæſtioni ſoluendæ prorſus eſt inutilis. Igitur vt arte certa, non fortuitò fingatur huiuſmodi latus, ita vt valor Numeri ſuperet vnitatem, cùm fingi poſſit huiuſmodi latus vel 1 + tot numeris, quorum quadratus ſit minor quàm 26. vel 1 − tot numeris. quorum quadratus ſit maior quàm 26. Primo modo fiet valor Numeri, auferendo quendam quadratum à 26. & per reſiduum diuidendo duplũ lateris eiuſdem quadrati. Vt ergo quotiens ſit maior vnitate reperiẽdus eſt quadratus quo detracto à 26. relinquatur numerus minor duplo lateris eiuſdem quadrati, ponatur is 1 Q. ergo 2 N. maior eſt quàm 26 − 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. maior eſt quàm 26. Qua æquatione reſoluta, fit 1 N. non minor quàm $4\frac{1}{10}$. Fingetur ergo latus quadrati 1 + tot numeris qui excedant $4\frac{1}{10}$ dum eorum quadratus ſit minor quàm 26. ſic Diophantus poſuit hoc latus 1 + 5 N. & poni poſſet 1 + $4\frac{1}{2}$ N. vel 1 + $4\frac{1}{3}$ N. & ſic aliis infinitis modis. Secundo verò modo fingendo latus quadrati, fiet valor Numeri, à quodam quadrato auferendo 26. & per reſiduum diuidendo duplum lateris. Quare vt fiat valor Numeri maior vnitate, poſito illo quadrato 1 Q. erit 2 N. maior quàm 1 Q. − 26. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2 N. + 26. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. minor quàm $6\frac{1}{2}$. fingetur ergo latus 1 − aliquot Numeris infrà $6\frac{1}{2}$ dum eorum quadratus excedat 26. Verbi gratia fingatur 1 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{6}{5}$ & pars quadratica ad $6\frac{1}{2}$ adiicienda erit $\frac{25}{144}$. fietque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{12}$. Vnde collige partem quadraticam hîc non ſumi ſtrictè pro fractione quadrata cuius numerator ſit 1. Sed tantum pro fractione quadrata quæ minor ſit vnitate, ideſt cuius numerator ſit minor denominatore.

Inuenta porro parte quadratica $\frac{1}{400}$. quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita facit quadratum $\frac{2601}{400}$ cuius latus $\frac{51}{20}$ rectè infert Diophantus numerum 13. ita diuidendum eſſe in duos quadratos, vt latus vtriuſque proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. ſic enim vterque quadratus proximè accedet ad $6\frac{1}{2}$. Vt autem 13. diuidatur in duos quadratos per operationem decimæ ſecundi, debent ſumi 2. & 3. latera quadratorum, ex quibus 13. ſuaptè natura componitur, & alteri addi oportet certum numerum Numerorum, ab altero detrahi; Vt ergo vtriuſque quadrati latus adæquetur numero $\frac{51}{20}$. neceſſe eſt ad 2. addi $\frac{11}{20}$. & à 3. auferri $\frac{9}{20}$. Quare ſi 1 N. ſupponatur eſſe $\frac{1}{20}$. erit vtique 11. N. + 2. æqualis $\frac{51}{20}$. Itemque 3 − 9 N. ſic autem quadrati horum laterum æquari deberent $13\frac{1}{200}$. Quare ſi æquentur ipſi 13. fiet vtique 1 N. paulò minor quàm $\frac{1}{20}$. ac proinde 11 N. & 9 N. paulò minus erunt quàm $\frac{11}{20}$ & $\frac{9}{20}$. vnde ſequetur vtrumque latus non multùm diſtare poſſe à $\frac{51}{20}$. ac per conſequens vtrumque quadratum fore proximum numero $6\frac{1}{2}$ atque adeo propoſito ritè ſatisfacturum. Hinc ſatis colligitur, quod ſuprà diximus, in conditioni

explicatione nimirum, fuiſſe neceſſarium numerum 13. componi ex duobus quadratis. Qua de cauſa res etiam optimè ſuccedet, ſi datus numerus talis ſit, vt eius duplum vnitate auctum ſit quadratus numerus, quandoquidem omnis quadratus in duos quadratos poteſt diuidi per octauam ſecundi.

Hoc autem vt manifeſtius fiat, & ſimul artificium Diophanti magis illuſtretur; talis quæſtio proponatur. *Vnitatem ſecare in duas partes, vt vtrique addendo 4. fiat quadratus.* Patet numerum 9. diuidendum eſſe in duos quadratos, quorum interuallum ſit vnitate minus, hoc eſt tales vt vterque ſuperet 4. Quare ſumendo ſemiſſem ipſius 9. puta $4\frac{1}{2}$. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, & ducendo in 4. fit 18. Poſitâque parte quadrati $\frac{1}{4Q}$. fit 18 + $\frac{1}{1Q}$. æquandus quadrato, & omnia ducendo in Q. fit 18 Q. + 1. æquandus quadrato, eſto latus 4 N. + 1. fiet 1 N. 4. Igitur $\frac{1}{1Q}$. eſt $\frac{1}{16}$. cuius quadrans puta $\frac{1}{64}$. additus ad $4\frac{1}{2}$ facit quadratum $\frac{289}{64}$. cuius latus $\frac{17}{8}$. Quare 9. ita diuidendus eſt in duos quadratos, vt vtriuſque latus adæquetur ipſi $\frac{17}{8}$. Diuiditur autem 9. in duos quadratos per octauam ſecundi, putà in $\frac{81}{25}$. & $\frac{144}{25}$ quorum latera $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Video ergo quid addendum ſit ad $\frac{9}{5}$. & quid detrahendum à $\frac{12}{5}$. vt fiant $\frac{17}{8}$. & inuenio hinc $\frac{13}{40}$ inde $\frac{11}{40}$. Quare fingo quadratorum latera $\frac{9}{5}$ + 13 N. & $\frac{12}{5}$ − 11 N. fitque ſumma quadratorum 290 Q. + 9 − 6 N. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{3}{145}$. ſuntque latera quadratorum $\frac{60}{29}$. $\frac{63}{29}$. ipſi quadrati $\frac{3600}{841}$ & $\frac{3969}{841}$ vnde ſi auferas ſigillatim 4. ſuperſunt quæſitæ partes vnitatis $\frac{236}{841}$ & $\frac{605}{841}$.

Poſſem etiam in huiuſmodi quæſtione artificium imitari decimæ tertiæ ſequentis, hoc pacto. Ponatur alter quadratorum 1 Q. erit alter 9 − 1 Q. qui æquari debet quadrato, ita tamen vt 1 Q. inueniatur maior quàm 4. minor quàm 5. Sumantur ergo duo quadrati inter 4. & 5. quales ſunt $\frac{484}{100}$ & $\frac{441}{100}$. quorum latera $\frac{22}{10}$ & $\frac{21}{10}$. Quare curandum vt valor numeri cadat inter $\frac{22}{10}$ & $\frac{21}{10}$. fit autem valor Numeri, diuidendo ſextuplum alicuius numeri per quadratum ipſius vnitate auctum. Oportet igitur $\frac{6N}{1Q+1}$ maiorem eſſe quàm $\frac{21}{10}$ minorem quàm $\frac{22}{10}$. & tandem 60 N. maiores ſunt quàm 21 Q. + 21. minores quàm 22 Q. + 22. Et vtraque æquatione per approximationem reſoluta, fit 1 N. maior quàm $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. minor quàm $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. ponatur ergo $2\frac{1}{3}$. & quadrati 9 − 1 Q. latus ſtatuatur 3 − $2\frac{1}{3}$ N. fiet 1 N. $\frac{63}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{63}{29}$. & $\frac{60}{29}$. ipſi quadrati $\frac{3969}{841}$ & $\frac{3600}{841}$ à quibus auferendo ſigillatim 4. remanent quæſitæ partes vnitatis $\frac{605}{841}$ & $\frac{236}{841}$. vt ſuprà.

Animaduerſione quoque dignum eſt, eodem prorſus artificio Numerum quemlibet ita diuidi poſſe in duas partes, vt vtrique adiiciendo eundem datum numerum, fiat quadratus, dummodo duplum addititij numeri adſumens numerum diuidendum, faciat quadratum, vel numerum è duobus quadratis compoſitum. Verbi gratia. Sit diuidendus 2. in duas partes, vt vtrique adiiciendo 4. fiat quadratus. Patet numerum 10. diuidendum eſſe in duos quadratos, quorum quilibet ſit maior quàm 4. ſumo ergo ſemiſſem de 10. puta 5. & quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, ponatur $\frac{1}{1Q}$ ergo 5 + $\frac{1}{1Q}$ æquatur quadrato, & omnia per 1 Q. multiplicando, fit 5 Q. + 1. æquandus quadrato. Eſto latus illius 1 + 2 N. fit 1 N. 4. eſt ergo pars quadrati $\frac{1}{16}$ qua addita ad 5. fit quadratus $\frac{81}{16}$ cuius latus $\frac{9}{4}$. Diuidendus ergo eſt 10. in duos quadratos, quorum latera proximè accedunt ad $\frac{9}{4}$. Diuiditur autem 10. ſuaptè natura in quadratos, quorum latera ſunt 1. & 3. Quare imitando artificium Diophanti fingemus latera quæſitorum quadratorum 1 + 5 N. & 3 − 3 N. fiet ſumma quadratorum 10 + 34 Q. − 8 N. æqualis 10. & fiet 1 N. $\frac{4}{17}$. Sunt igitur quadratorum latera $\frac{37}{17}$. & $\frac{39}{17}$. ipſi quadrati $\frac{1369}{289}$. & $\frac{1521}{289}$. à quibus ſi auferas 4. ſigillatim, reſtant quæſitæ binarij partes $\frac{213}{289}$ & $\frac{365}{289}$.

Denique, non diſſimulandum eadem arte ſolui quæſtionem quam tradidit Vieta Zetetico 5. lib. quarti nimirum.

Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum, ruſus diuidere in duos quadratos, quorum alter conſiſtat intra limites præſtitutos.

Sit diuidendus 5. in duos quadratos, quorum alter ſit maior quàm 1. minor quàm 2. ſumo medium in arithmetica medietate inter 1. & 2. puta $1\frac{1}{2}$. & quæro quæ pars quadrati illi addita, quadratum faciat, inuenietur modo ſuprà tradito $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{25}{16}$. cuius latus $\frac{5}{4}$. Ita ergo fingendum erit latus præfiniti quadrati vt accedat ad $\frac{5}{4}$. Quoniam verò volumus ita diuidere 5. in duos quadratos, vt alter proximè accedat ad $1\frac{1}{2}$. & detracto $1\frac{1}{2}$. ab ipſo 5. ſupereſt $3\frac{1}{2}$. euidens eſt alterum quadratum accedere debere ad $3\frac{1}{2}$. Rurſus ergo quæro quæ pars quadrati ad $3\frac{1}{2}$. addita, faciat quadratum, ea inuenietur modo tradito $\frac{1}{64}$. fitque quadratus $\frac{225}{64}$. à latere $\frac{15}{8}$. Itaque diuidendus eſt 5. in duos quadratos ita vt huius latus adæquetur $\frac{5}{4}$. ſeu $\frac{10}{8}$. alterius verò $\frac{15}{8}$. Sunt autem latera quadratorum ex quibus 5. ſuapte natura componitur 1. & 2. Quare cùm vnitati deſint $\frac{2}{8}$. quominus æquet $\frac{10}{8}$. & binarius ſupereſt $\frac{15}{8}$. interuallo $\frac{1}{8}$. fingo quadratorum latera 1 + 7 N. & 2 − 6 N. eſtque quadratorum ſumma 5 + 85 Q. − 10 N. æqualis 5. & fit 1 N. $\frac{2}{17}$. ſuntque latera quadratorum $\frac{31}{17}$. & $\frac{22}{17}$. ipſi quadrati $\frac{961}{289}$. & $\frac{484}{289}$. quorum ſumma 5. & alter puta $\frac{484}{289}$. maior eſt vnitate, minor binario vt poſtulabatur.

Rurſus diuidendus eſto 20. in duos quadratos quorum alter maior ſit quàm 6. minor quàm 10. ſumo medium arithmeticè inter 6. & 10. puta 8. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{36}$. fitque quadratus $\frac{289}{36}$. à latere $\frac{17}{6}$. Quia verò detrahendo 8. ab ipſo 20. ſupereſt 12. Quæro rurſus partem quadrati quæ ad 12. addita, faciat quadratum, ea eſt $\frac{1}{4}$. fitque quadratus $\frac{49}{4}$ cuius latus $\frac{7}{2}$. Itaque diuidendus eſt 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{17}{6}$. alterius verò latus adæquetur $\frac{7}{2}$. ſeu $\frac{21}{6}$. Componitur autem 20. ex duobus quadratis ſuaptè natura, quorum latera

2. & 4. Quare cùm ipſi 2. deſint $\frac{9}{5}$ quominus æquet $\frac{19}{5}$ & ipſe 4. ſuperet $\frac{7}{5}$. interuallo $\frac{13}{5}$. fingo quadratorum latera 2. + 9. N. & 4 − 7 N. eſtque ſumma quadratorum 20 + 130 Q. − 20 N. æqualis 20. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. ſunt igitur quadratorum latera $\frac{44}{13}$. & $\frac{38}{13}$. ipſi quadrati $\frac{1936}{169}$. & $\frac{1444}{169}$. quorum ſumma 20. & alter, puta $\frac{1444}{169}$. maior eſt quàm $\frac{1014}{169}$ ſeu quàm 6. & minor quàm $\frac{1690}{169}$. ſeu quàm 10. vt poſtulabatur. Soluit hoc problema Franciſcus Vieta loco citato, alia methodo, ſibique peculiari: ſed cùm ea non ſit iſta melior, immò ſit longè difficilior, non eſt cur eam explicandi laborem aſſumamus.

QVÆSTIO XIII.

D	A G B	E
	1 1 1	

VNITATEM ſecare, & adiicere vtrique ſegmento alium atque aliũ datum numerum, itáque quadratum conficere. Imperatum ſit vt vnitas ſecetur, & adiiciatur alteri ſegmento 2. alteri 6. vt fiat vtrimque quadratus. Exponatur vnitas A B. & ſecetur in G. & ipſi A G. adjiciatur binarius A D. At ipſi G B. addatur ſenarius B E. vterque igitur ipſorum G D. G E. eſt quadratus. Et quia A B. eſt vnitas. At ſumma duorum A D. B E. eſt 8. Totus vtique D E erit 9. Et hunc oportet diuidere in duos quadratos, nempè in ipſos G D. G E. Sed quoniam quadratorum alter maior eſt binario A D. & minor ternario D B. eo res rediit vt datum quadratum 9. diuidam in duos quadratos nempè ipſos G D. G E. vt alter ipſorum G D. cadat medius inter binarium, & ternarium. Nam inuento ipſo G D. cùm A D. binarius ſit, dabitur etiam reliquus A G. Eſt autem A B. vnitas. Quamobrem & reliquus B G. datus erit, ſed & dabitur G. in quo ſecanda eſt vnitas. Iam deſcriptionis ductum ſic exequamur. Eſto alter quadratorum, is qui inter 2. & 3. cadere debet 1 Q. alter ergo erit 9. − 1 Q. æquandus quadrato. Et quidem hunc æquare quadrato. facile eſt, ſed oportet talem inueniri 1 Q. vt cadat inter 2. & 3. Sumamus duos quadratos, alterum maiorem quàm 2. alterum minorem quàm 3. ſunt autem $\frac{289}{144}$. & $\frac{361}{144}$. Iam ſi 1 Q. ita adornemus vt inter hos duos quadratos incidat, ſoluemus quæſtionem. Oportebit ergo Latus etiam 1 Q. hoc eſt 1 N. maius eſſe quàm $\frac{17}{12}$ minus verò quàm $\frac{19}{12}$. Oportet igitur 9 − 1 Q. æquantes quadrato, inuenire 1 N. maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Quod ſi 9 − 1 Q. æqualem quadrato ſtatuamus, fingemus qua-

δ	α γ β	ε
	1 1 1	

ΜΟΝΑΔΑ τεμεῖν καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων, ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ μονάδα τεμεῖν καὶ προσθεῖναι ᾧ μὲν μο β. ᾧ δὲ μο ϛ. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἐκκείσθω μονὰς ἡ αβ. καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ. καὶ τῷ μὲν αγ. προσκείσθω δυὰς ἡ αδ. τῷ δὲ γβ. ἑξὰς ἡ βε. ἑκάτερος ἄρα τῶν γδ. γε. ἐστὶ τετράγωνος. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν αβ. ἐστὶ μονὰς α. συναμφότερος δὲ ὁ αδ. βε. ὀκτάς. ὅλος ἄρα ὁ δε. γίνεται μο θ. καὶ ταύτας χρὴ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς δγ. γε. ἀλλὰ ἐπεὶ εἷς τῶν τετραγώνων. τοῦ μὲν αδ. ἐστὶ μείζων τουτέστι δυάδος. τοῦ δὲ βδ. ἐστὶν ἐλάσσων τουτέστι τριάδος. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ ἐπιταχθέντα τετράγωνον, οἷον εἰ τὸν θ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς γδ. γε. ὥστε ἕνα τὸν γδ. εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τοῦ τε δυάδος καὶ τῆς τριάδος. εὑρεθέντος γὰρ τοῦ γδ. δοθεὶς ὢν ὁ αδ. ἐστὶ δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ αγ. δοθείς. ἔστι δὲ ὁ αβ. μονὰς α. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ βγ. ἐστὶ δοθείς. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ γ. καθ' ὃ τέμνεται ἡ μονάς, ἡ δὲ ἀγωγὴ ὑπογραφῆς. ἔστω γὰρ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων μεταξύ τε δυάδος, καὶ τῆς τριάδος δύναμις α. ὁ ἄρα λοιπὸς ἔσται μονάδες θ. λείψει δυνάμεως α. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, δεῖ δὲ εὑρεῖν τὴν δύναμιν μεταξὺ τοῦ τε β. καὶ τοῦ γ. λαμβάνομεν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν μείζονα τοῦ β. τὸν δὲ ἕτερον ἐλάσσονα τοῦ γ. εἰσὶ δὲ τὰ σπθ ρμδ^{ων}. καὶ τξα ρμδ^{ων}. ἐὰν οὖν τὴν δύναμιν κατασκευάσωμεν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν προειρημένων δύο τετραγώνων. λύσομεν τὸ ζητούμενον. δεῖ οὖν ἐστὶ τὴν πλευρὰν ς^{ου} α. τουτέστιν ς^{ον} α. μείζονα μὲν εἶναι ιζ ιβ^{ων}. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβ^{ων}. ὥστε δεῖ ζητοῦντα μο θ λείψει δυ α. ἴσον τετραγώνῳ, εὑρεῖν τὸν ς^{ον} μείζονα μὲν μο ιζ ιβ^{ων}. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβ^{ων}. ἐπεὶ δὲ μο θ λείψει δυ α.

ποιοῦμεν ἴσας τετραγώνῳ. πλάσσομεν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ μο γ̄ λείψει ς̄ς̄ τινῶν, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ς̄ γενέσθαι ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου καὶ μεριζομένου εἰς τὸν μονάδι μιᾷ μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ παραβληθεὶς εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν ιζ ιβ^{ων}. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβ^{ων}. ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ο ᾱ. θέλω ἄρα ς̄ς̄ ς̄. παραβληθέντας εἰς Δ^Υ ᾱ μ. ᾱ. ποιεῖν τὴν παραβολὴν μείζονα μὲν ιζ ιβ^{ων}. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβ^{ων}. ἀλλὰ καὶ ὁ ιζ. παραβληθεὶς παρὰ τὸν ιβ. τὴν παραβολὴν ποιεῖ ιζ ιβ^{ων}. ὥστε δὴ ς̄ς̄ ς̄ πρὸς Δ^Υ ᾱ μο ᾱ. μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ιζ πρὸς ιβ. τὸ ἄρα ὑπὸ ς̄ς̄ ς̄. καὶ μο ιβ. τουτέστι ς̄ς̄ οβ. ὀφείλει μεῖζον εἶναι τοῦ ὑπὸ δυνάμεως ᾱ μο ᾱ. καὶ ιζ. τουτέστι δυνάμεων ιζ. μο ιζ. τῶν ς̄ς̄ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται ͵ασϟϛ. ἆρον τὰς δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας τουτέστι σπθ. λοιπὸν ἄρα ͵αζ. τούτων πλευρὰ οὐ μείζων λᾱ. πρόσθες τὸ ἥμισυ τῶν ς̄ς̄ γίνεται οὐ μείζων ξζ. παράβαλε παρὰ τὸ πλῆθος τῶν δυνάμεων, γίνεται ὁ ς^ο ὁ ξζ ιζ^{ων}. καὶ ὁμοίως ἐπεὶ δεῖ ς̄ς̄ ς̄. πρὸς Δ^Υ ᾱ μο ᾱ. ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ιθ πρὸς ιβ. εὑρήσομεν τὸν ς̄ οὐκ ἐλάσσονα ξϛ ιθ^{ων}. ἀλλὰ καὶ οὐ μείζονα ξζ ιζ^{ων}. ἔστω μο γ. ᾱ δ^{ων}. πλάσσω οὖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ μο γ̄ λείψει ς̄ς̄ γ̄. ᾱ δ^{ων}. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος Δ^Υ ιβ̄. ᾱ ιϛ^{ων}. μο θ ⋔ ς̄ς̄ κᾱ. ταῦτα ἴσα μο θ ⋔ Δ^Υ ᾱ. ὅθεν ὁ ς^ο πδ νγ^{ων}. ἡ δὲ δύναμις ͵ζνϛ ͵βωθ^{ων}. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὴν δυάδα. ἔσται ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ͵αυλη ͵βωθ^{ων}. ὥστε τὸ ἕτερον ἔσται ͵ατοα ͵βωθ^{ων}. καὶ ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα.

drati latus à 3. cum defectu aliquot numerorum, & inueniemus 1 N. fieri ex aliquo numero ſexies ſumpto, & diuiſo per quadratum ipſius vnitate auctum. Eo itaque ſum redactus vt inueniam aliquem numerum, qui ſexies ſumptus, & diuiſus per quadratum ipſius vnitate auctum quotientem faciat maiorem quam $\frac{17}{12}$ minorem quam $\frac{19}{12}$. Eſto qui quæritur 1 N. Volo ergo vt 6 N. diuiſi per 1 Q. + 1. quotientem faciant maiorem quam $\frac{17}{12}$ minorem quam $\frac{19}{12}$. Sed & 17. diuiſus per 12. quotientem facit $\frac{17}{12}$. Oportet itaque 6 N. ad 1 Q. + 1. maiorem habere rationem quàm quæ eſt 17. ad 12. productus ergo ex 6 N. in 12. hoc eſt 72 N. maior eſſe debet producto ex 1 Q. + 1. in 17. hoc eſt 17 Q. + 17. Numerorum ſemiſſis in ſe ducatur, fit 1296. aufer productum ex quadratis in vnitates, hoc eſt 289. relinquitur 1007. huius latus non maius 31. adde dimidium numerorum, fit non maius 67. diuide per multitudinem quadratorum fit 1 N. $\frac{67}{17}$. Similiter quandoquidem oportet 6 N. ad 1 Q. + 1. minorem rationem habere quàm quæ eſt 19. ad 12. Inueniemus 1 N. non minorem $\frac{66}{19}$. ſed & non maior inuentus eſt $\frac{67}{17}$. eſto igitur $3\frac{1}{4}$. formo ergo quadratum à latere $3 - 3\frac{1}{4}$ N. & fit $12\frac{1}{16}$ Q + 9 − 21 N. Hæc æquantur 9 − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{84}{53}$. Quadratus verò $\frac{7056}{2809}$. & ſi hinc auferamus binarium, erit alterum ſegmentum vnitatis $\frac{1438}{2809}$. alterum $\frac{1371}{2809}$. Et poſtulatis ſatisfit.

IN QVAESTIONEM XIII.

SATIS accuratè quæſtionem hanc explicauit Xilander, multa tamen prætermiſit notatu digna, quæ vt ſigillatim perſequamur. Aduerte primò neceſſariam à Diophanto hìc omiſſam eſſe conditionem. Certum eſt enim numerum 9 − 1 Q æquati non potuiſſe quadrato, niſi 9. quadratus fuiſſet. Quare cùm 9. factus ſit addita vnitate ad 8. ſummam adiiciendorum numerorum 2. & 6. euidens eſt huiuſmodi conditionem præſcribi debere. *Oportet autem ſummam adiiciendorum numerorum conficere quadratum vnitate auctam.* Moneo tamen ſic eſſe concipiendam conditionem, ſi non aliter quàm per operationem Diophanti ſoluenda ſit quæſtio. Cùm enim, vt infrà commonſtrabimus, quæſtio æquè bene ſolui poſſit, dum ſumma numerorum additiorum vnitate aucta conficiat numerum ex duobus quadratis compoſitum, poterit vniuerſalius proponi conditio, nimirum ſic. *Oportet autem ſummam adiiciendorum numerorum vnitate auctam conficere quadratum, vel numerum ex duobus quadratis compoſitum.*

Aduerte ſecundò in codice manu exarato deeſſe diagramma deſcriptionis Diophanteæ quod nos reſtituimus, cùm abſque illo non poſſint intelligi Græca authoris verba. Cæterùm abſque huiuſmodi deſcriptione res facilius & breuius explicari poteſt, hoc modo. Cùm ad 2. addendo partem vnitatis debeat fieri quadratus, & ad 6. addendo reſiduum vnitatis conficiendus ſit aliter quadratus, patet

ſummam quadratorum fore 9. Quare 9. diuidendus eſt in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. alter 6. & 7. conſiſtat. Vnde duplici via perueniri poteſt ad æquationem. Sicut enim Diophantus, eum qui inter 2. & 3. cadere debet, poſuit 1 Q alterum 9 − Q. ſic ille qui inter 6. & 7. conſiſtere debet poni poteſt 1 Q alter 9 − 1 Q. & ſimilis prorſus erit operatio. Certum eſt autem hiſce quadratis inuentis ſolui quæſtionem, nam ſi ab altero auferatur 2. ab altero 6. remanebunt quæſitæ partes vnitatis.

Aduerte tertiò vt inueniat Diophantus quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. rectè ſumere duos quadratos qui cadant inter 2. & 3. quales ſunt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. ſi enim curemus vt 1 Q. cadat inter hoſce duos quadratos, euidens eſt eum fore maiorem quàm 2. minorem quàm 3. eſt autem facile duos quadratos reperire qui cadant inter 2. & 3. id enim fiet, ſi ſumatur quilibet quadratus, inter cuius duplum & triplum cadant duo quadrati. Vt ſi ſumas 36. cuius duplum 72. triplum 108. cùm inter 72. & 108. cadant duo quadrati 81. & 100. his ſubſcribendo denominatorem 36. fient quadrati quæſiti $\frac{81}{36}$. & $\frac{100}{36}$. Quare ſi per hos ſoluere velis quæſtionem curandum erit, vt valor Numeri cadat inter $\frac{9}{6}$ & $\frac{10}{6}$.

Denique aduerte vt fiat valor Numeri maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Diophantum vti artificio quo iam ſæpè in ſimili vſus eſt. Quia enim 9 − 1 Q. quadrato æquandus eſt, fiet valor Numeri, fingendo latus 3 − aliquot numeris, quorum ſextuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quærendus ergo Numerus cuius ſextuplo per quadratum ipſius numeri diuiſo fiat quotiens maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Poſito ergo huiuſmodi numero 1 N. fiet $\frac{6 N}{1 Q + 1}$. maior quàm $\frac{17}{12}$. minor quàm $\frac{19}{12}$. & omnia per denominatores 1 Q + 1. & 12. multiplicando, fient 72 N. maiores quàm 17 Q. + 17. minores quàm 19. Proinde vtraque æquatione per approximationem reſoluta, fiet 1 N. maior quàm $\frac{66}{19}$ minor quàm $\frac{67}{17}$. Quare ſumetur numerus aliquis intermedius, puta 3 $\frac{1}{2}$ & fingetur numeri 9 − 1 Q. latus 3 − 3 $\frac{1}{2}$ N. & cætera ſunt manifeſta.

Porro Diophanti operatio eatenus locum habet, quatenus adiiciendorum numerorum ſumma vnitate aucta quadratum facit. Sed ſi huiuſmodi ſumma vnitate aucta, conficiat numerum ex duobus quadratis compoſitum, aliter operandum erit, imitando ſcilicet artificium eius quam ad præcedentem attulimus ex Vieta. Verbi gratia. Diuidenda ſit vnitas in duas partes, vt alteri addendo 2. alteri 7. fiat vtrimque quadratus. Euidens eſt numerum 10. diuidendum eſſe in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. Alter verò inter 7. & 8. Cùm ergo addendo ſemiſſem vnitatis vtrique datorum numerorum fiant 2 $\frac{1}{2}$. & 7 $\frac{1}{2}$. Quærendi ſunt quadrati qui ad hos numeros accedant. Quæro ergo quæ pars quadrati addita ad 2 $\frac{1}{2}$. faciat quadratum, ea reperietur $\frac{1}{144}$, fitque quadratus $\frac{361}{144}$ cuius latus $\frac{19}{12}$. Rurſus quæro quæ pars quadrati ad 7 $\frac{1}{2}$ adiecta, faciat quadratum, ea reperitur $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{121}{16}$ à latere $\frac{11}{4}$. Quamobrem 10, diuidendus eſt in duos quadratos, ita vt latus vnius accedat ad $\frac{19}{12}$. Alterius vero ad $\frac{11}{4}$ ſeu ad $\frac{33}{12}$. Statuentur ergo per ad æqualitatem quadratorum latera 1 + 7 N. & 3 − 3 N. fietque ſumma quadratorum 10 + 58 Q. − 4 N. æqualis 10. vnde fiet 1 N. $\frac{2}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. ipſi quadrati $\frac{1849}{841}$. & $\frac{6561}{841}$. quorum ſumma 10. & ſi à primo auferas 2. à ſecundo 7. reſtant quæſitæ partes vnitatis $\frac{167}{841}$ & $\frac{674}{841}$.

Hæc autem quæſtio extendetur quoque ad quemlibet numerum, & ſic vniuerſalius proponetur.

Datum numerum diuidere in duas partes, vt vtrique addendo alterum atque alterum numerum, fiat vtrimque quadratus. Oportet autem compoſitum ex diuidendo numero, & vtroque adiiciendorum, quadratum eſſe, vel compoſitum ex duobus quadratis.

Diuidendus eſto 6. adiiciendi verò 3. & 7. Cùm ergo horum trium ſumma ſit 16. oportet diuidere 16. in duos quadratos, quorum alter ſit maior quàm 3. minor quàm 9. Alter verò ſit maior quàm 7. minor quàm 13. Ponatur primus 1 Q erit alter 16. − 1 Q. cuius latus ita fingendum eſt, vt 1 Q. cadat inter 3. & 9. ſumantur duo quadrati cadentes inter 3. & 9. puta 4. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 2. & $\frac{8}{3}$. Oportet igitur fictitium latus ita ponere, vt 1 N. ſit maior quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. Porro fiet valor Numeri ponendo fictitium latus 4 − aliquot numeris, quorum octuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quamobrem $\frac{8 N}{1 Q + 1}$ maior eſt quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. & tandem 8 N. maior eſt quàm 2 Q + 2. & 24. N. minor eſt quàm 8 Q. + 8. & vtraque æquatione per approximationem reſoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{21}{8}$ minor quàm $\frac{11}{3}$. Ponatur 3. & numeri 16 − 1 Q. latus ſtatuatur 4 − 3 N. fiet 1 N. $\frac{12}{5}$. erunt igitur latera quadratorum $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$, ipſi quadrati $\frac{144}{25}$ & $\frac{256}{25}$ & à primo auferendo 3. à ſecundo 7. remanent quæſitæ ſenarij partes $\frac{69}{25}$. & $\frac{81}{25}$.

Rurſus numerus 8. diuidendus ſit in duas partes, vt alteri addendo 5. alteri 7. fiat vtrumque quadratus. Cum ergo ipſorum 8. 5. 7. ſumma ſit 20. oportet diuidere 20. in duos quadratos quorum alter cadat inter 5. & 13. alter conſiſtat inter 7. & 15. ſumo medium arithmeticè inter vtrumque terminum, puta 9. & 11. & quæro quæ pars quadrati ad vtrumque addita faciat quadratum; inuenio hinc $\frac{49}{64}$. inde $\frac{1}{9}$. fiuntque quadrati $\frac{625}{64}$ & $\frac{100}{9}$ quorum latera in eadem denominatione ſunt $\frac{75}{24}$. & $\frac{80}{24}$. Diuidendus ergo mihi eſt 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{75}{24}$. Alterius latus ſit proxi-

numum $\frac{80}{34}$. erunt ergo per adæqualitatẽ huiuſmodi latera $2 + 27$ N. & $4 - 16$ N. eſtque ſumma quadratorum $20 + 985$ Q. $- 20$ N. vnde fit 1 N. $\frac{4}{197}$. & ſunt quadratorum latera $\frac{502}{197}$ & $\frac{724}{197}$ ipſi quadrati $\frac{252004}{38809}$. & $\frac{524176}{38809}$. Quod ſi à priore auferas 5. à poſteriore 7. remanent quæſitæ partes octonarij, $\frac{57959}{38809}$ & $\frac{252513}{38809}$.

QVÆSTIO XIV.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν τὸν αὐτὸν δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν, μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις παραυξανομένων. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ μ° γ̄. καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. πάλιν δεῖ τὸν ῑ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μ° γ̄. ἐὰν οὖν πάλιν τὸν ῑ. διέλωμεν εἰς τρεῖς τετραγώνους, τῇ τῆς παρισότητος ἀγωγῇ. ἔσται ἕκαστος αὐτῶν μείζων τριάδος. καὶ δυνησόμεθα ἀφ᾽ ἑκάστου αὐτῶν ἀφελόντες μ° γ̄. ἔχειν εἰς οὓς ἡ μονὰς διαιρεῖται. λαμβάνομεν ἄρτι τοῦ ῑ. τὸ τρίτον, γίνεται γ̄. ᾱ γον. καὶ ζητοῦμεν τί προστιθέντες μόριον τετραγωνικὸν ταῖς μονάσι γ̄. ᾱ γον. ποιήσομεν τετράγωνον πάντα ἐννάκις, καὶ δεῖ τῷ λ̄. προσθεῖναί τι μόριον τετραγωνικὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὅλον τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον ᾱ δυον. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν γίνονται δυ λ̄. μ° ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ε̄. μ° ᾱ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ κε̄. ςς ῑ. ἴσος δυ λ̄. μ° ᾱ. ὅθεν ὁ ςος μ° β̄. ἡ δύναμις μ° δ̄. τὸ δυναμοστὸν μ° ᾱ δον. εἰ ἄρα ταῖς μ° λ̄. προστίθεται μ° ᾱ δον. ταῖς μονάσι γ̄. ᾱ γον. προστεθήσεται ᾱ λςον. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος ρκᾱ λςων. δεῖ οὖν τὸν ῑ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἑκάστου τετραγώνου ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ μ° ιᾱ ςων. ἀλλὰ καὶ ὁ ῑ. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τοῦ τε θ̄. καὶ τῆς μονάδος. διαιροῦμεν οὖν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους τόν τε θ̄ κεων. καὶ τὸν ις̄ κεων. ὥστε τὸν ῑ. συγκεῖσθαι ἐκ τριῶν τετραγώνων. ἔκ τε τοῦ θ̄. καὶ τοῦ ις̄ κεων. δεῖ οὖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν τούτων παρασκευάσαι πάρισον ιᾱ ςων. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἰσι μ° γ̄. καὶ μ° δ̄ εων. καὶ μ° γ̄ εων. καὶ πάντα τριακοντάκις. καὶ γίνονται μ° Ϟ̄. καὶ μ° κδ̄. καὶ μ° ιη̄. τὰ δὲ ιᾱ ςων. γίνονται μ° νε̄. δεῖ οὖν ἑκάστην πλευρὰν κατασκευάσαι νε̄. πλάσσομεν ἑνὸς πλευρὰν μ° γ̄. ⋔ ςς λε̄. ἑτέρου δὲ ςς λζ̄ μ° γ̄ εων. γίνονται οἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τετράγωνοι. δυ ͵γφνε. μ° ῑ λείψει ςς ρις̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ῑ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ςος ρις̄ ͵γφνεων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ

VNITATEM diuidere in tres numeros, & cuilibet addere datum eundem numerum, & ita quemlibet quadratum facere. Oportet autem datum neque binarium eſſe, neque aliquem eorum qui ſit addito binario ad octonarij multiplicem. Imperatum ſit vt vnitas diuidatur in tres numeros, & cuilibet addatur 3. & ſic fiat quadratus. Rurſus oportet diuidere 10. in tres quadratos, vt quilibet ipſorum ſit maior quàm 3. Si ergo iterum diuidamus 10. in tres quadratos adæqualitatis ductu, erit quilibet ipſorum maior ternario, & poterimus ternario à quouis detracto, eos habere in quos vnitas diuidenda eſt. Sumamus itaque trientem de 10. hoc eſt $3\frac{1}{3}$. Et quæramus quæ pars quadrata poſſit adiici ad $3\frac{1}{3}$. vt fiat quadratus. Omnia nouies. Iam ad 30. oportet partem à quadrato denominatum addi, & fieri quadratum. Eſto pars adiicienda $\frac{1}{1Q}$. & omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 30 Q. $+ 1$. æqualia quadrato à latere 5 N. $+ 1$ fitque quadratus 25 Q. $+ 10$ N $+ 1$. æqualis 30 Q. $+ 1$. vnde fit 1 N. 2. & 1 Q. 4. Parſque quadratica $\frac{1}{4}$. Si ergo ad 30. adiicimus $\frac{1}{4}$. ad $3\frac{1}{3}$. addemus $\frac{1}{36}$. & fit quadratus $\frac{121}{36}$. Oportet igitur diuidere 10. in tres quadratos, vt vniuſcuiuſque quadrati latus ſit adæquale vnitatibus $\frac{11}{6}$. Atqui 10. componitur ex duobus quadratis 9. & 1. Diuidimus ergo 1. in duos quadratos $\frac{9}{25}$. & $\frac{16}{25}$. ita vt 10. conſtet ex tribus quadratis 9. $\frac{16}{25}$. & $\frac{9}{25}$. Oportet igitur horum cuiuſuis lateri adæqualem facere $\frac{11}{6}$. Sed & latera eorum ſunt 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia per 30. multiplicentur. Et fiunt 90. 24. & 18. Ipſe verò $\frac{11}{6}$. fit 55. Oportet itaque vnum quodque latus adæquare ipſi 55. fingamus vnius latus $3 - 35$ N. alterius autem 31 N. $+ \frac{4}{5}$. Alterius denique 37 N. $+ \frac{3}{5}$. fiunt ab his quadrati in vnam ſummam redacti 3555 Q. $+ 10. -$ 116 N. N. hæc æquantur 10. vnde inuenitur 1 N. $\frac{116}{3555}$. Ad poſitiones. Et fiunt la-

tera quadratorum data, ipſique etiam dantur, & reliqua ſunt manifeſta.

τῶν τετραγώνων δοθῶσι, ἅτινα καὶ αὐτοὶ, τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις παραυξανομένων, perperam vertit Xilander & ex eius verſione commodum aliquem ſeoſum recipere nequeunt. Itaque cùm eorum vim non perciperet, nihil ſuper huiuſmodi limitatione adnotauit. Certum eſt autem, vt quæſtio ſolui poſſit oportere vt triplum dati numeri vnitate auctum ſit quadratus, vel ex duobus, aut ex tribus etiam quadratis ſuapte natura compoſitis. Quare vt Diophanti limitatio ſit neceſſaria, oſtendendum eſt numeros 2. 10. 18. 26. 34. 42. & alios omnes qui fiunt addendo 2. ad aliquem octonarij multiplicem tales eſſe, vt eorum triplum vnitate auctum non poſſit eſſe quadratus, neque numerus ex duobus aut tribus quadratis compoſitus. Et de binario quidem, manifeſtum eſt eius triplum vnitate auctum puta 7. nec quadratum eſſe, nec è duobus vel tribus quadratis compoſitum. De aliis autem ſic demonſtrabitur.

Eſto A. quilibet octonarij multiplex, cui addito binario fiat B. & ſumatur C H triplum ipſius B. cui addita vnitate H K. fiat C K. dico C K nec quadratum eſſe, nec è duobus vel tribus quadratis compoſitum: Quia enim B. continet A & binarium, & C H triplus eſt ad B, patet C H continere triplum ipſius A, & triplum binarij, puta ſenarium. Sit ergo C F triplum ipſius A, erit reliquus F H ſenarius, in quo ſumendo binarium G H, relinquetur quaternarius F G.

A 16. B 18.
C———————F. . . .G. . H. K

Primum itaque C K non eſſe quadratum, ſic probatur. Quoniam A eſt multiplex octonarij, [1] eſt A par, addito binario fit rurſus B par. Quamobrem & C H multiplex ad B. par eſt, ac proinde C K eſt impar ex definitione. Si ergo C K. ponatur quadratus, ablata vnitate, [2] reliquus C H. erit pariter par. [3] Quare quaternarius eum metietur. Sed idem quaternarius metitur C F multiplicem octonarij, ergo idem quaternarius metietur reliquum F H. ſed & quaternarius metietur ſeipſum, puta F G. ergo idem quaternarius metietur reliquam binarium G H. Quod eſt impoſſibile. Quare C K non eſt quadratus.

21. noni | 21. 1. poriſ. | 10. 1. poriſ.

Deinde C K. non componi ex duobus quadratis ſic oſtendo. Etenim ſi componatur ex duobus quadratis, non erit vterque par, nec vterque impar, alioquin ipſe C K. eſſet par, contrà id quod oſtenſum eſt. Neceſſe eſt ergo alterum quadratorum parem eſſe, alterum imparem. [4] At quadratus par eſt pariter par [5] & à quadrato impare auferendo vnitatem, relinquitur pariter par. Igitur à numero C K. auferendo vnitatem, reliquus C H. componitur ex duobus pariter paribus, [6] ac proinde C H. eſt pariter par. Quare vt prius ſequitur quaternarium metiri binarium. Quod eſt abſurdum. Igitur C K. non componitur ex duobus quadratis.

20. 1. poriſ. | 21. 1. poriſ. | 16. 1. poriſ.

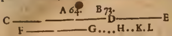
Denique ſi C K. ponatur componi ex tribus quadratis; non erit quilibet illorum par; nec erunt duo impares & tertius par; ſic enim fieret ex illis compoſitus C K. par, contra id quod oſtenſum eſt. Relinquitur ergo tres illos quadratos vel impares eſſe omnes; vel duos eſſe pares & tertium imparem. Atqui neutrum poſſibile eſt. Nam primò ſi ponantur duo pares & tertius impar, ſi à tertio auferatur vnitas, [7] relinquetur pariter par, quo addito aliis duobus quadratis itidem pariter paribus [8] fiet totus C H. pariter par. Quare rurſus inferetur quaternarium metiri binarium. Quod eſt impoſſibile. Deinde ſi quilibet trium quadratorum ex quibus C K. componi dicitur, ponatur impar cùm à quolibet ipſorum detracta vnitate relinquatur multiplex octonarij, vt oſtenſum eſt ad quadrageſimam quartam quarti, & euidentius demonſtrabitur ad octauam de numeris multangulis: patet ſi à compoſito ex tribus, nempè à toto C K, auferatur ternarius G K, reſiduum C G, multiplicem eſſe octonarij: ſed & C F. multiplex eſt octonarij ex conſtructione. Igitur octonarius metiens totum C G. & ablatum C F, metietur & reliquum quaternarium F G. Quod eſt impoſſibile. Non erit ergo C K. quadratus, nec compoſitus è duobus vel tribus quadratis. Quod demonſtrandum erat.

21. 1. poriſ. | 16. 1. poriſ.

Ex his liquidò apparet eum eſſe ſenſum verborum Diophanti, quem expreſſimus verſione noſtra, nam ingenioſa eſt, & authore digna huiuſmodi limitatio. Cæterùm quamuis, vt oſtenſum eſt, hæc conditio ſit neceſſaria, non eſt tamen ſufficiens, nam non ſolùm numeri omnes hac limitatione comprehenſi ſoluendæ quæſtioni ſunt inutiles, ſed præterea numerus 9. & omnes alij qui fiunt addito 9. ad 32. vel ad aliquem eius multiplicem, quales ſunt 41. 73. 105. &c. nam horum triplum addita vnitate, neque quadratus eſt, neque numerus è duobus vel tribus quadratis compoſitus. Et quidem de ipſo 9. patet experientia, nam eius triplum vnitate auctum, puta 28. nec quadratus eſt, nec è duobus vel tribus quadratis compoſitus. De aliis autem ſic demonſtratur. Eſto A multiplex ad 32. cui addendo 9. fiat B. cuius triplum vnitate auctum eſto C E. Dico C E. nec quadratum eſſe, nec è duobus vel tribus quadratis compoſitum. Quia enim B. continet A. & nouenarium, ipſe C E. continet triplum ipſius A, & triplum ipſius 9. & vnitatem. Sit C D triplum ipſius A, erit ergo D E. tri-

plum nouenarij & vnitas , puta numerus 28. Quare cùm C D. multiplex pariter paris ſit pariter par & ipſe etiam D E, ſeu 28. ſit pariter par erit totus C E, pariter par , ¹ ac proinde metietur cum quaternatius, ſit illius quadrans F L, conſtans ex F G. quadrante ipſius. C D, & ex G L. ſeu ſeptenario quadrante ipſius D E,

11. 1. poriſ.



ſeu 28. in quo ſumatur G H , quaternarius. H K binarius. K L vnitas. Cùm ergo C D ſit multiplex ad 32. & quadrans ipſius 32. ſit 8. patet F G multiplicem eſſe ad 8. & toties continere 8. quoties C D continet 32. Quare F G. eſt pariter par , & multiplex octonarij.

Primum itaque C E non eſſe quadratum ſic probatur. Si enim C E quadratus ſit , eo per quadratum 4. diuiſo , fiet & F L quadratus. Quare cùm F L ſit impar , conſtans ſcilicet ex pari F G. & ex impari G L, ablata inde vnitate, reſiduum F K, erit multiplex octonarij per oſtenſa ad quadrageſimam quartam quarti. Cùm ergo 8. metiatur totum F K, & ablatum F G, vt oſtenſum eſt , metietur & 8. reliquum ſenarium G K Quod eſt impoſſibile.

Deinde C E, non componi ex duobus quadratis ſic oſtenditur. Non poteſt componi ex duobus quadratis , quorum alter ſit par , alter impar , alioquin C E eſſet impar contra id quod oſtenſum eſt.
21. 1. poriſ. Non componetur etiam ex duobus imparibus ², nam ab vtroque auferendo vnitatem, relinquerentur duo numeri pariter pares , quorum ſumma eſſet pariter par ; ac proinde totus C E, conſtaret ex nu-
11. 1. poriſ. mero pariter pari , atque ex binario ³. Quare C E, eſſet pariter impar tantùm contra id quod demon-
20. 1. poriſ. ſtratum eſt. Reſtat ergo vt vterque quadratorum ex quibus C E componi dicitur, ſit par ⁴, vterque ergo erit pariter par. Quare eorum quadrantes ſumendo , fient duo quadrati æquales toti F L. Cùm ergo F L ſit impar , neceſſe eſt alterum quadratorum ex quibus componitur , eſſe parem , alterum imparem , & ab impari auferendo vnitatem cùm remaneat pariter par , patet F K ex duobus pariter
10. 1. poriſ. paribus compoſitum , eſſe pariter parem ⁵. Igitur metietur quaternarius totum F K, ſed & metietur pariter parem F G, & ſeipſum puta G H. Ergo idem quaternarius metietur reliquum binarium H K. Quod eſt abſurdum.

Denique C E non poteſt componi ex tribus quadratis. Etenim non poteſt componi ex tribus imparibus neque ex duobus paribus & tertio impari , alioquin ipſe C E eſſet impar contra demonſtrata. Non componetur etiam ex duobus imparibus , & tertio pari , ſic enim à quadratis imparibus concipiendo auferri vnitatem , concludetur totum C E componi ex tribus numeris pariter paribus , & ex
10. 1. poriſ. binario , ⁶ ac proinde C E eſſe pariter imparem tantùm , contra id quod oſtenſum eſt. Reſtat ergo C E componi ex tribus quadratis paribus , qui cùm ſint pariter pares , & eorum quadrantes ſint quadrati numeri , erit F L compoſitus ex tribus quadratis. Non erunt autem tres hi quadrati pares, neque duo impares erunt & tertius par , alioquin totus F L erit par contra demonſtrata. Non erunt etiam duo pares , tertius impar , nam ſi à tertio impari auferatur vnitas , relinquetur totus F K compoſitus ex tribus pariter paribus , ac proinde pariter par. Quare vt prius inferetur quaternarium metiri binarium. Demum non erunt tres quadrati impares , nam tunc à quolibet auferendo vnitatem , relinquentur tres numeri quos ſigillatim octonarius metietur per oſtenſa , ad quadrageſimam quartam quarti ac proinde à toto F L auferendo ternarium , relinquetur F H multiplex octonarij. Cùm ergo 8. metiatur totum F H, & ablatum F G vt oſtenſum eſt , metietur idem 8. reliquum quaternarium G H. Quod eſt impoſſibile. Non eſt ergo C E quadratus , nec componitur è duobus vel tribus quadratis. Quod erat demonſtrandum. Cæterùm an hæ duæ limitationes ſimul ſufficientes ſint , ita vt per vtramque ſimul excludantur omnes omnino numeri quorum triplum vnitate auctum non eſt quadratus , nec è duobus vel tribus quadratis compoſitus , non auſim temerè affirmare. Equidem vix adducor vt aliter ſentiam, cùm in omnibus numeris ab vnitate vſque ad 325. id ſim expertus.

OBSERVATIO D. P. F.

LImitatio ipſa Bacheti eſt inſufficiens , imo nec ipſius experientia ſatis fuit accurata, nam 37 numerus cadit in limitationem , non autem in regulam.

Vera limitatio ſic concipi debet.

Exponantur duæ progreſsiones quadrati altera ab 1, altera ob octonario , & vna alteri ſuperponatur ſic.

1 4 16 64 256 1024 4096 *&c.*
8 32 128 512 2048 8192 32768 *&c.*

Et conſiderando primò terminum primum ſecundæ qui eſt 8. oportet datum numerum non eſſe duplum vnitatis quia ipſi ſuperponitur vnitas, neque ſuperare duplo vnitatis multiplicem 8.

Deinde

Deinde conſiderando ſecundum terminum ſecundæ progreſſionis qui eſt 32, ſumatur duplum numeri ſuperpoſiti qui eſt 4. fit 8. cui ſi addas omnes in eadem progreſſione ſuperiori proxime antecedentes (in hoc exemplo inuenietur ſola vnitas) fit 9. ſumptis igitur duobus numeris 32 & 9. oportet datum numerum neque eſſe 9 neque ſuperare dicto numero 9. multiplicem 32. conſideretur mox tertius progreſſionis ſecundæ terminus qui eſt 128. ſumatur duplum numeri ſuperpoſiti qui eſt 16. fit 32, cui ſi addas omnes in eadem progreſſione ſuperiori proxime antecedentes qui iam ſunt 1. & 4. fit 37. ſumptis igitur duobus numeris 128. & 37 oportet datum numerum neque eſſe 37. neque ſuperare dicto 37. multiplicem 128.

Conſiderato deinde 4. progreſſionis ſecundæ termino fient ex methodo numeri 512 & 149. oportebit itaque datum numerum neque eſſe 149. neque ſuperare dicto 149. multiplicem 512. & eſt vniformis & perpetua in infinitum methodus quam neque Diophantus generaliter indicauit, nec Bachetus ipſe detexit cuius vel ipſa experientia fallit, vt iam præmonuimus, non ſolum in numero 37 qui eſt intra limites experientiæ de quâ fidem facit, ſed etiam in numero 149. & alijs.

Reliqua operatio Diophanti ex dictis ad duodecimam perſpicua redditur. Inuento $\frac{11}{6}$ latere quadrati cui adæquari oportet latera quadratorum in quos numerus 10. diuidendus eſt, ſumit latera quadratorũ ex quibus 10. ſuapte natura cõponitur, puta 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia reducendo ad eandem denominationem, fiunt hæc tria latera $\frac{90}{30}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{18}{30}$ ipſe verò $\frac{11}{6}$ fit $\frac{55}{30}$. Poſito ergo valore Numeri $\frac{1}{30}$ patet latera quadratorum quæſitorum ponẽda eſſe, vt facit Diophantus 3 − 35 N. 31 N. + $\frac{4}{5}$. 37 N. + $\frac{3}{5}$. & reliqua ſunt manifeſta. Placuit autem παρισότητα vertere cum Xilandro ad æqualitatem. Quia enim in huiuſmodi quæſtionibus Diophantus, cuidam lateri adæquat proximè latera quadratorum quæſitorum, non autem æquat propriè, vocat ille hanc comparationem παρισότητα, non autem ἰσότητα. Nos etiam non æqualitatem ſed adæqualitatem appellamus, ſicut etiam πάρισον vertimus adæquale.

Porrò ſolutionem quæſtionis omiſit Diophantus moleſtiæ fractionum ſe ſubtrahens, ſed talis eſt, fit 1 N. $\frac{116}{711}$ per quem ſi reſoluas hypoſtaſes, fiunt quadratorum latera $\frac{1321}{711}$ $\frac{1288}{711}$ $\frac{1285}{711}$. Ipſi quadrati $\frac{1745041}{505521}$ $\frac{1658944}{505521}$. $\frac{1651225}{505521}$. à quibus ſi auferas ſigillatim ternarium, reſtant quæſitæ partes vnitatis, videlicet $\frac{228478}{505521}$ $\frac{142381}{505521}$ $\frac{134662}{505521}$. Hæc autem quæſtio extendetur etiam ad quemlibet numerum, ſic eam proponendo.

Datum numerum ſecare in tres partes, & cuilibet addere eundem numerum, & facere quadratum. Oportet autem, vt numerus diuidendus adſumens triplum addititij numeri, faciat quadratum, vel numerum è duobus aut tribus quadratis compoſitum.

Diuidendus eſto 5. addititius numerus 3. Igitur 14. diuidendus eſt in tres quadratos, quorum quilibet excedat 3. ſumo $\frac{1}{3}$ de 14. puta $\frac{14}{3}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita, faciat quadratum ea inuenietur $\frac{1}{36}$ & fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Diuidendus ergo eſt 14. in tres quadratos, ita vt cuiuſlibet latus adæquetur $\frac{13}{6}$. At 14. ſuapte natura componitur ex tribus quadratis, quorum latera 3. 2. 1. fingentur ergo per adæqualitatem quæſitorum quadratorum latera 3 − 5 N. 2 + 1 N. & 1 + 7 N. eritque ſumma quadratorum 14 + 75 Q. − 12 N. æqualis 14. vnde fiet 1 N. $\frac{4}{25}$. ſunt ergo quadratorum latera $\frac{55}{25}$ $\frac{54}{25}$ $\frac{53}{25}$. ipſi quadrati $\frac{3025}{625}$ $\frac{2916}{625}$ $\frac{2809}{625}$. à quibus ſigillatim auferendo ternarium remanent quæſitæ quinarij partes $\frac{1150}{625}$ $\frac{1041}{625}$ $\frac{934}{625}$.

Rurſus vniuerſalius etiam proponetur quæſtio, hoc pacto.

Datum numerum ſecare in quotlibet partes, vt cuilibet addendo eundem numerum, fiat quadratus.

Sit ſecandus 6. in quatuor partes vt cuilibet addendo 4. fiat quadratus, oportet ergo quadruplum ipſius 4. adſumpto 6. puta 22. diuidere in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 4. Porrò 22. diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4. quorum primus 9. excedit 4. & duorum reliquorum ſumma 13. excedit triplum ipſius 4. Quare ſupereſt vt diuidamus 13. in tres quadratos quorum quilibet excedat 4. ſumo trientem de 13. puta $\frac{13}{3}$. & quæro quæ pars quadrati huic addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{144}$. & fit quadratus $\frac{625}{144}$ cuius latus $\frac{25}{12}$. Porrò 13. diuiditur in tres quadratos quorum latera $\frac{9}{5}$. 2. $\frac{12}{5}$. Quare per adæqualitatem conſtituentur quæſitorum quadratorum latera $\frac{9}{5}$ + 17 N. 2 + 5 N. $\frac{12}{5}$ − 19 N. & fit quadratorum ſumma 13 + 675 Q. − 10 N. æqualis 13. vnde fit 1 N. $\frac{2}{135}$. ſunt ergo latera quadratorum $\frac{277}{135}$ $\frac{280}{135}$ $\frac{286}{135}$. Ipſi quadrati $\frac{76729}{18225}$ $\frac{78400}{18225}$ $\frac{81796}{18225}$. quibus ſi addatur quartus quadratus 9. habentur quatuor quæſiti quadrati, à quibus auferendo ſigillatim numerum 4. remanent quæſitæ partes ſenarij $\frac{3829}{18225}$ $\frac{5500}{18225}$ $\frac{8896}{18225}$ & 5. Hic nulla conditio præſcribitur, quia quilibet numerus in quatuor pluresve quadratos diuidi poteſt, vt abundè docuimus ad trigeſimam primam quarti, vbi etiam quarundem

quæſtionum explicationem in hunc locum reiecimus, quas iam enodare libet. Sit ergo propoſitum.

Inuenire duos quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum, datum faciat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum binario auctum diuidi poſſe in duos quadratos.

Datus eſto 6.

Patet ex dictis ad trigeſimam primam quarti, ſi ad 6. addamus duos quadrantes vnitatis, puta $\frac{1}{2}$ ſummam $6\frac{1}{2}$ æquari debere duobus quadratis, à quorum lateribus ſi auferatur ſigillatim $\frac{1}{2}$ reſtant quæſitorum quadratorum latera. Porro ad vitandas minutias ducto $6\frac{1}{2}$ in 4. fit 26. diuidendus in duos quadratos. Quia verò $6\frac{1}{2}$ ita diuidendus eſt in duos quadratos, vt quilibet excedat $\frac{1}{4}$. patet eius quadruplum 26. ita diuidendum in duos quadratos, vt quilibet excedat 1. id eſt vt quilibet ſit maior quàm 1. minor quàm 25. Sumpto ergo medio inter 1. & 25. puta 13. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum ea eſt $\frac{1}{25}$. fitque quadratus $\frac{324}{25}$ à latere $\frac{18}{5}$. Ergo latera quadratorum adæquari debent $\frac{18}{5}$. Quare ſumptis lateribus quadratorum ex quibus 26. componitur 1. & 5. fingentur per adæqualitatem quæſitorum latera 1 + 8 N. & 5 − 4 N. fit ſumma quadratorum 26 + 80 Q. − 24 N. æqualis 26. vnde fit 1 N. $\frac{3}{10}$. ſunt igitur latera quadratorum $\frac{17}{5}$. $\frac{19}{5}$. Quorum ſemiſſes puta $\frac{17}{10}$ $\frac{19}{10}$ ſunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Quamobrem à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæſitorum quadratorum latera $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{5}$. nam horum ſumma cum ſumma quadratorum conficit 6.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum, datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario, diuidi poſſe in tres quadratos.

Datus eſto 4.

Ergo $4\frac{3}{4}$ diuidendus eſt in tres quadratos quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. omnia per 4. fit 19. diuidendus in tres quadratos, quorum quilibet excedat 1. Diuiditur autem 19. in tres quadratos 9. 9. 1. quorum primo retento, ſupereſt vt reſiduum de 19. puta 10. diuidamus in duos quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quæro partem quadrati quæ ad 5. addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{81}{16}$ à latere $\frac{9}{4}$. fingo ergo latera quadratorum per adæqualitatem 1 + 5 N. & 3 − 3 N. fitque ſumma quadratorum 10 + 34 Q. − 8 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{4}{17}$. ſunt igitur latera $\frac{37}{17}$ & $\frac{39}{17}$. & ſic totus 19. diuiſus eſt in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{37}{17}$. $\frac{39}{17}$. quorum ſemiſſes $\frac{3}{2}$ $\frac{37}{34}$ $\frac{39}{34}$ ſunt latera quadratorum ex quibus $4\frac{3}{4}$. componitur. Proinde à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæſitorum quadratorum latera 1. $\frac{10}{17}$. $\frac{11}{17}$ quorum ſumma cum ſumma quadratorum conficit 4.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum datum conficiat numerum.

Hic nulla conditio præſcribitur, quia quilibet Numerus in quatuor vel plures quotlibet quadratos diuidi poteſt. Sufficit ergo, ſi datus numerus tot quadrantibus vnitatis auctus, quot quadrati poſtulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. ſeu quod idem eſt; ſi dati numeri quadruplum auctum tot vnitatibus quot quadrati poſtulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quod perficietur eadem arte.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum ſumma adſcito quolibet multiplice ſummæ laterum conficiat quadratum.

Sint inueniendi quatuor quadrati, quorum ſumma adſcito triplo ſummæ laterum, faciat 3. Quoniam per lemma vniuerſaliter demonſtratum ad decimam tertiam quarti, omnis quadratus auctus triplo ſui lateris, & numero $2\frac{1}{4}$ facit quadratum, cuius latus detracto $1\frac{1}{2}$ exhibet prioris quadrati latus. At quater $2\frac{1}{4}$ conficit 9. & volumus quatuor quadratos cum ſuis lateribus efficere 3. patet addito 3. ad 9. eò deuentum eſſe vt numerus 12. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat $2\frac{1}{4}$. nam ſi à latere cuiuſlibet auferamus $1\frac{1}{2}$. reſtabunt quæſitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 12. in quatuor quadratos 4. 4. $\frac{64}{25}$ $\frac{36}{25}$. quorum tres primi ſatis congruunt propoſito, cùm quilibet excedat $2\frac{1}{4}$. Quartus verò minor eſt. Quare oportet rurſus diuidere 12. in quatuor alios quadratos propoſito ſatisfacientes. Sumo 3. quadrantem ipſius 12. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{225}$. fitque quadratus $\frac{676}{225}$ à latere $\frac{26}{15}$. Ita igitur fingam quadratorum latera, vt quotlibet per adæqualitatem proximè accedat ad $\frac{26}{15}$. Et quia inuentorum latera ad eas-

dein redacta denominationem ſuot $\frac{30}{15}$. $\frac{30}{15}$. $\frac{24}{15}$. $\frac{18}{15}$. ſumo differentias numeratorum à 26. & fingo latera quæſitorum quadratorum 2 − 4 N. 2 − 4 N. $\frac{8}{5}$ + 2 N. $\frac{6}{5}$ + 8 N. fitque quadratorum ſumma 12 + 100 Q. − $\frac{32}{5}$ N. æqualis 12. vnde fit 1 N. $\frac{32}{500}$. ſeu $\frac{16}{250}$. Quare latera quadratorum ſunt $\frac{436}{250}$. $\frac{436}{250}$. $\frac{432}{250}$. $\frac{428}{250}$. Proinde à quolibet auferendo 1 $\frac{1}{2}$ ſuperſunt quæſitorum quadratorum latera $\frac{61}{250}$. $\frac{61}{250}$. $\frac{57}{250}$. $\frac{53}{250}$. ſuntque ipſi quadrati $\frac{3721}{62500}$. $\frac{3721}{62500}$. $\frac{3249}{62500}$. $\frac{2809}{62500}$. quorum ſumma cum triplo ſummæ laterum quod eſt $\frac{174000}{62500}$. facit $\frac{187500}{62500}$. ſeu 3.

QVÆSTIO XV.

VNITATEM diuidere in tres numeros, & addere cuilibet ipſorum alium atque alium datum numerum, & facere vnumquemque quadratum. Sunto dati 2. & 3. & 4. Rurſum eò res rediit vt diuidatur 10. in tres quadratos, vt primus ipſorum ſit maior binario, ſecundus ſit maior ternario, tertius ſit maior quaternario. Si ergo vnitatem bifariam ſecantes, cuilibet datorum adiiciamus $\frac{1}{2}$. Oportebit quærere vnum quadratorum maiorem quam 2. minorem verò quam 2 $\frac{1}{2}$. Alterum maiorem quàm 3. minorem quàm 3 $\frac{1}{2}$. tertium denique maiorem quàm 4. minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eoque omnia deducuntur vt 10. ex duobus conflatum quadratis, rurſus diuidam in alios duos, vt vnus eorum maior ſit quàm 2. minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Et ab hoc ſi auferamus 2. inueniemus vnam partium vnitatis. Rurſus alterum quadratorum diuidemus in alios duos quadratos, ita vt vnus ipſorum ſit maior quàm 3. minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. A quo item ſi detraxero 3. inueniam alterum quæſitorum. Eadem etiam ratione inueniemus tertium.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὅτε β. καὶ ὁ γ. καὶ ὁ δ. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ τὸν ι. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως αὐτῶν ὁ μὲν πρῶτος μείζων ᾖ δυάδος. ὁ δὲ ἕτερος μείζων ᾖ τριάδος. ὁ δὲ τρίτος μείζων ᾖ μο δ. ἐὰν οὖν τὴν μονάδα μο α. δίχα τεμόντες προσθῶμεν τοῖς δοθεῖσιν, ἀνὰ μονάδος ἡμίσεως, γίνεται ἕνα τῶν τετραγώνων. ζητεῖν μείζονα μὲν δυάδος ἐλάσσονα δὲ μο β. α̅ ∠. ἕτερον μείζονα μὲν μο γ. ἐλάσσονα δὲ μο γ. α̅ ∠. τὸν δὲ τρίτον μείζονα μὲν μο δ. ἐλάσσονα δὲ μο δ. α̅ ∠. καὶ ἀπάγεται ἅπαντα εἰς τὸ τὸν ι. συγκείμενον ἐκ δύο τετραγώνων μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μο β. ἐλάσσων δὲ μο β. α̅ ∠. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν δυάδα, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ πάλιν τὸν ἕτερον τῶν τετραγώνων μεταδιαιρῶμεν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς μὲν αὐτῶν μείζων ᾖ μο γ. ἐλάσσων δὲ μο γ. α̅ ∠. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν μονάδας τρεῖς, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ζητουμένων. ὥστε καὶ τὸν τρίτον ὁμοίως εὑρήσομεν.

IN QVÆSTIONEM XV.

EX adnotatis ad duodecimam & decimam tertiam pendet quæſtionis huius enodatio. & verba Diophanti ſatis ſunt perſpicua, ſed totam operationem, quam ipſe prætermiſit, in tyronum gratiam ſubiicere non grauabor. Quoniam 10. diuidendus eſt in tres quadratos, quorum primus ſit maior quàm 2. ſecundus quàm 3. tertius quàm 4. Diuido primum 10. in duos quadratos quorum alter eadat inter 2. & 3. id fiet per ea quæ attulimus ad duodecimam, eruntque huiuſmodi quadrati $\frac{1849}{841}$ & $\frac{6561}{841}$ quorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. Habeoque iam vnum ex tribus quadratis quæſitis, puta $\frac{1849}{841}$. qui maior eſt quàm 2. minor quàm 3. vnde ſi auferatur 2. remanet vna ex quæſitis partibus vnitatis, puta $\frac{167}{841}$. Reſtat ergo vt reliquum quadratum $\frac{6561}{841}$ diuidamus in duos quadratos quorum alter eadat inter 3. & 4. Id fiet per ipſam operationem decimæ tertiæ. Quæro primum duos quadratos qui cadant inter 3. & 4. quales ſunt $\frac{256}{81}$ & $\frac{289}{81}$ quorum latera $\frac{16}{9}$ & $\frac{17}{9}$. Tum poſito altero quadratorum 1 Q. altero $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. poſterioris latus ita fingendum eſt. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. fingi autem debet hoc latus à $\frac{81}{29}$ minus aliquot Numeris quorum duplum ductum in $\frac{81}{29}$ & diuiſum per ipſorum numerorum quadratum vnitate auctum fiet valor Numeri. Quare poſito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{162}{29}$ N. diuiſus per 1 Q. + 1. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. Et vtraque æquatione per approximationem reſoluta fiet 1 N. maior quàm $\frac{1564}{609}$ minor quàm $\frac{1261}{454}$. Ponatur ergo 2 $\frac{3}{4}$. & fingatur numeri $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. latus, $\frac{81}{29}$ − 2 $\frac{3}{4}$ N. fiet 1 N. $\frac{7128}{3973}$. latus ſcilicet primi quadrati, eritque latus ſecundi $\frac{8505}{3973}$. ſuntque ipſi quadrati $\frac{50808384}{15784729}$ & $\frac{72335025}{15784729}$. à priore

ſi auferas 3. A poſteriore 4. remanent reliquæ partes vnitatis [illegible], & [illegible], quibus ſi addas primam iam inuentam [illegible] ſeu vt idem ſit denominator [illegible]. ſoluta erit quæſtio.

Poſſet etiam aliter inſtitui operatio, fingendo ſcilicet ſimul & ſemel tria latera quadratorum, eodem artificio quo iam vſi ſumus ad decimam tertiam. Quoniam enim 10. diuidendus eſt in tres quadratos quorum primus ſuperet 2. ſecundus 3. tertius 4. Diuido vnitatem in tres trientes, & cuilibet datorum numerorum addo $\frac{1}{3}$. fiuntque $2\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. Iam quæro partes quadrati quæ ſingulis additæ quadratum faciant, eæ ſunt $\frac{1}{1296}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{144}$ & fiunt quadrati $\frac{3025}{1296}$ $\frac{121}{36}$ $\frac{625}{144}$. quorum latera $\frac{55}{36}$ $\frac{66}{36}$ $\frac{25}{12}$. vt omnium ſit idem denominator. Oportet igitur ita fingere latera quadratorum, vt primum adæquetur $\frac{55}{36}$. ſecundum adæquetur $\frac{66}{36}$. tertium adæquetur $\frac{75}{36}$. Porrò numerus 10. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. quæ vt reducantur ad eandem denominationem cum lateribus adæqualitatis, erunt hæc $\frac{540}{180}$ $\frac{108}{180}$ $\frac{144}{180}$. Illa verò $\frac{275}{180}$ $\frac{330}{180}$ $\frac{375}{180}$. Itaque fingentur per adæqualitatem latera primum $\frac{3}{5}$ + 167 N. ſecundum $\frac{4}{5}$ + 186 N. tertium 3 − 166 N. fitque ſumma quadratorum 10 + 89710 Q. − 492 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{246}{44855}$ ſunt igitur quæſita latera, primum $\frac{13599}{8971}$. ſecundum $\frac{16328}{8971}$. tertium $\frac{18795}{8971}$. Ipſi verò quadrati $\frac{184932801}{80478841}$ $\frac{266603584}{80478841}$ $\frac{353252025}{80478841}$. Et ſi auferas 2. à primò, 3. à ſecundo, 4. à tertio, remanent quæſitæ partes vnitatis $\frac{23975119}{80478841}$ $\frac{25167061}{80478841}$ $\frac{31336661}{80478841}$.

Cæterùm non eſt dubium, & hîc requiri huiuſmodi conditionem.

Oportet autem datorum numerorum ſummam vnitate auctam conficere numerum qui in tres quadratos diuidi poſſit.

Patet etiam eodem artificio quemlibet numerum diuidi poſſe in tres partes, ita vt cuilibet addendo alterum atque alterum numerum fiat quadratus. Et rurſus tam vnitatem quàm numerum quemlibet diuidi poſſe in partes quotlibet, quibus addendo datos quoſcunque numeros, fiant quadrati. Quæ omnia facilè mihi eſſet exemplis commonſtrare, ſed huic labori, ne ſim prolixior, ſuperſedebo.

QVÆSTIO XVI.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ζητουμένοις τρισὶν ἀριθμοῖς ὁ μείζων καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον. ὁμοίως καὶ ὁ μέσος μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου. οἱ ἄρα τρεῖς δὶς γινόμενοι ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μο ι. ἀλλὰ δὶς οἱ τρεῖς εἰσι μο κ. δεῖ οὖν τὸν κ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μο ι. ὁ δὲ κ. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, τοῦ τε ις. καὶ τοῦ δ. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων μο δ. δεήσει τὸν ις. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μο ι. ἐμάθομεν δὲ τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως εἷς τῶν αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μο ϛ. ἐλάσσων δὲ μο ι. ἔσονται ἀμφότεροι μο ις. ὥστε διῃρήσθω κ. εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστον αὐτῶν ἐλάσσονα εἶναι μο ι. καὶ ἐπὶ ἕκαστον ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι. εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς οἳ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιοῦσι τετράγωνον.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt bini coniuncti quadratum conficiant. Datus eſto 10. Quoniam de tribus qui quæruntur numeris maior & medius ſimul faciunt quadratum, ſed & medius cum tertio facit quadratum, & tertius cum primo. Ergo tres bis ſumpti faciunt tres quadratos, quorum quilibet minor eſt quàm 10. Sed tres bis ſumpti ſunt 20. Oportet ergo diuidere 20. in tres quadratos, quorum quiuis minor ſit quàm 10. Atqui 20. componitur è duobus quadratis 16. & 4. Et ſi de quæſitis vnum ponamus 4. oportebit diuidere 16. in duos quadratos, quorum quiuis minor ſit quàm 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, vt quiuis eorum maior ſit quàm 6. minor quàm 10. ſunto ambo ſimul 16. Itaque 20. diuiſus erit in tres quadratos, quorum quilibet minor erit quàm 10. & ſi vnumquemque auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorum bini coniuncti quadratum faciunt.

IN QVAESTIONEM XVI.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & ex dictis in præcedentibus pendet. Certum eſt autem cùm tres numeri ſumuntur bini & bini, vnumquemque bis ſumi, quare poſita ſumma numerorum 10. neceſſe eſt ſummam quadratorum quos bini conficiunt eſſe 20. Igitur oportet diuidere 20. in

tres quadratos quorum quilibet ſit minor quàm 10. tum verò ſingulos quadratos ab ipſo 10. detrahendo, remanebunt tres quæſiti numeri, vt conſtat ex Canone decimæ-ſextæ primi. Quoniam verò 20. diuiditur ſuaptè natura in duos quadratos 4. & 16. quorum primus minor eſt quàm 10. ac proinde congruit propoſito. Reſtat vt diuidamus 16. in duos quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 10. maior quàm 6. quia ſcilicet 10. & 6. conficiunt 16. Hoc autem fiet per operationem decimætertiæ hac arte. Sumo duos quadratos inter 6. & 10. puta 9. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 3. & $\frac{8}{3}$. Poſitoque altero quadratorum quæſitorum 1 Q. altero 16 − 1 Q. fingo huius latus à 4 − tot numeris, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. fiet autem valor numeri, ſi octuplum numeri Numerorum diuidatur per ipſorum quadratum vnitate auctum. Quare poſito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{8\,N}{1\,Q + 1}$. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. vnde vtraque hac æquatione reſoluta, inuenietur 1 N. maior quàm $\frac{7}{3}$. minor quàm $\frac{5}{2}$. ponatur $\frac{12}{5}$. Igitur quadrati 16 − 1 Q. latus ſtatuetur 4 − $\frac{12}{5}$. N. & fiet 1 N. $\frac{480}{169}$. latus ſcilicet vnius quæſitorum quadratorum, eſtque alterum $\frac{476}{169}$. Quamobrem tres quæſiti quadrati ſunt 4. $\frac{230400}{28561}$. $\frac{226576}{28561}$. quos ſi auferas ſigillatim à denario, reſtant tres denarij quæſitæ partes 6 $\frac{55210}{28561}$. & $\frac{59034}{28561}$.

Hinc collige huic quoque quæſtioni præſcribi debere huiuſmodi conditionem.

Oportet dati numeri duplum diuidi poſſe in tres quadratos.

Poteſt etiam aliter inſtitui operatio, fingendo ſimul & ſemel trium latera quadratorum, & imitando artificium decimæquartæ hoc pacto. Quoniam 20. diuidi debet in tres quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 10. ſumo trientem de 20. puta 6 $\frac{2}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, hæc eſt $\frac{1}{144}$. fitque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{12}$. fingenda ergo ſunt latera quadratorum, vt vnumquodque adæquet $\frac{31}{12}$. Porrò numerus 20. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 4. $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. quæ redacta ad eandem denominationem cum numero adæqualitatis, fiunt 240. $\frac{96}{60}$. $\frac{72}{60}$. Ipſe verò adæqualitatis numerus fit $\frac{155}{60}$. Quamobrem fingentur aptè latera quadratorum 4 − 85 N. $\frac{8}{5}$ + 59 N. $\frac{6}{5}$ + 83 N. eſtque ſumma quadratorum 20 + 17595 Q. − 292 N. æqualis 20. vnde fit 1 N. $\frac{292}{17595}$. ſunt ergo latera quadratorum $\frac{9112}{3519}$. $\frac{9076}{3519}$. & $\frac{9070}{3519}$. Ipſi quadrati $\frac{83028544}{12383361}$. $\frac{82373776}{12383361}$. & $\frac{82264900}{12383361}$. quos ſi auferas ſigillatim à denario, remanent vtique quæſitæ denarij partes $\frac{40805066}{12383361}$. $\frac{41459834}{12383361}$. $\frac{41568710}{12383361}$.

QVÆSTIO XVII.

DATVM numerum diuidere in quatuor numeros, vt terni coniuncti quadratum faciant. Datus eſto 10. Quoniam qui à primo deinceps tres iuncti faciunt quadratum, itemque tres à ſecundo, & tres à tertio, & tres à quarto deinceps idem præſtant. Ergo quatuor numeri ter ſumpti faciunt quatuor quadratos. At quatuor numeri ter ſumpti faciunt 30. Ergo 30. diuidendus eſt in quatuor quadratos, quorum quilibet minor ſit quàm 10. Hoc autem ſic inuenietur. Si per adæqualitatem ſtatuamus quemlibet 7 $\frac{1}{2}$. & vnumquemque quadratorum auferamus de 10. inueniemus quæſitos. Sin autem animaduerto 30. componi ex 16. 9. 4. & 1. ponam 4. & 9. quandoquidem vterque minor ſit quàm 10. ſi ergo 17. diuidamus in duos quadratos vt didicimus, quorum alter maior ſit quàm 8 $\frac{1}{2}$. minor quàm 10. erit vterque ipſorum minor quàm 10. Proinde ſi vtrumque eorum de 10. auferamus, inueniemus reliquos de quæſitis. Nam duo iam ſunt inuenti, nempe 6. & 1 & ſoluetur quæſtio.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, οἳ σὺν τρεῖς λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπεὶ οὖν οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς ποιοῦσι τετράγωνον. ἀλλὰ καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς, τὸ αὐτὸ ποιοῦσι, καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιοῦσι. καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς. οἱ ἄρα τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλ' οἱ τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι μο λ. δεήσει ἄρα μο λ. διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους ὅπως ἕκαστος ἐλάσσων ᾖ μο ι. τοῦτο δὲ οὕτως εὑρεθήσεται. ἐάν τε διὰ τῆς παρισότητος τάξαντες ἕκαστον αὐτῶν μο ζ. α ϛ''. καὶ ἕκαστον τετραγώνων ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι. εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους, εἰ δὲ μὴ ὁρῶ τὸν λ. συγκείμενον ἐκ τοῦ ιϛ. καὶ τοῦ θ. καὶ τοῦ δ. καὶ τῆς μο α. θῶμεν τὸν δ. καὶ τὸν θ. ἐπειδὴ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ἐστὶ μο ι. λοιπὸν γίνεται μο ιζ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάττων ᾖ μο ι. ἐὰν οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους ὡς ἐμάθομεν ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μο η. α ϛ''. ἐλάσσονα δὲ μο ι. ἔσται ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάσσων μο ι καὶ ἐὰν ἑκάτερον αὐτῶν ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς τῶν ζητουμένων [δύο γὰρ ἤδη εὑρήκαμεν] ὃν μὲν μο ϛ. ὃν δὲ μο α. ὥστε λελύσθαι τὸ ζητούμενον.

IN QVAESTIONEM XVII.

DVPLICEM operandi modum tangit Diophantus in propoſito exemplo. Primus talis eſt. Quoniam 30. diuidendus eſt in quatuor quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 10. ſumo quadrantem de 30. puta $7\frac{1}{2}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{121}{16}$. à latere $\frac{11}{4}$. Curandum ergo vt diuidatur 30. in quatuor quadratos, ita vt cuiuſlibet latus adæquatur $\frac{11}{4}$. Atqui 30. ſuaptè natura diuiditur in quatuor quadratos, quorum latera ſunt 4. 3. 2. 1. Quare per adæqualitatem ſtatuentur quæſitorum quadratorum latera $4 - 5$ N. $3 - 1$ N. $2 + 3$ N. $1 + 7$ N. eritque ſumma quadratorum $30 + 84$ Q. $- 20$ N. æqualis 30. vnde fiet 1 N. $\frac{5}{21}$. Erunt igitur latera quadratorum $\frac{59}{21}$. $\frac{58}{21}$. $\frac{57}{21}$. $\frac{56}{21}$. Ipſi verò quadrati $\frac{3481}{441}$. $\frac{3364}{441}$. $\frac{3249}{441}$. $\frac{3136}{441}$. à quibus ſi auferatur ſigillatim numerus 10. remanent quæſitæ denarij partes $\frac{929}{441}$. $\frac{1046}{441}$. $\frac{1161}{441}$. $\frac{1274}{441}$.

Secundus operandi modus talis eſt. Quoniam 30. ſuapte natura diuiditur in quatuor quadratos 16. 9. 4. 1. quorum duo 9. & 4. propoſito congruunt cùm ſint minores denario, reſtat vt reliquorũ ſummam, puta 17. diuidamus in duos alios quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 10. maior quàm 7. quod ſi fiet, ſumo ſemiſſem de 17. puta $8\frac{1}{2}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{144}$ & fit quadratus $\frac{1225}{144}$ à latere $\frac{35}{12}$. Quare per adæqualitatem fingentur latera quadratorum $4 - 13$ N. & $1 + 23$ N. eſt ſumma quadratorum $17 + 698$ Q. $- 58$ N. æqualis 17. vnde fit 1 N. $\frac{29}{349}$. Quare latera quadratorum ſunt $\frac{1019}{349}$ $\frac{1016}{349}$. Ipſi quadrati $\frac{1038361}{121801}$ & $\frac{1032256}{121801}$. quibus addendo tertium & quartum 4. & 9. habemus totum 30. diuiſum in quatuor quadratos, quos ſigillatim auferendo à denario, remanent quæſitæ denarij partes, puta $\frac{185754}{121801}$. $\frac{179649}{121801}$. 6. & 1.

Cæterùm in textu Græco verba illa mendo non carent, ἐὰν οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους, ὡς ἐθέλομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μº η. ∠ʹ β. ἐλάσσονα δὲ μº ι. nam ſi numerus η. ∠ʹ β. hoc eſt $8\frac{1}{2}$ retinendus eſt, procul dubio non ἑκάτερον, ſed ἕτερον legendum eſt, nam impoſſibile eſt numerum 17. diuidi in duos quadratos quorum vterque ſit maior quàm $8\frac{1}{2}$ vt euidens eſt. Quod ſi vocem ἑκάτερον retinere libet, numerus η. ∠ʹ β mutandus eſt in ζ. ſeu in 7. verè enim numerus 17. diuidendus eſt in duos quadratos quorum vterque ſit maior quàm 7. minor quàm 10. ſed & poſtrema verba mutila erant, vt ex iis quæ adiecimus manifeſtum eſt.

Demum moneo eodem prorſus artificio datum numerum diuidi poſſe in quinque partes, vt quaternæ quadratum conficiant, vel in ſex partes, vt quinæ quadratum faciant, & ſic in infinitum. Reſtat vt quæſtionem explicemus, quam in hunc locum reiecimus in adnotatione ad ſextam tertij nimirum.

Inuenire quinque numeros quadrato æquales, vt quaterni reliquum ſuperent quadrato numero.

Ponatur ſumma eorum quilibet quadratus, puta 1. Quia ergo vt oſtenſum eſt ad vigeſimam primi ſumma exceſſuum tripla eſt ſummæ numerorum, erit ſumma exceſſuum 3. Oportet igitur diuidere 3. in quinque quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 1. Et quidem diuidendo bis vnitatem in duos quadratos, totus 3. diuiſus erit in quinque quadratos, puta in $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{25}{169}$. 1. Sed quia quintus non eſt minor vnitate, adiicio eum vni priorum, puta $\frac{25}{169}$ & fit $1\frac{25}{169}$. diuidendus rurſus in duos alios quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 1. ſemiſſis ſummæ eſt $\frac{97}{169}$. cui proximus eſt quadratus $\frac{100}{169}$. à latere $\frac{10}{13}$. Ita ergo diuidendus $1\frac{25}{169}$. in duos quadratos vt cuiuſlibet latus adæquetur $\frac{10}{13}$. Quare fingentur latera quadratorum $1 - 3$ N. & $\frac{5}{13} + 7$ N. fitque ſumma quadratorum $1\frac{25}{169} + 58$ Q. $- \frac{8}{13}$ N. æquales $1\frac{25}{169}$. vnde fit 1 N $\frac{4}{377}$ ſunt ergo latera quadratorum $\frac{365}{377}$ & $\frac{173}{377}$. ipſi quadrati $\frac{133225}{142129}$. & $\frac{29929}{142129}$. Quamobrem quinque exceſſus ſunt $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{133225}{142129}$. $\frac{29929}{142129}$. quos ſi auferas ſigillatim ab vnitate, & reſiduorum ſemiſſes ſumas, fient quæſiti numeri $\frac{8}{25}$. $\frac{9}{50}$. $\frac{25}{338}$. $\frac{4452}{142129}$. $\frac{56100}{142129}$.

Ita ſi quærantur ſex numeri quadrato æquales, quorum quini reliquum ſuperent quadrato numero, ponetur ſumma numerorum quilibet quadratus, puta 1. Et quia exceſſuum ſumma eſt quadrupla ſummæ numerorum, diuidetur 4. in ſex quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 1. quod fiet eodem prorſus artificio. Et ſic ad quotlibet numeros quæſtio extendetur.

Immo res extenditur, etiam ſi proponatur quilibet datus numerus diuidendus in quotlibet partes, vt omnium vna dempta ſuper reliquam exceſſus ſit quadratus numerus. Sed ſi tres tantùm partes poſtulentur, oportebit datum numerum diuidi poſſe in tres quadratos.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλα-

INVENIRE tres numeros, vt cubus ſummæ eorum adſciſcens quemlibet

ipſorum, faciat cubum. Statuatur ſumma trium 1 N. Quæſitorum autem alter 7 C. alter 26 C. tertius 63 C. & conſtat cubum ſummæ adſcito quolibet ipſorum facere cubum. Reliquum eſt vt tres iſti coniuncti faciant 1 N. ſed tres coniuncti faciunt 96 C. Hoc ergo æquatur 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 96 Q. æquales 1. & vnitas quidem quadratus eſt, ac ſi 96. item quadratus eſſet, ſoluta fuiſſet quæſtio. Proinde quæro vnde 96. ortus ſit, eſt nimirum ſumma trium numerorum, quorum quilibet vnitate auctus cubum facit. Itaque eò res rediit vt inueniantur tres numeri, quorum quilibet vnitate adſcita cubus fiat, ſed & ſumma trium ſit quadratus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. ſecundi verò 2 − 1 N. tertij 2. cubi fient, primus quidem 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. ſecundus 6 Q. + 8 − 1 C. − 12 N. tertius 8. Aufero ab vnoquoque vnitatem, & ſtatuo primum 1 C. + 3 Q. + 3 N. ſecundum 6 Q. + 7. − 1 C. − 12 N. tertium 7. Reliquum eſt vt ſumma eorum ſit quadratus, ſit autem 9 Q. + 14 − 9 N. æqualis quadrato à latere 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{2}{15}$. erit igitur quæſitorum primus $\frac{1538}{3375}$. ſecundus $\frac{18577}{3375}$. tertius 7. Venio ad id quod initio propoſitum erat, & pono primum $\frac{1538}{3375}$ C. ſecundum $\frac{18577}{3375}$ C. tertium 7 C. & rurſus ſtatuo trium ſummam 1 N. & fiunt $\frac{43740}{3375}$ C. æquales 1 N. & omnium decimaquinta pars ſumatur, & omnia per numerum diuidantur, fiunt 2916 Q. æquales 225. & fit 1 N. $\frac{15}{54}$. Ad poſitiones, & conſtat.

βὼν ἕκαστον, ποιῇ κύβον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ϛ^{ος} α̅. ἕκαστος δὲ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κύβων ζ̅. ὁ δὲ κύβων κϛ̅. ὁ δὲ κύβων ξγ̅. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιεῖ κύβον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ^{ῷ} α̅. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσι κ^{υ} ϟϛ̅. ὥστε κ^{υ} ϟϛ̅. ἴσοι ϛ^{ῷ} α̅. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμὸν δ^{υ}. ϟϛ̅. ἴσαι μ^{ο} α̅. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. εἰ ἦσαν καὶ αἱ μ^{ο} ϟϛ̅ τετράγωνος λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ὅθεν ζητῶ πόθεν ἐστὶν ὁ ϟϛ̅. ἔστι δὲ τριῶν ἀριθμῶν σύνθεμα, ὧν ἕκαστος μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖ κύβον. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμοὺς τρεῖς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος μιᾶς ποιῇ κύβον, ἔτι δὲ τὸ σύνθεμα τῶν τριῶν ᾖ τετράγωνος. ἐκκείσθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ϛ^{ος} α̅. μ^{ο} α̅. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ^{ο} β̅. λείψει ϛ^{ῷ} α̅. ἡ δὲ τοῦ τρίτου μ^{ο} β̅. οἱ κύβοι γίνονται. ὁ μὲν κ^{υ} α̅. δ^{υ} γ̅. ϛϛ^{οὶ} γ̅. μ^{ο} α̅. ὁ δὲ δ^{υ} ϛ̅. μ^{ο} η̅. λείψει κ^{υ} α̅. ϛϛ ιβ̅. ὁ δὲ μ^{ο} η̅. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου μ^{ο} α̅. καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον κ^{υ} α̅. δ^{υ} γ̅. ϛϛ γ̅. τὸν δὲ δεύτερον δ^{υ} ϛ̅. μ^{ο} ζ̅. λείψει κ^{υ} α̅. ϛϛ ιβ̅. τὸν δὲ τρίτον μ^{ο} ζ̅. λοιπόν ἐστιν αὐτοὺς συντεθέντας ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δ^{υ} θ̅. μ^{ο} ιδ̅ ⋔ ϛϛ θ̅. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ γ̅. λείψει μ^{ο} δ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} β̅ ιε^{ων}. ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν πρῶτος ,αφλη γτοε^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος α̅. ,ηφοζ γτοε^{ων}. ὁ δὲ τρίτος ζ̅. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν κ^{υ} ,αφλη γτοε^{ων}. τὸν δὲ κ^{υ} α̅. ,ηφοζ γτοε^{ων}. τὸν δὲ κ^{υ} ζ̅. καὶ πάλιν τάσσομεν τοὺς τρεῖς ϛ^{ὸν} α̅. καὶ γίνονται κύβοι δ. ,γψμ γτοε^{ων}. ἴσοι ϛ^{ῷ} α̅. πάντων τὸ πεντεκαιδέκατον καὶ παρὰ ἀριθμόν, καὶ γίνονται δ^{υ} ,βϡιϛ̅. ἴσαι μ^{ο} σκε̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} ιε νδ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XVIII.

PENDET omnino ſolutio quæſtionis huius, à lemmate aſſumpto, quo ſcilicet quæruntur tres cubi vnitate multati, quorum ſumma ſit quadratus numerus. Et ponit Diophantus latus primi 1 N + 1. latus ſecundi 2 − 1 N. vbi numeri contrario ſigno afficiuntur, vt etiam in cubis, numeri cuborum contrario ſigno reperiantur affecti, cùm hinc reperiatur + 1 C. inde verò − 1 C. vnde fit vt in ſumma cuborum cubis ſe mutuo elidentibus, remaneant ſolùm Quadrati, Numeri, & Vnitates; cùm autem tertij cubi latus ponatur quilibet vnitatum numerus, puta 2. eius cubus vnitate multatus, puta 7. eſt certus vnitatum numerus, cui additus ſummæ priorum cuborum vnitate multatorum, non conſtituit diuerſam ſpeciem, quia in illa ſumma, vt dictum eſt, repetiuntur vnitates; ſic fit ſumma trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 14. − 9 N. quæ quadrato æquari debet. Hoc verò fieri non poſſet, ſi numerus quadratorum 9. non eſſet quadratus, vt euidens eſt, quod tamen non animaduertit Xilander. Vt ergo poſitiones arte certa, non caſu inſtituantur, videndum vnde in ſumma cuborum contentus numerus quadratorum prouenerit. Atqui eſt triplum ſummæ vnitatum quæ ponuntur in primo & ſecundo latere, quia videlicet in primo latere ponitur 1;

in ſecundo 2. quorum ſumma 3. cuius triplum 9. Ideirco 9 Q. reperiuntur in ſumma cuborum. Igitur cùm in primo latere ponatur 1. cuius triplum 3. oportebit in ſecundo latere conſtituere tot vnitates, quarum triplum adſumpto 3 faciat quadratum, id autem facillimè fiet, infinitiſque modis ſi à quolibet quadrato auferatur 3. & reſidui triens ſumatur, vt ſi à 9. auferas 3. reſidui triens 2. poni poterit in ſecundo latere, vt fecit Diophantus. Rurſus ſi à 36. auferas 3. reſidui triens 11. congruet propoſito, & poni poterit ſecundum latus 11 − 1 N. & ſic in infinitum. Tertius quoque cubus poni poteſt quilibet vnitatum numerus cubicus; ita ſi loco 8. quem poſuit Diophantus, ſumas 27. erit ſumma trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 33 − 9 N. æqualis quadrato, cuius latus ſi fingas 3 N − 6. fiet 1 N $\frac{1}{9}$. & diuerſa omnino continget ſolutio ab ea quam tradit Diophantus, quam ſanè in falſis numeris aſſignauit Xilander, in eo allucinatus quod putauit 1 N. fieri [illegible]. eum fiat [illegible]. Quare tres quæſiti numeri ſunt [illegible]. [illegible]. [illegible]. Quorum ſumma eſt [illegible]. cuius cubus [illegible]. quo addito ad ſingulos numeros, fiunt cubi [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum latera [illegible]. [illegible]. [illegible].

Animaduerſione præterea dignum eſt numeri 9 Q + 14 − 9 N. latus cautè fingendum eſſe. Quia enim latus ſecundi cubi poſitum eſt 2 − 1 N. neceſſe eſt 1 N. minorem eſſe quàm 2. fiet autem valor numeri fingendo latus quadrati 3 N − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 14. diuidendo harum vnitatum quadratum multatum numero 14. per ſextuplum earundem vnitatum multatum numero 9. Oportet ergo quotientem hunc minorem eſſe quàm 2. hoc eſt $\frac{1Q - 14}{6N - 9}$ minor eſt quàm 2. & tandem 1 Q + 2 minor eſt quàm 12 N. Qua æquatione per approximationem reſoluta, fit 1 N 11 [illegible]. Ponetur igitur fictitium latus 3 N − tot vnitatibus quæ ſint minores quàm 11 [illegible]. dum earum quadratus excedat 14. Ponit Diophantus 3 N − 4. vnde fit 1 N. $\frac{2}{15}$.

Cæterùm ex ipſius operationis ductu manifeſtum eſt; quæſtionem ad quotlibet numeros extendi poſſe. Nam verbi gratia propoſitum ſit inuenire quatuor numeros, vt cubus ſummæ eorum, quouis adſumpto cubum faciat. Sanè quærendi erunt quatuor cubi, quorum vnitate multatorum ſumma ſit quadratus numerus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. ſecundi 2 − 1 N. tertij 2. quarti 3. Erit ſumma cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 40 − 9 N. æqualis quadrato. Quod ſi Numeri determinationem quæras inuenies fingendum latus 3 N. − tot vnitatibus quæ ſint minores quam 13 [illegible]. ita vt earum quadratus excedat 40. Ponantur ergo 7. & ſit latus fictitium 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{11}$. Erunt igitur quatuor cubi $\frac{2744}{1331}$. $\frac{6859}{1331}$. 8. 27. & à ſingulis ſi auferas vnitatem, & apponas ſignum cuborum reſiduis, erunt quatuor quæſiti numeri $\frac{1413}{1331}$ C. $\frac{5528}{1331}$ C. 7 C. 26 C. Quorum ſumma in minimis [illegible]. C. æquatur 1 N. vnde fit 1 N. [illegible]. Ad Poſitiones, erunt quæſiti numeri [illegible]. [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum ſumma vtique eſt [illegible]. cuius cubus [illegible]. adſcito quolibet ipſorum, cubos facit [illegible]. [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum latera [illegible]. [illegible]. [illegible]. [illegible].

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ς^{ος} α̅. καὶ αὐτῶν ὁ μὲν κύβων ζ η^{ων}. ὁ δὲ κύβων κς κζ^{ων}. ὁ δὲ κύβων ξγ ξδ^{ων}. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^{ος} α̅. γίνεται κυβικῶν ,δωοζ^{ων} ,αψκη^{ων}. ἴσον ς^{ος} α̅. πάντα παρὰ ἀριθμὸν, καὶ γίνεται δυναμοστῶν ,δωοζ^{ων} ,αψκη^{ων}. ἴσον μ^{ο} α̅. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. δέησει ἄρα καὶ τὰς δυνάμεις εἶναι τετραγώνους. πόθεν ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν δ^{ων} ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς κύβους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν, ἐλάσσων ᾖ μ^{ο} α̅. τὸ δὲ ὑπόλειμμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν κύβον ἐλάσσονα εἶναι μονάδος μιᾶς, ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας μονάδος α̅. πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μονάδος α̅. ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος τετρά-

INVENIRE tres numeros, vt cubus ſummæ eorum, quouis ipſorum detracto, faciat cubum. Ponatur rurſus trium ſumma 1 N. & ipſi $\frac{7}{8}$ C. $\frac{26}{27}$ C. $\frac{63}{64}$ C. ſupereſt vt tres coniuncti æquentur 1 N. fit ergo $\frac{4877}{1728}$ C. æquale 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fit $\frac{4877}{1728}$ Q. æquale 1. eſt autem 1. quadratus. Oportebat ergo & numerum quadratorum eſſe quadratum: vnde autem is natus eſt? Quod à ternario ſubducti ſunt tres cubi, quorum quilibet minor eſt vnitate. Eò itaque res redit, vt inueniantur tres cubi, quorum quilibet ſit minor vnitate, ſumma autem ipſorum à ternario ſublata, faciat quadratum. Et quia volumus cuborum quemque minorem eſſe vnitate, ſi ſtatuamus tres numeros ſimul vnitate minores, multo minores ſinguli erunt vnitate. Sic autem quadratum qui relinquetur, oportebit maiorem eſſe binario. Statuatur quadratus

dratus qui relinquitur $2\frac{3}{4}$ Oportet igitur $\frac{3}{4}$ diuidere in tres cubos, & horum multiplicia ſecundum aliquos cubos diuiſa. Eſto ſecundum 216. Oportet igitur vt diuidamus 162. in tres cubos. At 162. componitur ex cubo 125. & interuallo duorum cuborum 64. & 27. Habemus autem in poriſmatis, omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis. Recurramus ad propoſitum initio, & ſumamus vnumquemque cuborum inuentorum, & quolibet ab vnitate ſubtracto, reſidua ſtatuamus pro quæſitis numeris, & ſit ſumma 1 N. Ita fiet vt cubus ſummæ, quouis ipſorum detracto cubum faciat. Reſtat vt tres ſimul æquentur 1 N. fit autem trium ſumma $2\frac{3}{4}$ C. Hoc ergo æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad poſitiones.

γωνος μείζων ἐςὶ δυάδος. τετάχθω καταλειπόμενος τετράγωνος μº β. ∠ δˣ. δεῖ ἄρα τὰ γ. δˣ. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. καὶ κατὰ τούτων πολλαπλάσια κατά τινων κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὲ κατὰ τὸν σιϛ. ὀφείλομεν οὖν τὸν ρξβ. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. σύγκειται δὲ ὁ ρξβ. ἔκ τε κύβου τοῦ ρκε. καὶ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦτε ξδ. καὶ τοῦ κζ. ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν, * ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κº * ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν ἕκαστον κύβον εὑρεθέντων. τοὺς δὲ τρεῖς ἀριθμὸν ᾱ. καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον λείψαντα ἕκαστον, ποιεῖν κύβον. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛº ᾱ. γίνονται δὲ οἱ τρεῖς κº β. ∠ δˣ. ταῦτα ἴσα ϛº ᾱ. ὅθεν γίνεται ὁ ϛº μº β γˣ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

Solutionis modum Diophantus non exprimit, aut græca corrupta ſunt. Bachetus caſu adiutum Diophantum arbitratur, quod tamen non admittimus, cum Diophantæam methodum non difficilem inuentu exiſtimemus, inueniendus quadratus binario maior ternario minor qui à ternario ſubtractus relinquat numerum in tres cubos diuidendum. Ponatur quæſiti quadrati latus eſſe quemlibet numerorum numerum — vnitate v. g. 1 N — 1. ipſius quadratus à ternario ſubtractus relinquit 2 — 1 Q + 2 N. cuius inueniendi tres cubi æquales qui ſic effingendi vt æqualitas tandem conſiſtat inter duas tantum ſpecies proximas, id quidem innumeris modis conſtrui poteſt. Sit vnius ex cubis latus 1 — $\frac{2}{3}$ N. alterius (vt numerus numerorum in ambobus cubis conficiat 2 N.) ſit 1 + 1 N. tertii latus in numeris duntaxat fingendum, qui etiam ne valor 1 N. quæſitos terminos euadat, debent notari ſigno defectus, nec eſt operoſum eum numerum numerorum ſumere cuius valor æquationem ad præſtitutos redigat terminos, hoc peracto patet primum ex cubis eſſe minorem vnitate vt quærebamus, cum igitur ſecundus ſit maior & tertius ſigno defectus notetur, patet differentiam ſecundi & tertij æquandam eſſe duobus cubis quam ob rationem ad ſecundam operationem & Diophantus & nos deuoluimur.

Habemus autem, inquit, in poriſmatibus omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis.

Hæret iterum Bachetus & deſtitutus poriſmatibus Diophantæis, hanc quæſtionem ſecundam determinatione indigere contendit, duorum quippè cuborum interuallum eâ tantum conditione in duos cubos diuidere docet dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Nam quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos ignotum ſibi ingenuè profitetur. Nos ſupra ad quæſtionem libri 4. ſecundam, & hanc & reliquas huius materiæ quæſtiones generaliter conſtruendi modum feliciter deteximus.

IN QVAESTIONEM XIX.

HÆC propoſitio eſt de numero earum, quas vt ad nos peruenerunt, fateor me non ſatis aſſequi. Quamuis enim de illius ſolutione ſatis mihi conſtet, vt infrà patebit, duo tamen ſunt quæ

Hh

totam eius tractationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingenioſè inferat Diophantus inueniendos eſſe tres cubos, quorum quilibet ſit vnitate minor, ita vt ſumma eorum à ternario ſublata relinquat quadratum, vnde concludit curandum eſſe vt tres cubi ſimul ſint vnitate minores, ſic enim quilibet multo magis erit vnitate minor, quare ſequitur quadratum qui relinquitur, ſummam cuborum auferendo à ternario, debere eſſe maiorem quàm 2. minorem quàm 3. licet inquam hæc ſubtiliter edisſerat Diophantus, non docet tamen quomodo talis inueniendus ſit quadratus, & cur $2\frac{1}{4}$. ſumat potiùs quàm alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 1. & 3. Certè, vt ex proceſſu apparet, talis deligendus eſt quadratus, quo à ternario ſublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compoſitus. Id ergo qui fieri poſſit arte certa, docere debuit Diophantus, neque enim in promptu eſt ſi loco quadrati $2\frac{1}{4}$. ſumatur quadratus $2\frac{7}{9}$. quomodo reſiduum de 3. puta $\frac{2}{9}$. diuidi poſſit in tres cubos, eademque de alijs ratio. Quamobrem caſu factum videtur, vt ſumpſerit author $2\frac{1}{4}$. quo de 3. ſublato relinquitur $\frac{3}{4}$. ex tribus cubis compoſitus.

Deinde poriſma, quod hîc aſſumitur, quale ſit non eſt facile diuinare, cùm Græca Diophanti hoc loco mutila ſint. Si verò libeat amplecti quod noſtra verſione exhibemus, ſanè docuimus ad ſecundam quarti. Duorum cuborum interuallū diuidi poſſe in duos cubos, dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Sed quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos, ignotum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatæ, nec canon ibidem traditus locum habent, cùm duplum minoris cubi excedit maiorem. Itaque penes eruditos iudicium eſto, vtrum ex propoſitionis huius deprauatione huiuſmodi difficultates ortum habeant, an verò ipſi Diophanto imputandæ ſint, qui cùm fortè quadratum $2\frac{1}{4}$. inueniſſet quo de 3. ſublato ſupereſt $\frac{3}{4}$. compoſitus ex tribus cubis, arduum problema vt cumque potuit, explicauit, melioribus deſtitutus auxilijs. Nos quod ſupereſt, illius ſolutionem afferemus à Diophanto prætermiſſam. Quoniam diuidere oportet $\frac{3}{4}$. in tres cubos, reducatur ad denominationem cubicam, puta ad $\frac{162}{216}$. Itaque cùm denominator ſit cubus, ſupereſt vt numeratorem 162. diuidamus in tres cubos. Porro 162. componitur ex cubo 125. & ex 37. interuallo cuborum 27. & 64. Quare cùm duplum minoris non ſuperet maiorem, poterit 37. diuidi in duos cubos per Canonem primæ earum quas ad ſecundam quarti attulimus. Quod fiet hoc pacto. Ducito ter vtrumque datorum cuborum in latus alterius, fient 324. & 576. quos diuide per ſummam cuborum, fiunt $\frac{324}{91}$. $\frac{576}{91}$. Tum aufer priorem à maiore latere 4. & aufer minus latus 3. à poſteriore, remanent quæſitorum cuborum latera $\frac{40}{91}$. & $\frac{303}{91}$. ſunt ergo cubi $\frac{64000}{753571}$. & $\frac{27818127}{753571}$. quorum ſumma 37. his ergo adnumerando 125. fit trium cuborum ſumma 162. vt ergo $\frac{162}{216}$. diuidatur in tres cubos, diuidemus ſigillatim tres inuentos cubos per denominatorem 216. & fient quæſiti cubi $\frac{125}{216}$. $\frac{64000}{162771336}$. $\frac{27818127}{162771336}$. à lateribus $\frac{5}{6}$. $\frac{40}{546}$. $\frac{303}{546}$. & vnumquemque cubum auferendo ab vnitate, relinquuntur $\frac{91}{216}$. $\frac{162707336}{162771336}$. & $\frac{134953209}{162771336}$. Statuamus igitur quæſitorum numerorum ſummam 1 N. ipſos autem $\frac{91}{216}$ C. $\frac{162707336}{162771336}$ C. $\frac{134953209}{162771336}$ C. nam horum vnoquoque ab 1 C. detracto, relinquitur cubus, vnus ſcilicet ex tribus cubis ſuprà allatis. Supereſt vt horum ſumma ſit 1 N. eſt autem $2\frac{1}{4}$ C. Igitur fit 1 N. $\frac{2}{3}$. cuius cubus $\frac{8}{27}$. ſuntque quæſiti numeri ad eandem denominationem redacti [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum ſumma eſt vtique $\frac{2}{3}$. & auferendo vnumquemque à cubo ſummæ hoc eſt à $\frac{8}{27}$. ſeu à [illegible]. relinquuntur cubi [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum latera [illegible]. [illegible]. [illegible].

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ϛοὶ α̅. τῶν δὲ τριῶν ὁ μὲν κυ β̅. ὁ δὲ κυ θ̅ ὁ δὲ κυ κη̅. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛῷ α̅. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσι κύβοι λθ̅. ὥστε κυ λθ̅. ἴσοι ϛῷ α̅. πάντα παρὰ ϛν. ὥστε δυνάμεις λθ̅. ἴσαι μο α̅. καὶ εἰ ἦσαν αἱ δυνάμεις λθ̅. τετράγωνος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, ἔστι δὲ ὁ λθ̅. τριῶν κύβων τὸ σύνθεμα μετὰ μο τριῶν. δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ μο γ̅. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ϛο α̅. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μο γ̅. λεῖψει ϛο α̅. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονάδων τινῶν. ἔστω δὴ μο α̅. καὶ γίνεται τὸ

INVENIRE tres numeros, vt cubus ſummæ eorum, à quolibet ipſorum detractus, cubum faciat. Ponatur rurſus trium ſumma 1 N. ipſi autem 2 C. 9 C. 28 C. Reliquum eſt hos tres ſimul æquari 1 N. ſed hi tres ſimul ſunt 39 C. Igitur 39 C. æquantur 1 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 39 Q. æquantur 1. & ſi quadratorum numerus foret quadratus, ſoluta eſſet quæſtio. Eſt autem 39. ſumma trium cuborum adiecto ternario. Oportet ergo inuenire tres cubos, quorum ſumma adiecto ternario faciat quadratum. Statuatur primi cubi latus 1 N. ſecundi 3 − 1 N. tertij quotlibet vnitatum,

ac fit 1. Itaque fit ſumma trium cuborum 9 Q. + 28 − 27 N. cui addendo 3. fit 9 Q. + 31 − 27 N. æquale quadrato à latere 3 N. − 7. & fit 1 N. $\frac{6}{5}$. Tantum eſt latus primi cubi, alterius verò latus eſt $\frac{9}{5}$. reliqui 1. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum addos 1. & venio ad propoſitum initio, ſtatuo quemlibet totidem cuborum. Reſtat vt trium ſumma æquetur 1 N. fit autem ſumma trium 11 $\frac{14}{25}$ C. Hoc æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{17}$. Ad poſitiones.

σύνθεμα τῶν τριῶν κύβων. Δʸ θ. μο κη. λείψει ςς κζ. ταῦτα μετὰ μο γ. γίνεται Δʸ θ μο λα. λείψει ςς κζ. ἴσοι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ. λείψει μο ζ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ς ε^x. [ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πρώτου κύβου] ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου θ ε^x. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονὰς α. καὶ τῷ ἀπὸ ἑκάστου τούτων κύβῳ προστίθημι μο α. καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον κύβων τοσούτων. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς α. γίνονται οἱ τρεῖς κυ ια. ιδ κε^x. ταῦτα ἴσα ς α. καὶ γίνεται ὁ ς ε ιζ^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM XX.

MALE assignat Xilander valorem Numeri $\frac{17}{5}$. cùm is ſit $\frac{5}{17}$. nam à lateribus $\frac{6}{5}$. $\frac{9}{5}$ & 1. fiunt cubi $\frac{216}{125}$. $\frac{729}{125}$. & 1. quorum cuilibet ſi addatur vnitas, & præfigatur nota C. ſtatuemus pro quæſitis numeris $\frac{341}{125}$ C. $\frac{854}{125}$ C. & 2 C. quorum ſumma fit $\frac{289}{25}$ C. æqualis 1 N. ac proinde $\frac{289}{25}$ æquatur vnitati, vnde fit 1 N. $\frac{5}{17}$. ſumma trium quæſitorum numerorum, ſuntque ipſi numeri $\frac{341}{4913}$. $\frac{854}{4913}$. $\frac{250}{4913}$. Nam ſi ab vnoquoque auferatur cubus ſummæ, puta $\frac{125}{4913}$. remanent cubi $\frac{216}{4913}$. $\frac{729}{4913}$. & $\frac{125}{4913}$. quorum latera $\frac{6}{17}$. $\frac{9}{17}$. $\frac{5}{17}$.

Præterea in ſoluendo lemmate quo quæruntur tres cubi, quorum ſumma adſumpto 3 faciat quadratum, non benè docet Xilander cur ſecundi cubi latus ponatur 3 − 1 N. ait enim ſuſpectum eſſe binarium, eo quod in ſequente propoſitione, vbi lemma propoſitum infinitè ſoluitur, neceſſe eſt valorem Numeri poni maiorem binario. Hoc verò ad præſentem quæſtionem nil facit, vt ex iis quæ ad ſequentem dicturi ſumus apparebit. Et hic non minus ſuſpecti ſunt 4. 5. 6. aliique infiniti, quàm 2. Talis enim ponendus eſt in latere ſecundi cubi vnitatum numerus, cuius triplum ſit quadratus numerus. Patet enim ex iis quæ ſæpè diximus de cubi efformatione, numerum quadratorum qui in hoc cubo reperietur gigni ex 1 Q. quadrato ex − 1 N. in triplum vnitatum adiunctarum. Neceſſe eſt autem hunc quadratorum numerum eſſe quadratum, alioquin quomodo fingi poſſet latus numeri 9 Q. + 31 − 27 N. ſi 9. quadratorum numerus non eſſet quadratus? Oportet igitur vnitatum numerum qui ſtatuitur in latere ſecundi cubi eſſe trientem alicuius quadrati, puta 3. vel 12. vel 27. & ſic poterat hoc latus poni non ſolùm 3 − 1 N. ſed etiam 12 − 1 N. vel 27. − 1 N. & ſic aliis modis infinitis. Sed & in fingendo latere quadrati 9 Q. + 31 − 27 N. magna cautio eſt adhibenda. cum enim ſecundi cubi latus poſitum ſit 3 − 1 N. euidens eſt 1 N. minorem eſſe debere ternario. Fiet autem valor Numeri fingendo latus quadrati 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 31. diuidendo ſcilicet harum vnitatum quadratum multatum numero 31. per ſextuplum earundem multatum numero 27. Quare oportet $\frac{1Q - 31}{6N - 27}$ minorem eſſe ternario, vnde fit 1 Q − 31. minor quàm 18 N. − 81. & tandem 1 Q. + 50. minor quàm 18 N. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. minor quàm 14 $\frac{4}{7}$. Ponentur ergo in latere fictitio tot vnitates, vt minores ſint quàm 14 $\frac{4}{7}$ dum earum quadratus excedat 31. ſic poſuit Diophantus 7. & finxit quadratum à latere 3 N. − 7.

Itaque tripliciter variari poſſunt poſitiones. Primò enim in latere ſecundi cubi poni poteſt quilibet vnitatum numerus qui ſit triens alicuius quadrati, vt docuimus.

Secundò pro latere tertij cubi poni poteſt quilibet vnitatum numerus.

Denique quadrati qui fit ex ſumma cuborum ternario aucta, latus diuerſimodè fingi poteſt, vt in hypotheſi Diophantæa ſtatui poterit 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ non ſint minores quàm 6. nec maiores quàm 14.

Cæterùm euidens eſt eodem prorſus artificio quæſtionem ad quotlibet numeros extendi poſſe. Etenim propoſitum ſit inuenire quatuor numeros, vt cubus ſummæ, à quotlibet detractus, cubum relinquat. Prius ergo inuenientur quatuor cubi quorum ſumma quaternario aucta cubum faciat, eſto primi latus 1 N. ſecundi 3 − 1 N. tertij 1. quarti 2. fiet ſumma cuborum quaternario aucta 9 Q. + 40 − 27 N. æqualis quadrato. Quod ſi Numeri quæras determinationem, inuenies quadrati latus fingendum 3 N. − tot vnitatibus quæ ſint minores quàm 15 $\frac{2}{5}$ dum earum quadratus excedat 40. Fingatur ergo 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{5}$ primi ſcilicet cubi latus, ſecundi verò latus erit $\frac{12}{5}$. tertij 1. quarti 2. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum adiicio 1. & præfigo notam C. & ſtatuo quæſitos numeros $\frac{152}{125}$ C. $\frac{1853}{125}$ C. 2 C. 9 C. Reſtat vt trium ſumma æquetur 1 N. Igitur $\frac{676}{25}$ C. æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{26}$. Ad poſitiones. Erunt quæſiti numeri $\frac{152}{17576}$. $\frac{1853}{17576}$. $\frac{250}{17576}$. $\frac{1125}{17576}$. quorum

ſumma $\frac{5}{12}$. cuius cubum $\frac{125}{1728}$ ſi auferas à quolibet ipſorum numerorum, remanent cubi [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] à lateribus [illegible]

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἵνα ᾖ τετράγωνος, δυνάμεως α̅. καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κυβοκύβων γ̅. ὁ δὲ κυβοκύβων η̅. ὁ δὲ κυβοκύβων ιε̅. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, προσλαβόντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι δυνάμει α̅. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσὶ κυβοκύβων κϛ̅. ταῦτα ἴσα δυνάμει α̅. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν α̅. γίνονται δυναμοδυνάμεις κϛ̅. ἴσαι μονάσιν α̅. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. ὥστε ἄρα δεῖ δυναμοδυνάμεις κϛ̅. δηλονότι εἶναι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον. γέγονε δὲ τῶν εἰρημένων πλῆθος τῶν δυναμοδυνάμεων, ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος μετὰ μονάδος α̅. ποιεῖ τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος μετὰ μονάδος α̅. ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ᾖ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. τετάχθω εἷς τῶν ζητουμένων δυναμοδυνάμεως α̅. λεῖψει δυνάμεων β̅. ὁ δὲ ἕτερος δυνάμεως α̅. ἀριθμῶν β̅. ὁ δὲ λοιπὸς δυνάμεως α̅. λεῖψει ἀριθμῶν β̅. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος α̅. ποιεῖν τετράγωνον. ἔτι δὲ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον καὶ ἐν ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. ὑποκείσθω δὴ ὁ ἀριθμὸς μονάδων γ̅. ἔσται ἄρα εἷς τῶν ζητουμένων μονάδων ξγ̅. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων ιε̅. ὁ δὲ τρίτος μονάδων γ̅. ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς δυνάμεως α̅. τῶν δὲ ζητουμένων ὁ μὲν ἔσται κυβοκύβων ξγ̅. ὁ δὲ κυβοκύβων ιε̅. ὁ δὲ κυβοκύβων γ̅. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ, καὶ γίνονται κυβόκυβοι πα̅. ἴσοι δυνάμει α̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α̅ γ^ω. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres numeros quadrato æquales, vt cubus ſummæ eorum adſumens vnumquemque, faciat quadratum. Ponatur ſumma trium, vt ſit quadratus 1 Q. & eorum qui quæruntur primus 3 CC. ſecundus 8 CC. tertius 15 CC. & contingit cubum ſummæ trium quolibet ipſorum adſumpto, facere quadratum. Reſtat vt tres ſimul æquentur 1 Q. ſed tres ſimul conficiunt 26 CC. Igitur 26 CC. æquantur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt 26 QQ. æquales 1. Et vnitas quidem quadratus eſt latus habens quadratum, ergo & 26 QQ. quadratum eſſe oportet latus habentem quadratum. Atqui multitudo iſta quadratoquadratorum è tribus conflata eſt numeris, quorum quiuis adiecta vnitate facit quadratum. Ergo inueniendi ſunt tres numeri, quorum quiuis adiecta vnitate faciat quadratum, porrò ſumma trium quadratus ſit latus habens quadratum. Ponatur vnus quæſitorum 1 QQ. − 2 Q. alter 1 Q. + 2 N. reliquus 1 Q. − 2 N. & quiuis horum adſcita vnitate facit quadratum. Ac præterea trium ſumma eſt quadratus latus habens quadratum. Ita in numeris indefinitis ſoluta eſt quæſtio. Ponatur ergo 1 N. 3. Erit igitur vnus quæſitorum 63. ſecundus 15. tertius 3. Recurramus ad initio propoſitum, & ponamus rurſus trium ſummam 1 Q. Quæſitorum autem primus erit 63 CC. ſecundus 15 CC. tertius 3 CC. Reſtat vt trium ſumma æquetur 1 Q. & fiunt 81 CC. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXI.

INGENIOSISSIME Diophantus ſoluit infinitè propoſitum lemma quo quæruntur tres quadrati vnitate deminuti, quorum ſumma ſit numerus quadratoquadratus. Cùm enim finxiſſet quadratum à latere 1 Q. − 1. puta 1 QQ. − 2 Q. + 1. Inde ablata vnitate ſumit 1 QQ. − 2 Q. pro primo quæſitorum. Tum verò ita ponit ſecundum & tertium, vt elidendo in additione tum quadratos, tum numeros, remaneat trium ſumma 1 QQ. Ideo formans quadratos à lateribus 1 N. + 1. & 1 N. − 1. & à ſingulis auferendo 1. ponit ſecundum 1 Q. + 2 N. tertium 1 Q. − 2 N. quorum ſumma 2 Q. qua addita primo, hoc eſt ad 1 QQ. − 2 Q. fit vtique trium ſumma 1 QQ. Itaque indefinitè ſoluta eſt quæſtio, & pro valore Numeri ſumi poteſt quilibet numerus maior quàm 2.

quia enim tertius poſitus eſt 1 Q. − 2 N. patet 1 Q. maiorem eſſe debere quàm 2 N. ſeu quod idem eſt 1 N. maiorem eſſe debere quàm 2. Hinc porro liquet quæſtionem infinitas recipere ſolutiones. Poſſunt etiam ipſæ lemmatis poſitiones variari vt libet, dum formetur quadratus à quolibet Quadratorum numero quadrato − 1. Verbi gratia, formetur à 4 Q. − 1. erit quadratus 16 QQ. − 8 Q. + 1. vnde ablata vnitate ſtatuetur primus 16 QQ. − 8 Q. ac proinde ſecundus 4 Q. + 4 N. tertius 4 Q. − 4 N. vt ſit trium ſumma 16 QQ.

Reſtat vt ſolutionem quæſtionis proferamus quam omiſit Diophantus. Inuentis numeris 63. 15. 3. ſoluentibus lemma propoſitum. Recurro ad initium & pono trium quæſitorum numerorum ſummam 1 Q. ipſos verò 63 C C. 15 C C. 3 C C. quorum ſumma fit 81 C C. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{3}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{63}{729}$. $\frac{15}{729}$. $\frac{3}{729}$. quorum ſumma $\frac{1}{9}$ quadratus vt poſtulabatur, cuius cubus $\frac{1}{729}$, quem addendo ſingulis numeris, fiunt quadrati $\frac{64}{729}$. $\frac{16}{729}$. $\frac{4}{729}$. à lateribus $\frac{8}{27}$. $\frac{4}{27}$. $\frac{2}{27}$.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE tres numeros dato numero æquales, vt cubus ſummæ eorum, quolibet ſigillatim detracto, quadratum faciat. Rurſus diuidendus eſt binarius vt prius. Porrò binarij cubus eſt 8. Proinde oportet à 8. vnumquemque detrahere, & facere quadratum. Oportet igitur 22. diuidere in tres quadratos, quorum quilibet maior ſit quàm 6. Et ſi abs 8. quemlibet detrahamus, inueniemus tres quæſitos numeros. Eſt autem iam oſtenſum quomodo oporteat diuidere 22. in tres quadratos, quorum quilibet ſit maior ſenario.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν τριῶν κύβων β λείψει ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν β διελεῖν ὡς καὶ πρότερον. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τοῦ δευτέρου ψυ κυ μονάδας η. δεῖ οὖν ἀπὸ μο η. ἀφελεῖν ἕκαστον, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει οὖν τὸν κβ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μο ϛ. καὶ ἐὰν ἀπὸ μο η. ἀφέλωμεν ἕκαστον τούτων, εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς τρεῖς. τοῦτο δὲ προδέδεικται πῶς δεῖ τὸν κϛ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μο ϛ.

IN QVÆSTIONEM XXII.

QVAM malè affectus ſit hoc loco Diophantus, æquo lectori æſtimandum relinquo, vbi nec ſolutio ponitur, nec operatio propoſitioni reſpondet, & quæſtiones aliquot integras deſiderari ſatis indicant verba illa. *Rurſus diuidendus eſt binarius vt prius.* in qua enim ſuperiorum quæſtionum locutus eſt Diophantus de huiuſmodi binarij diuiſione? Itaque quantum certiſſimis coniecturis aſſequi poſſum, exiſtimo hic tres omnino quæſtiones intercidiſſe, in quibus binarij diuiſione vtendum fuit, & quarum cum iſta magna erat affinitas, vt facilè hinc erroris anſam nactus ſit imperitus librarius. Age igitur immeritò ſolum vertere iuſſas quæſtiones, ab exilio reuocemus.

QVÆSTIO PRIMA.

Inueniantur tres numeri quadrato æquales, vt cubus ſummæ eorum ſingulis ſeorſim detractis, quadratum relinquat.

Statuatur ſumma numerorum 1 Q. vt ſit quadratus. Ipſi vero numeri ſint $\frac{3}{4}$ C C. $\frac{8}{9}$ C C $\frac{15}{16}$ C C. ſic enim quolibet à cubo ſummæ detracto, relinquitur quadratus. Supereſt vt trium ſumma, puta $\frac{371}{144}$ C C. æquetur 1 Q. vnde tandem fit $\frac{371}{144}$ Q Q. æqualis vnitati. Oporteret ergo numerum Quadratoquadratorum eſſe quadratum. At quadratoquadratorum numerus eſt ſumma trium numerorum, quorum quilibet ab vnitate detractus relinquit quadratum. Eò itaque redacti ſumus vt inueniamus tres numeros, quorum ſinguli vnitate ſint minores, & quorum ſumma ſit numerus quadratoquadratus, quaque à ternario ſublata relinquantur tres quadrati minores ſinguli vnitate. Vt ergo ſinguli trium numerorum ſint minores vnitate, & eorum ſumma ſit numerus Quadratoquadratus, ponatur eorum ſumma 1. Igitur reliquorum trium quadratorum ſumma erit 2. Quare ſupereſt vt diuidamus 2. in tres quadratos, quorum quilibet ſit vnitate minor. Id autem facilè fit per ea quæ oſtenſa ſunt ad decimam quartam huius, ſuntque huiuſmodi quadrati $\frac{16}{25}$. $\frac{71289}{105625}$. $\frac{72361}{105625}$. & quolibet ab vnitate ſublato, ſuperſunt quæſiti numeri $\frac{9}{25}$. $\frac{34336}{105625}$. & $\frac{33264}{105625}$. Poſita ergo ſumma numerorum 1 Q. ponantur ipſi numeri $\frac{9}{25}$ C C. $\frac{34336}{105625}$ C C. $\frac{33264}{105625}$ C C. Supereſt vt horum ſumma puta 1 C C. æquetur 1 Q. vnde fit 1 N. 1. ſuntque quæſiti numeri ipſi $\frac{9}{25}$. $\frac{34336}{105625}$. $\frac{33264}{105625}$.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres numeros quadrato æquales, vt cubus ſummæ illorum à quolibet detractus quadratum relinquat.

Eſto ſumma trium numerorum 1 Q. Ipſi verò ſint 2 C C. 5 C C. 10 C C. vt auferendo à ſingulis cubum ſummæ, remaneant quadrati. Reſtat vt trium ſumma ſit 1 Q. eſt autem 17 C C. ergo tandem 17 Q Q. æquantur 1. Oporteret igitur 17. eſſe quadratoquadratum. Atqui 17. eſt ſumma trium quadratorum vnitare auctorum. Eò itaque redacti ſumus vt inueniamus tres quadratos, quorum ſumma ternario aucta, conficiat quadratoquadratum. Id verò nil aliud eſt quàm à quouis quadratoquadraro aufetre ternarium, & reſiduum diuidere in tres quadratos. Sumatur ergo quadratoquadrarus 16. cùm is ternario detractó relinquat 13. oportet diuidere 13. in rres quadratos. Sunt autem 9. $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. quibus ſigillatim addendo 1. ſtatuemus eos in cubocubis, eritque primus quæſitorum 10 C C. ſecundus $\frac{61}{25}$ C C. tertius $\frac{89}{25}$. C C. Quorum ſumma 16 C C. æquatur 1 Q vnde ſit 1 N $\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erunt quæſiti numeri ſub eadem denominatione $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum ſumma $\frac{1}{4}$. quadratus eſt, & eius cubus $\frac{1}{64}$. detractus à quolibet numerorum, relinquit quadratos $\frac{9}{64}$. $\frac{9}{400}$. $\frac{1}{25}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire tres numeros dato numero æquales, vt cubus ſummæ eorum, quolibet adiecto, fiat quadratus. Sit datus numerus 2.

Oportet igitur diuidere 2. in tres partes, vt cuilibet addendo 8. fiat quadratus. Quamobrem eo res rediit vt diuidamus 26. qui fit ex triplo ipſius 8. adſumente binarium, in tres quadratos, quorum quilibet ſit maior quàm 8. Hoc autem quî fieri poſſit iam oſtenſum eſt. Suntque tres quadrati 9. $\frac{1038361}{121801}$. $\frac{1032256}{121801}$. à quibus ſigillatim auferendo 8. reſtant quæſitæ binarij partes. 1. $\frac{63953}{121801}$. $\frac{57848}{121801}$.

Sanè poſt hanc quæſtionem, rectè ſubiici vigeſimam ſecundam Diophanti, vt eam verſione noſtra expreſſimus, res ipſa clamat, cùm in ea binarius ſimili ratione diuidendus proponarur, additione in ſubtractionem mutata. Sed & numerus 22. in texru Græco manifeſtè habetur, quamuis deinde incuria librarij muterur in 26. Nam Græca Diophanti verba vt habentur in codice Regio exhibuimus, quò coniectura noſtra omnibus euidentior appareat, cùm ex noſtra verſione mendas omnes tollere facile ſit. Cæterùm operatio Diophanti ſatis eſt perſpicua, quia enim à cubo 8. auferendæ ſunt ſigillatim tres binarij partes, ita vt ſemper remaneat quadratus, cùm hoc idem ſit atque à triplo ipſius 8. puta à 24. auferre binarium, rectè infertur numerum 22. eſſe diuidendum in tres quadratos, quorum quilibet ſit maior quàm 6. minor autem quàm 8. Hoc vt preſtem ſumo trientem de 22. puta $7\frac{1}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{576}$. & fit quadradratus $\frac{4225}{576}$. à latere $\frac{65}{24}$. Oportet ergo ita diuidere 22. in tres quadratos, vt cuiuſlibet latus adæquetur $\frac{65}{24}$. Diuiditur autem ſuaptè natura in tres quadratos, quorum latera 3. 3. 2. Quare per adæqualitatem fingentur quæſitorum] quadratorum latera 3 − 7 N. 3 − 7 N. 2 + 17 N. eſtque ſumma quadratorum 22. + 387 Q − 16 N. æqualis 22. vnde fit 1 N. $\frac{16}{387}$. ſunt ergo quadratorum latera $\frac{1049}{387}$. $\frac{1049}{387}$. $\frac{1046}{387}$. ipſi quadrati $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1094116}{149769}$. quos ſi auferas ſigillatim à 8. ſuperſunt quæſitæ binarij partes, nimirum $\frac{97751}{149769}$. $\frac{97751}{149769}$. $\frac{104036}{149769}$.

QVÆSTIO XXIII.

ΤΟ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν λεῖψαν τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ δοθὲν μόριον μο α δ^x. καὶ δέον ἔστω τὸ α δ^x. διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐτάχθη. ὥστε δηλονότι ἕκαστον αὐτῶν λεῖψει μο α ξδ^x. ποιεῖν τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς λείψει μο γ ξδ^x. ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους. καὶ ἐὰν ἑκάστῳ τῶν τετραγώνων προσθῶμεν α ξδ^x. εὑρήσομεν ἕκαστον τῶν ζητουμένων. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. ἔρχεται δὲ τὰ ιγ ξδ^x. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπερ ἐστὶ ῥᾴδιον.

DATAM partem diuidere in tres partes, vt quælibet detracto cubo ſummæ ipſarum, faciat quadratum. Eſto data pars $\frac{1}{4}$. & opus ſit diuidere $\frac{1}{4}$ in tres partes, vt imperatum eſt. Oportet igitur quamlibet ipſarum, detracta $\frac{1}{64}$ facere quadratum. Proinde tres ſimul detractis $\frac{3}{64}$ faciunt tres quadratos. Et ſi cuiuis trium quadratorum addamus $\frac{1}{64}$ inueniemus ſingulos quæſitorum. Hoc autem facile eſt. Eo enim res rediit vt $\frac{13}{64}$ diuidamus in tres quadratos, quod eſt factu facile.

IN QVAESTIONEM XXIII.

HÆc quæſtio non parum confirmat ſententiam noſtram de præcedente. Nam cùm in illa propoſitum ſit datum numerum diuidere in tres partes, quarum quælibet à cubo ſummæ detracta quadratum relinquat. Hic è conuerſo poſtulatur, vt datus numerus ſic diuidatur in tres partes, vt à qualibet auferendo cubum ſummæ remaneat quadratus. Quia verò non poteſt cubus ſummæ eſſe minor qualibet partium, niſi in fractis tales numeri exhibeantur (cùm in integris quilibet cubus ſuo latere ſit maior.) Idcirco propoſuit Diophantus datam partem diuidere, non autem datum numerum. Eſt autem operatio facilis, & quæ ex dictis ad præcedentes nullo negotio intelligatur. Cùm enim tres partes quæſitæ ſimul faciant $\frac{1}{4}$. Et à ſingulis auferri debeat $\frac{1}{64}$. patet hoc idem eſſe atque ſi ab $\frac{1}{4}$. ſeu à $\frac{16}{64}$. auferantur $\frac{3}{64}$. vnde reſtat $\frac{13}{64}$. diuidendus in tres quadratos, quod facilè fit quia componitur ex duobus $\frac{9}{64}$. & $\frac{4}{64}$. quorum altero puta $\frac{4}{64}$. diuiſo in duos quadratos $\frac{9}{400}$. & $\frac{16}{400}$. habemus totum $\frac{13}{64}$. diuiſum in tres quadratos, qui ſub eadem denominatione ſunt $\frac{225}{1600}$. $\frac{36}{1600}$. $\frac{64}{1600}$. & ſi addatur ſingulis $\frac{1}{64}$. ſeu $\frac{25}{1600}$. ſunt quæſiti numeri $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum ſumma $\frac{1}{4}$. & ſi à quolibet auferatur $\frac{1}{64}$. remanent prius inuenti quadrati.

Porrò & hæc & præcedens, aliæque quas ad præcedentem attulimus ad quotlibet numeros extendi poſſunt, & omnes ſub tribus vniuerſaliſſimis propoſitionibus comprehendentur, nimirum.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes quarum quælibet adſumpto dato numero, quadratum faciat.

Explicata eſt à nobis ad decimam quartam huius.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt auferendo quamlibet à dato numero, ſuperſit quadratus. Oportet autem numerum à quo fit ſubtractio maiorem eſſe ea parte diuidendi numeri, quæ denominatur à numero multitudinis partium poſtulatarum.

Diuidendus eſto 12. in quatuor partes, quarum quælibet detracta de 5. relinquat quadratum. Cùm ergo auferendo 12. à quadruplo ipſius 5. puta à 20. ſuperſit 8. patet 8. diuidendum eſſe in quatuor quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 5. Diuiditur autem 8. in duos quadratos 4. 4. quare diuiſo 4. bis in duos quadratos, res expedietur. Erunt ergo quæſiti quadrati $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{100}{169}$. $\frac{576}{169}$. quos ſi auferas ſigillatim à quinario, remanent numeri 12. partes quatuor quæſitæ $\frac{89}{25}$. $\frac{61}{25}$. $\frac{745}{169}$. $\frac{269}{169}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt à qualibet auferendo datum numerum ſuperſit quadratus. Oportet autem ablatitium numerum minorem eſſe ea parte diuidendi numeri, quam exprimit numerus multitudinis partium poſtulatarum.

Diuidendus eſto 20. in quatuor partes, vt à qualibet auferendo 3. ſuperſit quadratus. Quia quadruplum ipſius 3. puta 12. ablatum de 20. relinquit 8. patet 8. diuidendum eſſe in quatuor quadratos quoſcunque, cuilibet addendo 3. fient quæſitæ partes numeri 20. Sumantur ergo quadrati ad præcedentem allati, & cuilibet addatur 3. fient numeri 20. quæſitæ partes $\frac{111}{25}$. $\frac{139}{25}$. $\frac{607}{169}$. $\frac{1083}{169}$.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres quadratos, vt ſolidus ſub ipſis contentus, quouis ipſorum adſcito quadratum faciat. Ponatur ſolidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet adſcita vnitate faciat quadratum. Hoc autem peti poteſt à quouis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, & accipiens quadratum vnius laterum circa rectum, diuido

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς Δ^{Υ} α. καὶ ζητοῦμεν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος α. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, καὶ λαβὼν τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον μερίζω εἰς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. καὶ εὑρήσομεν

τοὺς τετραγώνους. ἵνα μὲν δυ θ ιϛ. τὸν δὲ ἕτερον δυ κε ρμδ. τὸν δὲ τρίτον δυ ξδ σκε. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ δυ ᾱ. ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυ ᾱ. γίνεται δὲ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς κυ κυ ᾱ. δυ ͵α. ..... ταῦτα ἴσα δυ ᾱ. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μόριον, καὶ παρὰ δύναμιν γίνεται δυ δυ ᾱ. δυ. ..... ἴσα μο ᾱ. καὶ ἡ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ γίνεται δυ ρκ ψκ. ἴσα μο ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος, εἰ ἦν τετράγωνος καὶ τὰ δυ ρκ ψκ. λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, οὐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν καθέτων αὐτῶν στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν βάσεων αὐτῶν στερεὸν ποιῇ τετράγωνον. * πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων. καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ εὑρημένου ὀρθογωνίου γενήσεται ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ α δ ἐπὶ τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων, καὶ ἐὰν τάξωμεν ἓν αὐτῶν γ. δ. ε. ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ ις ιβ. ὥστε καὶ ἐμβαδὸν ἐμβαδοῦ ιβ εἶδει ιβ. κτλ. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ. μ. μα. τὸ δὲ ἕτερον ε. ιβ. ιγ. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσομεν τῶν ζητουμένων τριῶν τετραγώνων, ὃν μὲν θ. ὃν δὲ κε. ὃν δὲ πα. καὶ ἔχει τὸν ἐκ τῶν δ. ε. στερεὸν ἰσάσομεν δυ ᾱ. γενήσεται ὁ ς ῥητὸς ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. *

eum per quadratum alterius laterum circa rectum, & inuenio quadratos, vnum $\frac{9}{16}$ Q. alterum $\frac{25}{144}$ Q. tertium $\frac{64}{225}$ Q. & quilibet ipſorum cum 1 Q. facit quadratum. Reſtat vt ſolidus ſub tribus contentus æquetur 1 Q. Eſt autem ſolidus ille $\frac{14400}{518400}$ CC. hoc æquatur 1 Q. & omnia ad eundem denominatorem reducendo, & diuidendo per 1 Q. fiunt $\frac{14400}{518400}$ QQ. æqualia 1. & latus lateri æquatur, fitque $\frac{120}{720}$ Q. æquale 1. Eſt autem vnitas quadratus.* Quod ſi etiam $\frac{120}{720}$ Q. quadratus eſſet, ſoluta fuiſſet quæſtio. Non eſt autem. Eò igitur redactus ſum, vt inueniam tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub perpendiculis ductus in ſolidum ſub baſibus faciat quadratum, * cuius latus ſit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum vnius triangulorum. Et ſi omnia diuiſerimus per productum ex lateribus circa rectum inuenti rectanguli, orietur qui ſit ex producto laterum circa rectum ſecundi, in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et ſi vnum ipſorum ſtatuamus 3. 4. 5. Eò deuentum eſt vt inueniantur duo triangula rectangula, vt productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa rectum ſit 12 N. Proinde & area areæ 12. ſi autem 12. & 3. Hoc autem facile eſt, & eſt ſimile huic 9. 40. 41. Alterum * 5. 12. 13. Habentes ergo tria triangula rectangula, reuertamur ad initiò propoſitum. Et ſtatuamus trium quæſitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. & ſi ſolidum ex his æquemus 1 Q. fiet 1 N. rationalis. Ad poſitiones. *

* Legendum eſt 8. 15. 17.

IN QVAESTIONEM XXIV.

VIx ſcio an elegantiora & ſubtiliora problemata, tribus quæ ſequuntur, excogitari poſſint, ea tamen tam miſerè corrupta ſunt, vt hîc omni ex parte reſtituere Diophantum, humani, vt arbitror, vires ſuperet ingenij, niſi quis emendatiorem proferat codicem. Equidem ſatis apparet ad huius quæſtionis ſolutionem requiri vt inueniantur tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub perpendiculis ad ſolidum ſub baſibus habeat rationem quadrati ad quadratum. At in duabus ſequentibus inuenienda eſſe tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub hypotenuſis ad ſolidum ſub baſibus habeat rationem quadrati ad quadratum. Quomodo autem hæc lemmata expediat Diophantus percipere minimè potui. Quoniam verò nos ea perfectè demonſtrauimus libro tertio poriſmatum, & reliqua Diophanti operatio perſpicua eſt, verba illius quæ ſanitati reſtitui poterant, repoſuimus, reliqua vt erant relinquere malui, quàm in iis corrigendis diutius animum torquere. Moneo tantùm verba illa, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ. μ. μα. in Vaticano codice ſic haberi, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ θ. μ. μα. Quam lectionem vt pote probabiliorem, ſequutus ſum in mea verſione, verè enim numeri 9. 40. 41. conſtituunt triangulum rectangulum, quod non accidit ipſis 79. 40. 41.

Porrò multa ſunt hîc obſeruatione digna. Primò, vt inueniat quadratum qui adſcita vnitate faciat quadratum, ſumit Diophantus latera trianguli rectanguli, & quadratum baſeos diuidit per quadratum perpendiculi. Vt ex poſitis 3. 4. 5. diuidendo 9. per 16. fit $\frac{9}{16}$ quadratus quæſitus, nam illi

illi addendo 1. fit $\frac{25}{16}$. item quadratus. Cuius rei cauſa ſatis eſt euidens. Nam quolibet numero per ſeipſum diuiſo, quotiens eſt vnitas. Quare propoſitis quadratis 9. & 16. quorum ſumma quadratum facit, puta 25. ſi alter per alterum diuidatur vt 16. per 9. fit $\frac{9}{16}$. cui addendo $\frac{16}{16}$. ſeu vnitatem, quadratum fieri neceſſe eſt. Cùm enim fractiones ſint eiuſdem denominationis, ſufficit addere numeratores, denominatore communi retento. At numeratores ex hypotheſi faciunt quadratum. Quare cum & denominator ſit quadratus erit tota fractio $\frac{25}{16}$. quadratus, vt patet. Aduerte autem ſi velis tres diuerſos quadratos, quorum ſinguli adſcita vnitate, faciant quadratum, ſumenda eſſe tria triangula rectangula non ſimilia, qualia repoſuimus in textu Diophanti; nam ſi ſumantur ſimilia triangula, & quadrati laterum homologorum diuidantur per quadratos homologorum laterum, fiet idem quotiens, vt ſumptis triangulis 3. 4. 5. & 6. 8. 10. diuiſo 9. per 16. & 36. per 64. æquales fiunt quotientes $\frac{9}{16}$. & $\frac{36}{64}$. Quod accidit ob ſimilitudinem proportionum.

Secundò expoſitis tribus triangulis 3. 4. 5. 5. 12. 13. & 8. 15. 17. diuiduntur baſium quadrati per quadratos perpendiculorum, fiuntque quadrati $\frac{9}{16}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{64}{225}$. qui nota Q. inſigniti ſtatuuntur pro tribus quæſitis numeris, quia ſic quilibet adſumens 1 Q. facit quadratum. Porrò ſolidus ſub iis contentus, fractio eſt, cuius numerator 14400. fit ex mutua multiplicatione numeratorum 9. 25. 64. At denominator 518400 fit ex denominatorum 16. 144. 225. mutuo ductu. Eſt ergo huiuſmodi ſolidus $\frac{14400}{518400}$. Quia verò numeri ex mutua quadratorum multiplicatione orti, quadrati ſunt, quorum latera fiunt ex mutuo ductu laterum quadratorum eorundem, patet 14400. eſſe quadratum numeri 120. qui fit ex mutuo ductu baſium trium triangulorum expoſitorum, nempè 3. 5. 8. ſimiliter 518400. eſt quadratus numeri 720. qui continetur ſub perpendiculis 4. 12. 15. vnde eùm tandem $\frac{120}{720}$ Q. æquentur vnitati, & euidens ſit vt ſolutio contingat rationalis oportere ipſum $\frac{120}{720}$. eſſe quadratum, hoc eſt 120. ad 720. rationem eſſe debere quæ quadrati ad quadratum: Rectè infert Diophantus rem eò deductam eſſe, vt inueniantur tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub baſibus ad ſolidum ſub perpendiculis ſit in ratione quadrati ad quadratum.

Tertiò lemma propoſitum ſic abſoluimus propoſitione vndecima libri tertij poriſmatum. Exponatur quodlibet triangulum rectangulum 3. 4. 5. & effingantur alia duo triangula ab hypotenuſa expoſiti trianguli, & à quolibet laterum circa rectum modo quem tradidimus quinta tertij poriſmatum, fiet à 5. & 4. triangulum 9. 40. 41. At verò à 5. & 3. formabitur triangulum 16. 30. 34. Tria ergo hæc triangula ſatisfacient propoſito, nam ſolidus ſub perpendiculis 3. 9. 16. puta 432. ad 4800. ſolidum ſub baſibus rationem habet quàm 9. ad 100. Licétque vt monuimus in ſcholio vndecimæ tertij poriſmatum, loco cuiuſlibet inuentorum triangulorum, ſumere aliud ſimile; vt loco ipſius 16. 30. 34. ſumi poteſt 8. 15. 17. quod ſanè cum aliis duobus propoſitum abſoluit.

Denique his inuentis triangulis ſic explicatur quæſtio Diophanti, diuido quadratos baſium per quadratos perpendiculorum, & quotientibus addo notam Q. fiunt quæſiti numeri $\frac{9}{16}$. Q. $\frac{81}{1600}$. Q. & $\frac{64}{225}$. Q. & ſolidus ſub iis contentus, puta $\frac{46656}{5760000}$. C C. æquatur 1 Q. & tandem $\frac{46656}{5760000}$ Q Q. æquatur 1. ac proinde & latus lateri æquale eſt, hoc eſt $\frac{216}{2400}$ Q. ſeu in minimis $\frac{9}{100}$. æquatur vnitati. Quare fit 1 N. $\frac{10}{3}$. ſunt ergo quæſiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quorum mutuo ductu fit ſolidus $\frac{100}{9}$. cui ſi addantur ſigillatim ipſi quadrati, fiunt ruſus quadrati $\frac{625}{36}$. $\frac{1681}{144}$. $\frac{1156}{81}$. quorum latera $\frac{25}{6}$. $\frac{41}{12}$. $\frac{34}{9}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Methodum Diophanti quam non percipit Bachetus ita reſtituo, & explico. Quoniam primum triangulum eſt 3. 4. 5. & rectangulum ſub lateribus 12. eò deuentum eſt, inquit Diophantus, vt inueniantur duo triangula vt productus ex lateribus circa rectum, productis ex lateribus circa rectum ſit duodecuplus (& ratio eſt quia tunc productum ex lateribus vnius in productum ex lateribus alterius producet numerum qui erit planus ſimilis 12 atque ideo eorum mutuâ multiplicatione fiet quadratus, quod vult propoſitio) ſequitur Diophantus, proinde & area area 12. quod per ſe clarum eſt. Deinde (ſi autem 12 & 3) quia diuidendo 12. per quadratum 4 fit 3. & ſemper in multiplicatione oritur quadratum, nam quadratum diuiſum per quadratum facit quadratum. Reliqua Diophanti non præſtant propoſitum, ſed ita reſtituemus. In hoc caſu fingatur triangulum abs 7. & 2. alterum verò abs 5. & 2. & primum triangulorum erit triplum ad ſecundum, & duo propoſito ſatisfacient. Regula autem generalis inueniendi duo triangula rectangula in ratione datâ hæc eſt. Sit data ratio R. ad S. maioris ad minus, maius triangulum formabitur abs R bis + S & R. − S. Minus verò abs R. + S. bis & R. − S. aliter. Formetur primum triangulum abs R bis − S & R + S. ſecundum abs S bis − R. & R + S. aliter. Formetur

primum triangulum abs R ſexies Et R bis — S, ſecundum abs R quater + S & R quater — S. bis, aliter formetur primum triangulum abs R + S. quater & R bis — S quater, ſecundum abs S. ſexies & R — S bis, Ex iam dictis deduci poteſt methodus inueniendi tria triangula rectangula in proportione trium datorum numerorum modo duo dati numeri reliqui ſint quadrupli, ſint v.g. dati tres numeri R S. T & ſint ipſi R. T. ſimul quadrupli S. formabuntur ſic tria triangula.

Primum abs R + S. quater & R bis — S quater, ſecundum abs S. ſexies & R — S bis, tertium abs S quater + T & S quater — T bis, ſumpſimus autem R eſſe maiorem T.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula rectangula numero quorum areæ conſtituant triangulum rectangulum, eò enim deducetur quæſtio vt inueniatur triangulum cuius baſis & hypotenuſa ſint quadrupla perpendiculi. Hoc autem eſt facile & erit triangulum ſimile huic 17. 15. 8 tria verò triangula ſic formabuntur, primum abs 49. & 2. ſecundum abs 47. & 2. tertium abs 48 & 1.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula quorum areæ ſint in ratione trium quadratorum datorum quorum duo ſint quadrupli reliqui ac proinde poterunt eâdem viâ inueniri tria triangula eiuſdem areæ.

Imò & infinitis modis poſſumus conſtruere duo triangula rectangula in data ratione ducendo vnum ex terminis aut vtrumque in quadrata data &c.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐκ τούτων στερεὸς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δυ^ν α̅. καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων. ἑνὸς μὲν ις κε^{ων}. τοῦ δὲ ἑτέρου κε ρξθ^{ων}. τοῦ δὲ ξδ σπθ^{ων}, τάσσω αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ μένει ἡ δυ^ν α̅ λείψει ἑκάστου αὐτῶν ποιοῦσα τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει α̅. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κυβοκύβων β̅. ͵εχ. ἐν μορίῳ ρκβ̅. ͵ακε. ταῦτα ἴσα δυνάμει α̅. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν· γίνεται δυ^δ δυ^δ β̅. ͵εχ. ἐν μορίῳ ρκβ̅. ͵ακε. ἴσα μ^ο α̅. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. δέοι ἄρα καὶ δυ^δ δυ^δ β̅. ͵εχ. ἐν μορίῳ ρκβ̅. ͵ακε. εἶναι τετραγώνους, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν καθέτων στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ὑποτεινουσῶν στερεὸν, ποιῇ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, * καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, δέοι τὸν ὑποτεινουσῶν καὶ καθέτων τῆς ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ὀρθογωνίου ἑνός, ἔστω τὸ ἓν τῶν ὀρθογωνίων γ. δ. ε. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τοῦ ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου ἢ κ. εἴδη κ. καὶ ε. καὶ ῥᾴδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ε. ιβ. ιγ.

INVENIRE tres quadratos, vt ſolidus ſub ipſis contentus, quolibet ipſorum detracto, faciat quadratum. Ponatur ſolidus ſub ipſis contentus 1 Q. & rurſus quadrati qui quæruntur, ſumantur ex triangulis rectangulis, vnus à $\frac{16}{25}$. alter à $\frac{25}{169}$. tertius à $\frac{64}{289}$. ſtatuo eos in quadratis, & manet 1 Q. quolibet ipſorum detracto, faciens quadratum. Supereſt vt ſolidus ſub tribus contentus æquetur 1 Q. eſt autem ſolidus ille $\frac{25600}{1221025}$, C C. hoc ergo æquatur 1 Q & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt $\frac{25600}{1221025}$, QQ. æqualia 1. Eſt autem vnitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{25600}{1221025}$, QQ. eſſe quadratum latus habentem quadratum. Rurſus itaque res eò eſt reducta vt inueniantur tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub perpendiculis ductus in ſolidum ſub hypotenuſis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum *. Et ſi omnia diuidamus per productum ex hypotenuſa in perpendiculum vnius rectangulorum, oportet oriatur qui fit ex producto hypotenuſæ in perpendiculum, alicuius rectanguli, in productum ex hypotenuſa in perpendiculum alterius, eſto vnum rectangulorum 3. 4. 5. Eò itaque deuentum eſt, vt inueniantur duo triangula rectangula, vt numerus hypotenuſæ & perpendiculi,

numeri hypotenuſæ & perpendiculi ſit 20. ſi autem 20. & 5. & eſt facile, quippe maius eſt 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærenda ſunt alia duo, vt numerus hypotenuſæ & perpendiculi ſit 6. eſt autem maioris hypotenuſa 6 $\frac{1}{2}$. perpendiculum 60. Minoris autem hypotenuſa 2 $\frac{1}{2}$. qui verò in vno rectangulorum 12. & accipientes minima ſimilium, recurrimus ad propoſitum initio, & ponimus ſolidum ſub tribus contentum 1 Q. ipſorum autem quadratorum alterum 16 Q. alterum 576 Q. tertium $\frac{1}{11560}$ Q. ſupereſt vt ſolidus ſub tribus, æquetur 1 Q. & omnia in 1 Q. latuſque lateri æquetur, & inuenietur 1 N. 65. Ad poſitiones.*

τὸ δὲ ἐλάττον γ. δ. ε. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ᾖ μ° ς̄. ἔστι δὲ τῷ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μ° ς̄. α̅ ς''. ἡ δὲ κάθετος ξ̄. τοῦ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μ° β̄. α̅ ς'' ὁ δὲ ἐν τῇ α̅. τῶν ὀρθογωνίων ιβ̄. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τῶν ὁμοίων ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τὸν ἐκ τῶν τειῶν στερεὸν δ α̅. αὐτῶν δὲ τῶν τετραγώνων ὃν μὲν δ ις̄. ὃν δὲ δ φος̄. ὃν δὲ δ α̅. ἐν μορίῳ β̄. ρϙξα̅. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τειῶν στερεὸν ἰσῶσαι δ α̅. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν καὶ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. καὶ εὑρίσκεται ὁ ς° ξε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.*

IN QVAESTIONEM XXV.

EODEM ferè logiſmo vtitur hîc Diophantus, ac in præcedente. Nam vt inueniat tres quadratos qui ab vnitate ſigillatim detracti quadratum relinquant, ſumit tria triangula rectangula vt prius, & diuidit quadratum perpendiculi cuiuſliber trianguli per quadratum hypotenuſæ. Verbi gratia ſumpto triangulo 3. 4. 5. diuidit 16. per 25. vnde fit $\frac{16}{25}$. quadratus qui ab vnitate hoc eſt à $\frac{25}{25}$. detractus relinquit quadratum $\frac{9}{25}$. cuius rei ratio ex adnotatis ad præcedentem ſatis innoteſcit. Hinc ergo patet ſolidum ſub tribus huiuſmodi quadratis contentum, fieri ex ſolido ſub quadratis à tribus perpendiculis, diuiſo per ſolidum ſub quadratis à tribus hypotenuſis. Quamobrem latus quadratum huiuſmodi ſolidi conſtat ex ſolido ſub ipſis perpendiculis diuiſo per ſolidum ſub hypotenuſis; vt ergo latus hoc ſit quadratus numerus vt requiritur, neceſſe eſt inueniri tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub perpendiculis ad ſolidum ſub hypotenuſis ſit in ratione quadrati ad quadratum.

Quomodo autem inueniantur tria huiuſmodi triangula, non ſatis mihi conſtat ex corruptiſſimis Diophanti verbis; ſed illorum iacturam æquo animo ferre poſſumus, quandoquidem problema iſtud perfectè à nobis demonſtratum eſt propoſitione decimaquarta libri tertij poriſmatum, vbi tradidimus illius conſtructionem hoc pacto. Expoſito quolibet triangulo 5. 4. 3. Ita vt 8. duplum baſeos ſit maius perpendiculo 3. inueniatur per duodecimam tertij poriſmatum aliud triangulum vt planus ſub perpendiculis vtriuſque trianguli, ſuperet planum ſub baſibus quadrato numero, erit illud 13. 5. 12. Iam à duobus triangulis 5. 4. 3. 13. 5. 12. effingatur tertium per decimam tertij poriſmatum. Cuius hypotenuſa 65. fiet ex mutuo ductu hypotenuſarum 13. & 5. Baſis autem 63. erit ſumma productorum ex baſi cuiuſlibet trianguli in perpendiculum alterius. Denique perpendiculum 16. erit differentia productorum ex baſi in baſim, & ex perpendiculo in perpendiculum. Sic habebimus tria triangula quæſita puta 5. 4. 3. 13. 5. 12. 65. 63. 16. Nam planus ſub perpendiculis eſt 576. planus ſub hypotenuſis 4225. quorum vterque quadratus cùm ſit, eorum vtique ratio eſt quæ quadrati ad quadratum.

Hoc expedito lemmate facilè ſoluitur quæſtio Diophanti. Sit enim ſolidus ſub quæſitis quadratis contentus 1 Q. Ipſi verò quadrati ſtatuantur ij qui fiunt diuidendo quadratum perpendiculi cuiuſlibet inuentorum triangulorum per quadratum hypotenuſæ, puta $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{256}{4225}$ Q. ſitque ſolidus ſub ipſis contentus $\frac{331776}{17850625}$ C C. æqualis 1 Q. ſeu $\frac{331776}{17850625}$ Q Q æquatur 1. Quare & latus lateri, hoc eſt $\frac{576}{4225}$ Q. æquatur 1. & fit 1 N. $\frac{65}{24}$. Ad poſitiones. Erunt quæſiti quadrati $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. ſolidus ſub iis contentus eſt $\frac{4225}{576}$. à quo ſi quilibet eorum auferatur, remanent quadrati $\frac{169}{36}$. $\frac{625}{576}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{13}{6}$. $\frac{25}{24}$. $\frac{21}{8}$.

OBSERVATIO D. P. F.

AD elucidationem & explicationem quæſtionis 25. iuxta methodum Diophanti quam Bachetus ſimiliter prætermiſit quærenda ſunt duo triangula rectangula vt productum ſub hypotenuſa & perpendiculo vnius ad productum ſub hypotenuſa & perpendiculo alterius habeat rationem datam.

Quæ ſanè quæſtio diu nos torſit & verò difficillimam quilibet tentando experietur, ſed tandem patuit generalis ad ipſius ſolutionem methodus.

Quærantur duo triangula vt rectangulum ſub hypotenuſa vnius & perpendiculo, rectanguli ſub hypotenuſa alterius & perpendiculo ſit duplum.

Fingatur vnum ex triangulis ab A & B. alterum ab A & D. Rectangulum ſub hypotenuſa prioris & perpendiculo erit B in A cubum bis + B cub. in A. bis, rectangulũ verò ſub hypotenuſa poſterioris & perpendiculo erit D. in A. C. bis + D. C. in A bis, cum igitur B in A. C. bis + B. C. in A. bis ſit duplũ rectanguli D in A. C. bis + D. C. in A. bis, ergo B in A. C. + B. C. in A. æquabitur D. in A. C. bis + D. C. in A. bis & omnibus abs A diuiſis fiet B in A. quadratum + B. C. æquale D. in A. Q. bis + D. C. bis & per antitheſin D. C. bis − B. C. æquabitur B. in A Q. − D. in A. Q. bis, ſi igitur D. C. − B. bis C. diuiſum per B − D bis æquetur quadrato ſoluta erit quæſtio.

Quærendi igitur duo numeri loco ipſorum B & D eâ conditione vt duplum cubi vnius − alio diuiſum vel multiplicatum (eodem enim res recidit) per duplum poſterioris primo faciat quadratum, ponatur vnus eſſe 1 N + 1. Alter 1 cubus duplus prioris − cubo à poſteriore facit 1 + 6 N + 6 q + 2 C duplus autem poſterioris − priore facit 1 − 1 N. ergo ſi ducas 1 − 1 N in 1 + 6 N + 6 q − 2 C fiet quadratus, productũ illud æquatur 1 + 5 N − 4 C − 2 qq. Quod æquandũ quadrato ab $\frac{5}{2}$ N − 1 − $\frac{21}{8}$ q. & omnia ſtatim conſtabũt, propoſitio autem ad omnes rationes extendetur ſi loco vnius ex quærendis numeris ponatur A + exceſſus maioris rationis termini ſupra minorem, & loco alterius ille ipſe exceſſus vt iam à nobis in ratione dupla eſt factum. Hac quippe ratione ſemper vnitatum numerus euadet quadratus & æquatio erit procliuis. Hoc peracto inuenientur duo numeri qui ipſos B & D repreſentabunt & ad primam quæſtionem fiet reditus. Retractanti quæ hucuſque ad 25 quæſtionem ſcripſimus viſum erat ſtatim omnia delere quia abductio ad problema quod perfecimus non conuenit quæſtioni noſtræ. quia tamen quæſtionem aliam ad quam malè præſens problema adduxeramus rectè conſtruximus, non tam operam perdidimus, quam malè collocauimus, & ideo maneat ſcriptura marginalis intacta.

Quæſtionem ipſam Diophantæam nouo iterum examini ſubiicientes & methodum noſtram ſedulò conſulentes tandem generaliter ſoluimus. Exemplum tantum ſubiiciemus confiſi numeros ipſos ſatis indicaturos non ſorti, ſed arti ſolutionem deberi. in propoſitione Diophanti quærenda duo triangula rectangula ea conditione vt productum ſub hypotenuſa vnius & perpendiculo ad productum ſub hypotenuſa & perpendiculo alterius habeat rationem quam 5 ad 1. En duo illa triangula, primum cuius hypotenuſa 48543669109. baſis 36083779309. perpendiculum 32472275580. ſecundum cuius hypotenuſa 42636752938. baſis 41990695480. perpendiculum 7394200038.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δυ ᾱ. αὐτοὶ δὲ ἄρ᾽ εἶεν δήποτε τελῶν ὀρθογωνίων. καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ πρὸ ταύτης προτάσει. εἰ χρώμεθα οὖν καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τάσσομεν τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὃν μὲν * δυ κε̄. ὃν δὲ δυ χκε̄. ὃν δὲ δυνάμεις α. ͵δψπδ. καὶ πάλιν μένει ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μείζων η̄. καὶ μένει. *

INVENIRE tres quadratos, vt ſolidus ſub ipſis contentus, detractus ab vnoquoque ipſorum, faciat quadratum. Rurſus ſolidus ſub ipſis contentus ſtatuatur 1 Q. ipſi autem à quibuſvis rectangulis petantur. Et rurſus hîc res deuoluitur ad ea quæ in præcedente fuerunt quæſita. Si igitur in hac iiſdem vtamur rectangulis, & ponamus eorum qui quæruntur quadratorum * vnum 25 Q. alterum 625 Q. tertium 14784 Q. Et rurſus ſolidus ſub tribus contentus detractus à quolibet, facit quadratum. Supereſt vt ſolidus ille æquetur 1 Q. vnde inuenitur 1 N. maior quàm 8. & conſtat. *

IN QVAESTIONEM XXVI.

SATIS apparet ex lemmate ad præcedentem explicato pendere quæſtionis huius ſolutionem, nam vt prius inuenienda ſunt tria triangula rectangula; vt ſolidus ſub hypotenuſis ad ſolidum ſub perpendiculis habeat rationem quadrati ad quadratum. Et ſicut ibi ponebantur quæſiti quadrati $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{256}{4225}$ Q. ita vt auferendo quemlibet ab 1 Q. remanerent quadrati, puta $\frac{16}{25}$ Q. $\frac{25}{169}$ Q. $\frac{3969}{4225}$ Q. Ita hîc numeratoribus in denominatores mutatis, & è conuerſo, ſtatuuntur quæſiti quadrati $\frac{25}{9}$ Q. $\frac{169}{144}$. $\frac{4225}{256}$ Q. vt à quolibet auferendo 1 Q. remaneant quadrati $\frac{16}{9}$ Q. $\frac{25}{144}$ Q. $\frac{3969}{256}$ Q. fitque ſolidus ſub tribus quæſitis contentus $\frac{17850625}{331776}$ CC. æquales 1 Q. & tandem $\frac{4225}{576}$ Q. æquatur vnitati. Vnde fit 1 N. $\frac{24}{65}$. Sunt ergo quæſiti numeri. $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{9}{4}$. Nam ſolidus ſub iis contentus eſt $\frac{576}{4225}$. quem auferendo ſigillatim à quolibet ipſorum, remanent quadrati $\frac{1024}{4225}$. $\frac{4}{169}$. $\frac{35721}{16900}$. quorum latera $\frac{32}{65}$. $\frac{2}{13}$. $\frac{189}{130}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres quadratos, vt producti ex binorum multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum. Et quoniam quæro productum ex primo in ſecundum addita vnitate facere quadratum, omnia ducantur in tertium qui eſt quadratus. Itaque oportebit productum ex primo in ſecundum, ductum in tertium, hoc eſt ſolidum ſub tribus contentum, cum tertio facere quadratum, ſicut etiam cum primo & ſecundo. Id autem ante demonſtrauimus. Igitur illi numeri hanc quoque ſoluunt quæſtionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μο α. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ μονάδος α. ποιεῖν τετράγωνον. πάντα ἐπὶ τὸν τρίτον ὄντα τετράγωνον. ὥστε δέησει τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ὡς καὶ μετὰ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τοῦτο γὰρ προαπεδείξαμεν. ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο τὸ ζήτημα.

IN QVAESTIONEM XXVII.

REFERTVR hæc propoſitio ad vigeſimam quartam, & iidem prorſus numeri vtramque quæſtionem ſoluunt, vt rectè infert Diophantus, quod tamen vt euidentius fiat, ſic demonſtro.

A $\frac{25}{4}$. B $\frac{9}{16}$. C $\frac{256}{81}$.
D $\frac{225}{64}$. G $\frac{289}{64}$.

Sint tres quadrati A B C. ſoluentes vigeſimam quartam, ita vt ſolidus ſub ipſis contentus quolibet adiecto quadratum faciat; dico eum qui fit à duobus quibuſuis addita vnitate fore quadratum. Ducto enim A in B fiat D. cui addita vnitate fiat G. probandum eſt G eſſe quadratum. Itaque quia ex hypotheſi ducto D in C. & producto addendo ipſum C. fit quadratus. At ducere D in C & producto addere C. idem eſt atque ducere C in numerum vnitate maiorem ipſo D, hoc eſt in ipſum G, ſequitur ex C in G. fieri quadratum. ᵃ Ergo C & G ſunt plani ſimiles. ᵇ Quare cùm C. ſit quadratus ex hypotheſi, oportet & ipſum G quadratum eſſe. Quod demonſtrandum erat. a 4. noni. b 24. octaui.

Sunt ergo quæſiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. Nam ex binorum mutuo ductu fiunt numeri $\frac{225}{64}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{1600}{81}$ quibus addendo ſigillatim vnitatem, fiunt quadrati $\frac{289}{64}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{1681}{81}$. quorum latera ſunt $\frac{17}{8}$. $\frac{5}{3}$. $\frac{41}{9}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE tres quadratos vt producti ex binorum multiplicatione detracta vnitate, faciat quadratum. Omnia in tertium. Itaque productus ex primo in ſecundum ductus in tertium, hoc eſt ſolidus ſub tribus contentus, detracto tertio quadratum facit; ſicut & idem ſolidus ſub tribus contentus, facit quadratum detracto ſecundo & tertio. Hoc autem ſupra demonſtratum eſt. Igitur illi numeri hoc quoque præſtant.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μο α. ποιῇ τετράγωνον πάντα ἐπὶ τὸν τρίτον. ὥστε ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον τουτέστι ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς λείψας τὸν τρίτον ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε καὶ ἑκάτερον τόν τε πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον λείψας ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ποιεῖ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. ἐκεῖνοι οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

HÆc etiam refertur ad vigeſimam quintam & iidem numeri vtramque ſoluunt quæſtionem. Nam à ſolido ſub tribus quadratis contento auferre, verbi gratia, tertium idem eſt atque ducere planum ſub primo & ſecundo vnitate multatum, in ipſum tertium. Quare cùm ſolidus ſub tribus contentus, detracto tertio ſit quadratus, neceſſe eſt & planum ſub primo & ſecundo detracta vnitate eſſe quadratum, alioquin eo ducto in tertium qui quadratus eſt, non poſſet fieri quadratus. Soluitur ergo hæc quæſtio per quadratos inuentos per vigeſimam quintam, nempe per quadratos $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{4}{9}$. Etenim plani ſub binis contenti ſunt $\frac{4225}{576}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{169}{144}$. A quibus auferendo ſigillatim vnitatem, remanent quadrati $\frac{3649}{576}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{25}{144}$. quorum latera $\frac{61}{24}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{5}{12}$.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦντες τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀρθέντα ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν πάντα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ τρίτον. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδειχαμεν.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione detractus ab vnitate, faciat quadratum. Rurſus quærentes eum qui a duobus quibuſuis fit ſublatum ab vnitate, facere quadratum, ſi omnia ducamus in tertium; rurſum eò deducimur vt inueniamus tres numeros, è quibus confectus ſolidus ſi tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem ſuprà eſt demonſtratum.

IN QVAESTIONEM XXIX.

PENDET rurſus hæc propoſitio à vegeſima ſexta, & iidem quadrati vtrique quæſtioni ſatisfaciunt. Ratio eſt, quia ſolidus ſub tribus contentus detractus, verbi gratia, à tertio relinquit quadratum per vegeſimam ſextam. At idem quadratus fit ſi planus ſub primo & ſecundo detrahatur ab vnitate, & reſiduum ducatur in tertium. Ergo neceſſe eſt planum ea primo in ſecundum detractum ab vnitate relinquere quadratum, vt ſcilicet eo in tertium qui quadratus eſt, ducto, fiat quadratus. Quod autem ſi planus ea primo in ſecundum detrahatur ab vnitate, & reſiduum ducatur in tertium, idem fiat numerus, atque ſi ſolidus ſub tribus auferatur à tertio, ne quis ſcrupulus maneat, ſic demonſtro. Sint tres quicunque numeri A B C. & ſolidus ſub ipſis D. quem auferendo à tertio C. remaneat K. Tum ducto A in B fiat G quo detracto ab vnitate relinquatur H. Dico ſi H. ducatur in C fieri K. Quia enim D. eſt ſolidus ſub tribus contentus, & G planus, ſub duobus A B. patet ducto C in G. fieri ſolidum D. At duo G H æquantur vnitati ea conſtructione. Quare cùm ducendo C in vnitatem, fiat ipſe C. producti ex C in ipſos G H. puta D K ſimul æquantur ipſi C. At ea C in G fit D vt oſtenſum eſt. Ergo ex C in H fiet K. Quod erat oſtendendum.

D $\frac{1}{24}$.
A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{3}$. C $\frac{1}{4}$.
G $\frac{1}{6}$. H $\frac{5}{6}$. K $\frac{5}{24}$.

Itaque ſumptis quadratis $\frac{64}{169}$. $\frac{9}{25}$. $\frac{9}{4}$ per vigeſimam ſextam inuentis, ex binorum mutuo ductu fient $\frac{576}{4225}$. $\frac{9}{25}$. $\frac{144}{169}$. quos auferendo ſigillatim ab vnitate, remanent quadrati $\frac{3649}{4225}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{25}{169}$. quorum latera $\frac{61}{65}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{13}$.

Cæterùm hæ tres quæſtiones paulò vniuerſalius proponi poſſunt, quod exemplo vigeſimæ ſeptimæ docuiſſe ſufficiat.

Inuenire tres quadratos, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, addito quouis quadratoquadrato, faciat quadratum.

Datus quadratoquadratus eſto 16.

Sumo quadratos ſoluentes vigeſimam ſeptimam, puta $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{225}$. quos ſigillatim multiplico per latus quadratum ipſius 16. puta per 4. & fiunt quæſiti quadrati 25. $\frac{9}{4}$. $\frac{1024}{225}$. quos ſatisfacere propoſito perſpicuum eſt. Nam primo quadratos eos eſſe conſtat, quia fiunt ex quadrato 4. in tres quadratos ſigillatim ducto, idemque ſemper eueniet, quia latus quadratum cuiuſlibet quadratoquadrati, quadratus eſt. Deinde cùm ſint quadrupli priorum quadratorum at ex quadruplo numeri in quadruplum alterius, fiat ſedecuplum producti ea numero in numerum, patet productos ex binorum multiplicatione eſſe ſedecuplos priorum productorum. Quare ſi his addatur 16. puta ſedecuplum vnitatis, fient numeri ſedecupli ad quadratos qui fiunt ſi numeri per vigeſimam ſeptimam inuenti bini inter ſe multiplicentur, & productis addatur vnitas. Ac proinde cùm ex eo quadrato in quadratum fiat quadratus, patet propoſitum.

QVÆSTIO XXX.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini ſumpti, adſcitoque dato numero, faciant quadratum. Eſto datus 15. & ſit vnus quæſitorum 9. Quærendi ſunt ergo alij duo, vt quilibet illorum cum 24. faciat quadratum, & ambo ſimul cum 15. faciant quadratum. Oportet ergo quærere duos quadratos, quorum vterque cum 24. faciat quadratum. Sumamus numeros qui metiantur 24. & ſint latera circa rectum trianguli rectanguli. Eſto ſecundum $\frac{4}{1N}$. oppoſitus, erit 6 N. vtriuſque horum ſemiſſis eſt $\frac{2}{1N}$. & 3 N. Rurſus eſto ſecundum $\frac{3}{1N}$. oppoſitus erit 8 N. vtriuſque ſemiſſis eſt $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & 4 N. Sit ergo vnius quadratorum latus ab interuallo $\frac{2}{1N}$. & 3 N. alterius verò latus ab interuallo $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & 4 N. ſic enim vterque quadratorum cum 24. faciet quadratum. Reſtat vt & ambo iuncti cum 15. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ + 25 Q. − 9. Igitur 25 Q. + $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ − 9. æquantur quadrato. Eſto quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{6}$ Ad poſitiones.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι οἱ τετράγωνοι, καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ιε̅. καὶ ἔστω εἷς ζητουμένων μο θ̅. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μο κδ̅ ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ μετὰ μο ιε̅. ποιῇ τετράγωνον. δεῖ οὖν ζητεῖν δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μο κδ̅. ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνομεν τοὺς μετροῦντας μο κδ̅. καὶ τριγώνου ὀρθογωνίου πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ὀρθήν. [ἔστω κατὰ ἀριθμοστὸν δ. ὁ ἀντικείμενος ςς ς̅. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν β. καὶ ἀριθμοὶ γ̅. πάλιν] ἔστω κατὰ ἀριθμοστὸν γ. ὁ ἀντικείμενος ςς η̅. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν α̅. α ς. καὶ ςς δ̅. ἔστω ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ β̅. καὶ ςς γ̅. [ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ α̅. α ς. καὶ ςς δ̅.] καὶ μένει ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μο κδ̅. ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ καὶ συναμφοτέρους μετὰ μο ιε̅ ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυναμοστὸν ς̅. α δ. καὶ δυνάμεις κε̅, ⋔ μο θ̅ δυνάμεις ἄρα κε̅ [καὶ δυναμοστὸν ς̅. α δ.] ⋔ μο θ̅. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δυνάμεσι κε̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæſtionis beneficio, ſequentis quæſtionis ſolutionem dabimus quæ alioquin difficillima ſane videretur.

Dato numero, quatuor inuenire numeros quorum bini ſumpti adſcitoque dato numero faciant quadratum. Sit datus numerus 15 & primum per hanc quæſtionem reperiantur tres quadrati quorum bini ſumpti adſcitoque dato numero faciant quadratum. Et ſint illi tres quadrati 25. $\frac{1}{100}$. $\frac{529}{225}$.

Ponatur primus quatuor numerorum quæſitorum 1 Q + 15.

Secundus 10 N + 25. (quia 25. eſt vnus ex quadratis, 10 N autem eſt duplum lateris in N.)

Tertius eâdem ratione ponatur $\frac{1}{5}$ N + $\frac{1}{100}$, quartus denique $\frac{46}{15}$ N + $\frac{529}{225}$. Ita quippe inſtitutis poſitionibus tribus propoſitis partibus ſatisfit, quilibet enim numerum vnâ cum primo adſcito 15 facit quadratum. Supereſt vt ſecundus & tertius addito 15, item tertius & quartus addito 15, denique ſecundus & quartus, eodem addito 15 faciant quadratum & oritur triplicata æqualitas cuius ſolutio in promptu cum ex conſtructione cuius artificium ab hac quæſtione deſumpſimus in quolibet termino æquando reperiantur vnitates tantum quadrata & numeri. Recurrendum igitur ad ea quæ diximus ad quæſtionem vigeſimamquartam libri ſexti.

IN QVAESTIONEM XXX.

SVBTILITER Diophantus poſito vno quadratorum ad placitum , puta 9. inueſtigat reliquos. Cum enim 9. additus dato numero 15. faciat 24. certum eſt reliquorum quemlibet adſumpto 24. debere conficere quadratum , quia quilibet ipſorum addito 9. & 15. debet eſſe quadratus. Sed & vterque ſimul adſcito 15. debet facere quadratum. Reliquum ergo eſt vt duo quadrati reperiantur, quorum quilibet cum 24. faciat quadratum, & eorum ſumma adſumens 15. ſit quadratus. Hic ſanè mirabili artificio ponit latera quadratorum 3 N. $-\frac{2}{1N}$ & 4 N. $-\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ vnde fiant quadrati 9 Q. − 12 + $\frac{4}{1Q}$ & 16 Q. − 12 + $\frac{\frac{9}{4}}{1Q}$ quorum vterque adſumens 24. quadratum facit , puta 9 Q. + 12 + $\frac{4}{1Q}$ & 16 Q. + 12 + $\frac{\frac{9}{4}}{1Q}$ à lateribus 3 N. + $\frac{2}{1N}$. & 4 N. + $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ Equidem certum eſt ſi quadrati duo fingatur ab aliquo binomio, & à reſiduo quod ei reſpondet , interuallum quadratorum fore quadruplum plani ſub partibus comprehenſi, vt quadratorum à lateribus 1 N. + 3. & 1 N. − 3. interuallum eſt 12 N. quadruplum producti ex 1 N. in 3. Quare Diophantus quærens quadratum cui addendo 24. fiat quadratus , ponit pro latere reſiduum tale, vt planus ſub partibus ſit quadrans de 24. puta 6. Id vt conſequatur ſumit duos numeros quorum mutuo ductu fiat 24. puta 6. & 4. & vtriuſque ſemiſſem capit, puta 3. & 2. nam ex ſemiſſi in ſemiſſem fit quadrans producti ex toto numero in totum numerum. Formandum ergo eſt reſiduum à 3. & 2. ponendo ſcilicet alterum cum ſigno N. puta 3 N. ex altero verò formando fractionem numericam , puta $\frac{2}{1N}$. & fit reſiduum 3 N. $-\frac{2}{1N}$. in quo patet planum ſub partibus eſſe − 6. atque adeo duplum illius eſſe − 12. cui addendo 24. fit + 12. ſola ſignorum mutatione facta. Eadem arte fingit latus tertij quadrati, ſumendo 8. & 3. quorum mutuo ductu fit 24. & capiendo ſemiſſes eorum , puta 4. & 1 ½. vnde formatur reſiduum 4 N. $-\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ vbi etiam contingit planum ſub partibus eſſe − 6. eadem de cauſa.

Porrò non temerè ſumendi ſunt duo cuicunque numeri mutuo ductu producentes 24. quales ſumpſit author 6. & 4. & rurſus 8. & 3. ſed tales eſſe debent , vt duo 6. & 8. Itemque 4. & 3. conſtituant latera circa rectum trianguli rectanguli , vt infrà docebimus. Ideò ſumit Diophantus duos quoſcunque numeros 3. & 4. qui ſint latera circa rectum trianguli rectanguli , & per eos diuidendo
1. 3. poriſ. 24. naſcitur alios duos 8. & 6. qui ſunt etiam latera circa rectum trianguli rectanguli , ' quia eorum eadem eſt proportio , quæ ipſorum 3. & 4. vt conſtat per decimam nonam ſeptimi. Vnde etiam ſequitur & horum ſemiſſes , puta 1½. & 2. Itemque 4. & 3. conſtituere latera circa rectum trianguli rectanguli ob identitatem rurſus proportionis.

Neceſſe eſt autem huiuſmodi numeros conſtituere latera circa rectum trianguli rectanguli , vt ſumma quadratorum ab ipſis ortorum ſit quadratus numerus , quia oportet ſummam quadratorum fictitiorum adſcito 15. puta 25 Q. − 9 + $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. eſſe trinomium cuius quælibet pars conſtet quadrato numero. At 25 Q. eſt ſumma quadratorum à lateribus 3 N. & 4 N. & rurſus $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$ eſt ſumma quadratorum à lateribus $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. & $\frac{2}{1N}$. vnde patet oportere vt 3 N. & 4 N. Itemque $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & $\frac{2}{1N}$. ſint latera circa rectum trianguli rectanguli. Vnitates verò − 9. æquantur quadrato qui poſitus eſt pro primo quæſitorum , vt patet.

Ingenioſa itaque laterum fictione aſſequutus eſt Diophantus , vt quælibet pars trinomij quadrato æquandi , conſtet quadrato numero, quod ni foret , qua quæſo ratione æquaretur quadrato 25 Q. − 9 + $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$? Sanè ſi velis fingere illius latus 5 N. + vel − certo vnitatum numero , nil efficies, neque ſi ponas latus illud $\frac{\frac{5}{2}}{1N}$. plus vel minus certo Numerorum numero , nam vtroque modo vel incides in abſurdum , vel in complexam æquationem , talemve ex qua non prodeat ſolutio rationalis. Itaque huiuſmodi æquatio ritè nequit explicari , niſi æquando propoſitum numerum , vel cum 25 Q. vel cum $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. ſic enim ablatis vtrimque æqualibus remanebunt 9. æquales vel $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. vel 25 Q. & res optimè ſuccedet , quia vtrumque extremum æquationis reperitur quadratus. Poſuit Diophantus 25 Q. æquales 25 Q − 9 + $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. Quare tandem 9. æquantur $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$ & omnia per 1 Q. fiunt 9 Q. æquales $\frac{25}{4}$. Quare 1 N. eſt $\frac{5}{6}$. Ad poſitiones ſunt latera quadratorum $\frac{1}{10}$ & $\frac{23}{15}$. Sunt ergo tres quæſiti quadrati 9. $\frac{1}{100}$. $\frac{529}{225}$. nam bini adſumpto 15. faciunt quadratos $\frac{2401}{100}$. $\frac{5929}{225}$. $\frac{625}{36}$. quorum latera $\frac{49}{10}$. $\frac{77}{15}$. $\frac{25}{6}$.

Quod ſi ponas 25 Q. − 9 + $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$ æquari $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. fient 9. æqualis 25 Q. & erit 1 N. $\frac{3}{5}$. eadem tamen quæ prius continget ſolutio , quia tunc concipiendum erit latera quadratorum fuiſſe $\frac{2}{1N}$ − 3 N. & $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ − 4. N. quæ per valorem Numeri reſoluta , erunt vt ſuprà $\frac{23}{15}$ & $\frac{1}{10}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO XXXI.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini ſumpti detracto dato numero, faciant quadratum. Eſto datus 13. Ponatur rurſus quæſitorum quadratorum vnus 25. Quærendi ergo alij duo, vt vterque ſigillatim cum 12. faciant quadratum, ambo verò ſimul detractis 13. faciant quadratum. Rurſum ſumimus dimenſionem ſecundum numeros 3. & 4. fitque prioris quadrati latus ab interuallo inter $1\frac{1}{2}$ N. & $\frac{2}{1N}$. alterius verò ab interuallo inter 2 N. & $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. Sic enim vtriuſque quadratus adſcito 12. facit quadratum. Supereſt vt ambo ſimul detracto 13. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ + $6\frac{1}{4}$ Q. − 25. Hoc ergo æquatur quadrato. Eſto ipſis $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$. & fit 1 N. 2. Ad poſitiones.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι καὶ λείψαντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ιγ. τετάχθω πάλιν εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων μο κε. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μο ιβ. ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ λείψας μο ιγ. ποιῇ τετράγωνον. πάλιν λαμβάνομεν τὴν μέθοδον κατὰ ἀριθμοὺς τρεῖς καὶ δ. γίνεται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ςοῦ α̅. α̅ ∠ʹ. καὶ ἀριθμοστοῦ β̅. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς ςῶν β̅. καὶ ἀριθμοστοῦ α̅. α̅ ∠ʹ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἑκατέρου τετράγωνος μετὰ μο ιβ. ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ συναμφοτέρους λείψει μο ιγ. ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυναμοστὰ ς̅. α̅ δʹ. δυνάμεις ς̅ α̅ δʹ. λείψει μο κε. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δυναμοστῷ ς̅. α̅ δʹ, καὶ γίνεται ὁ ς μο β̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

Qvo artificio in ſuperiore quæſtione vſi ſumus vt quatuor numeros inueniremus quorũ bini ſumpti adſcito dato numero conficerent quadratũ, ſimili in hac quæſtione vti poſſumus, vt inueniãtur quatuor numeri quorum bini ſumpti detracto dato numero conficiant quadratum. Ponendus enim primus 1 Q. + numero dato. Secundus quadratus primus ex inuentis in hac quæſtione vna cum duplo ab ipſius latere in N. & reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXXI.

EX dictis ad præcedentem ſatis intelligitur hæc quæſtio. Ponit primum quadratum 25. vnde cùm auferendo 13. à 25. ſuperſit 12. patet quærendos duos quadratos, quorum vterque adſcito 12. faciat quadratum, ita vt amborum ſumma detracto 13. faciat etiam quadratum. Inuenit autem duos quadratos, quorum vterque adſcito 12. faciat quadratum eodem artificio quo vſus eſt in præcedente, & fingit eorum latera à lateribus circa rectum trianguli rectanguli, quorum mutuo ductu fiat 3. quadrans ipſius 12. Et ponit vnum latus 2 N. − $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ alterum $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ − 2 N. vnde quadratorum ſumma detractis 13. fit $\frac{25}{4}$ Q. − 25 + $\frac{25/4}{1Q}$ æquanda quadrato, puta $\frac{25/4}{1Q}$. Quare tandem $\frac{25}{4}$ Q. æquantur 25. & fit 1 N. 2. ſunt ergo latera quadratorum quæſitorum 2. & $\frac{13}{4}$. & fiunt tres quadrati quæſiti 25. 4. $\frac{169}{16}$. quorum bini detracto 13. relinquunt quadratos 16. $\frac{25}{16}$. $\frac{361}{16}$.

Cæterùm moneo & hanc & præcedentem infinitas recipere ſolutiones ex duplici capite. Primò enim primus quadratus poni poteſt quilibet vnitatum numerus quadratus. Deinde latera ſecundi & tertij variè fingi poſſunt, à diuerſis ſcilicet numeris qui ſint latera circa rectum diuerſorum triangulorum rectangulorum non ſimilium. Verbi gratia loco ipſorum 3. & 4 ſumi poterant 8. & 15. vel 5. & 12. & alij infiniti, vt in hac quæſtione ſi libeat vti numeris 5. & 12. ſumo numeros oppoſitos qui ſcilicet in hos ducti producunt 12 hi ſunt $\frac{12}{5}$ & 1. & omnium capio ſemiſſes, puta $\frac{6}{5}$. 6. $\frac{1}{2}$. $\frac{5}{2}$. fingo ergo latera quadratorum $\frac{5}{2}$ N. − $\frac{6/5}{1N}$ & 6 N. − $\frac{1/2}{1N}$. & patet quemlibet quadratorum adſcito 12. facere quadratum. Reſtat vt eorum ſumma detractis 13. faciat quadratum, facit autem $\frac{169}{4}$ Q. − 25 + $\frac{169/100}{1Q}$. hoc ergo æquetur $\frac{169/100}{1Q}$. fiet $\frac{169}{4}$ Q. æqualis 25. vnde fit 1 N. $\frac{10}{13}$. ſuntque quadratorum latera $\frac{118}{325}$. & $\frac{1031}{260}$. Itaque tres quæſiti quadrati ſunt

25. [illegible]. [illegible]. quorum bini detracto 13. faciunt quadratos [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum latera [illegible]. [illegible]. [illegible]. videtur autem hic omiſſa huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres quadratos, quorum bini detracti à dato numero relinquant quadratum.

Sed hanc vt nimis facilem prætermiſit Diophantus. Sit enim datus 21. patet nil aliud poſtulari quàm vt 21. diuidatur in tres quadratos, quales ſunt 16. 4. 1. euidens quippe eſt ſi bini auferantur à 21. relinqui tertium.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω δὴ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν δυ ᾱ. ὁ δὲ μο δ. ὁ δὲ μο θ. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυναμοδυνάμεως μιᾶς μο ϟζ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δυ ᾱ. λείψει μο ῑ. καὶ γίνονται λοιπαὶ δυ κ̄. ἴσαι μο γ. καὶ εἰ ἦν ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, καὶ ἀπῆκται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους, καὶ ἀριθμόν τινα ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας τοὺς ἀπὸ τῶν ζητουμένων τετραγώνους ποιῇ ἀριθμόν τινα, ὃς πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοῦ λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὃς μὲν δυ ᾱ. ὃς δὲ μο δ. καὶ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς δυ ᾱ μο δ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος, ἐὰν λείψῃ τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους, καταλείπει δυ η̄. θέλομεν ταῦτα πρὸς τὸν δὶς δυ ᾱ μο δ. τουτέστι πρὸς δυ β̄ μο η̄. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ πάντων τὸ ἥμισυ. ὥστε καὶ δυνάμεις δ πρὸς δυ ᾱ μο δ. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ εἰσὶν αἱ δυνάμεις δ τετράγωνος, ὥστε καὶ δυ ᾱ μο δ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςο ᾱ μο ᾱ. ὅθεν ὁ ςος μο α. ᾱ ∠ʹ. ἔσται τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὁ μὲν μο β. ᾱ δʹ. ὁ δὲ μο δ. ὁ δὲ τυχὼν μο κε δʹ. καὶ πάντα τετράκις. γίνεται ὁ μὲν μο θ. ὁ δὲ μο ιϛ. ὁ δὲ τυχὼν μο κε. ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τῶν τριῶν τετραγώνων. ὃν μὲν δυ ᾱ. ὃν δὲ μο θ. ὃν δὲ μο ιϛ. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυδυ ᾱ μο τλζ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δυ ᾱ. λείψει μο κε. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς μο ιβ εʹ. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres quadratos, vt compoſitus ex ipſorum quadratis, faciat quadratum. Statuatur quæſitorum vnus 1 Q. alter 4. alter 9. & fit compoſitus ex eorum quadratis 1 QQ. + 97. æqualis quadrato a latere 1 Q. – 10. & fiunt reliqui 20 Q. æquales 3. & ſi horum multiplicatione quadratus fieret, ſoluta eſſet quæſtio. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo quadrati, & numerus quidam, vt qui ab eo fit quadratus, detractis quadratis duorum quæſitorum quadratorum, numerum faciat, qui ad duplum numeri ab initio ſumpti rationem habeat quæ eſt quadrati ad quadratum. Ponantur quæſiti quadrati vnus 1 Q. alter 4. & arbitrarius numerus ſit 1 Q. + 4. & huius quadratus detractis illorum quadratis, relinquit 8 Q. Hoc volumus ad duplum 1 Q. + 4. hoc eſt ad 2 Q. + 8. rationem habere quadrati ad quadratum. Omnium ſemiſſis ſumatur. Igitur & 4 Q. ad 1 Q. + 4. rationem habebit quadrati ad quadratum. Sunt autem 4 Q. quadratus. Proinde & 1 Q. + 4. æquantur quadrato à latere 1 N. + 1. Vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. erit ergo quæſitorum quadratorum, alter 2 $\frac{1}{4}$. alter 4. oblatus numerus $\frac{25}{4}$ & omnia quater. Erit alter 9. alter 16. arbitrarius 25. Recurramus ad propoſitum initiò, & ſtatuamus trium quadratorum vnum 1 Q. alterum 9. tertium 16. & fit compoſitus ex ipſorum quadratis 1 QQ. + 337. Hæc æquantur quadrato à latere 1 Q. – 25. vnde fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Reliqua ſunt manifeſta.

OBSERVATIO D. P. F.

CVr autem non quærat duo quadratoquadrata quorum ſumma ſit quadratus? Sanè hæc quæſtio eſt impoſſibilis, vt noſtra demonſtrandi methodus poteſt haud dubie expedire.

IN QVAESTIONEM XXXII.

SVBTILITER Diophantus ſoluit propoſitum lemma quo quærit duos quadratos, & præterea numerum à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæſitorum quadratorum, reſiduum ad duplum eiuſdem numeri ſit in ratione quadrati ad quadratum. Etenim ponit quæſitum numerum 1 Q. + 4. At quæſitos quadratos 1 Q. & 4. ſic enim auferendo horum quadratos, à quadrato illius numeri ſupereſt 8 Q. qui ad 2 Q. + 8. debet eſſe in ratione quadrati ad quadratum; quare & horum ſemiſſes, puta 4 Q. & 1 Q. + 4. erunt rurſus in ratione quadrati ad quadratum, cùm non mutetur proportio. Ac proinde cùm 4 Q. ſit quadratus, oportet & 1 Q. + 4. eſſe quadratum, cuius latus eſto 1 N. + 1. fit 1 N. $\frac{3}{2}$. Sunt ergo quæſiti quadrati $\frac{9}{4}$ & 4. at quæſitus numerus $\frac{25}{4}$. & ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, fiuntque quæſiti quadrati *9.* & 16. quæſitus numerus 25. Statuentes ergo alterum quadratorum 1 Q. alterum *9.* tertium 16. fit ſumma compoſiti ex eorum quadratis 1 QQ. + 337. æqualis quadrato à latere 1 Q. − 25. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt itaque quæſiti quadrati $\frac{144}{25}$. *9.* 16. ſumma quadratorum ab ipſis ortorum eſt $\frac{231361}{625}$. quadratus vtique à latere $\frac{481}{25}$.

Porrò animaduerſione dignum eſt quadratos, qui per aſſumptum lemma quæruntur eſſe ſemper quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli, & numerum quæſitum eſſe ſemper quadratum hypotenuſæ, ſeu ſummam eorundem quadratorum, vt vides in hypotheſi Diophantæa quadratos reperiri *9.* & 16. At quæſitum numerum eſſe 25. Et tres huiuſmodi quadratos ſemper ſoluere lemma propoſitum ſic demonſtrabitur. Sint quadrati A B. quorum ſumma C. ſit etiam quadratus. Et à quadrato ipſius C. auferantur quadrati ipſorum A B. & ſuperſit G. ſumatúrque H. duplus ipſius C. dico G. ad H. habere rationem quadrati ad quadratum. Sit enim D. productus ex A. in B. eritque D. quadratus cùm fiat ex quadrato in quadratum. Itaque quia C. æquatur ipſis A B. ſimul, erit quadratus ipſius C. æqualis quadratis ipſorum A B. & duplo ipſius D. Quare cùm auferendo quadratos ipſorum A B. à quadrato ipſius C. ſuperſit G. erit G. duplus ipſius D. Ergo cùm & H. ſit duplus ad C. erit G. ad H. ſicut D. ad C. ſed D. & C. ſunt quadrati, Igitur ratio G. ad H. eſt ratio quadrati ad quadratum. Quod oſtendendum erat. 4. ſecundi

	G. 288.	H. 50.
A *9.*	B 16.	C 25.
	D 144.	

Hinc elicitur Canon facillimus ad ſoluendum propoſitam quæſtionem.

Sume pro duobus quæſitorum quadratorum, quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli. Tum diuide productum mutuo ductu eorundem, per quadratum hypotenuſæ; orietur tertius.

Verbi gratia, expoſito triangulo rectangulo 5. 12. 13. Erunt duo ex quæſitis quadratis 25. & 144. & quia ducto 25 in 144. fit 3600. diuiſo eo per quadratum hypotenuſæ, puta per 169. fit tertius quæſitorum $\frac{3600}{169}$. & ſoluta eſt quæſtio. Nam trium quadratorum quadrati ſimul faciunt $\frac{623051521}{28561}$. quadratum à latere $\frac{24961}{169}$.

QVÆSTIO XXXIII.

ΟΚΤΑΔΡΑΧΜΟΥΣ καὶ πενταδράχμους χόας τις ἔμιξε,
Τοῖς προπόλοισι πιεῖν χρηστοῖς ἀποταξάμενος.
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενοι μονάδας,
Καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοῶν.
Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους παῖ λέγε πενταδράχμους.

DRACHMARVM quinque, & drachmarum miſcuit octo
Quis choeas, famulis vina bibenda ſuis.
Pro cunctis pretium, numerum præbens tetragonum,
Qui præfinitas ſuſcipiens monadas
Diuerſum dat quadratum. Sed ſumma choarum
Illius exæquat conſtituitque latus.
Dic age quot choeas drachmarum comparat octo,
Drachmarum choeas, dic age, quinque, puer.

ΤΟ σημαῖνον διὰ τοῦ ἐπιγράμματός ἐστι τοιοῦτον. ἠγόρασέ τις δύο εἴδη οἴνου ὧν μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χόα δραχμῶν η̄. ὧν δὲ τοῦ ἑνὸς τὸν χόα δραχμῶν ε̄. καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμόν, ὃς προσλαβὼν μ° ξ̄. ἐποίει τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τῶν χοῶν. διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους. ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοῶν ς° ᾱ. ὥστε ἡ τιμὴ γίνεται δυ ᾱ. λείψει μ° ξ̄. λοιπὸν δεῖ δυ ᾱ ↑ μ° ξ̄. ποιεῖν ἴσους τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς° ᾱ. λείψει μ° ὅσων δήποτε. ἀλλὰ ἐπεὶ ἡ δυ ᾱ. λείψασα μ° ξ̄. σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, καὶ τὸ πέμπτον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν πενταδράχμων, τὸ δὲ ὄγδοον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν ὀκταδράχμων. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν χοῶν συντεθέντων ποιεῖ ςοὶ ᾱ. γέγονεν οὖν τὸν δυ ᾱ. λείψει μ° ξ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ ἑνὸς πέμπτον, καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου ὄγδοον ποιῇ ςοὺς ᾱ. καὶ τοῦτο δὲ οὐ πάντοτε δύναμαι, εἰ μὴ κατασκευάσθῃ ὁ ς° μείζων μὲν τοῦ ὀγδόου δυ ᾱ. λείψει μ° ξ̄. ἐλάσσων δὲ τοῦ πέμπτου δυ ᾱ. λείψει μ° ξ̄. ἔσται ἄρα δυ ᾱ λείψει μ° ξ̄. μείζων ςς ε̄. ἐλάσσων δὲ ςς η̄. ἐπεὶ οὖν δυ ᾱ λείψει μ° ξ̄. μείζων ἐστὶν ςς ε̄. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ° ξ̄. ὥστε καὶ δυ ᾱ. μείζων ἐστὶν ςς ε̄. μ° ξ̄. ὥστε καὶ δύναμις ᾱ. ἴση ἐστὶν ςς ε̄. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ° ξ̄. ὥστε δεήσει τὸν ἀριθμὸν μείζονα εἶναι, ἢ μὴ ἐλάσσονα μ° ια. πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις ᾱ. λείψει μ° ξ̄. ἐλάσσων ἐστὶν ςς η̄. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ° ξ̄. ὥστε δυ ᾱ. ἴση ἐστὶν ςςοῖς η̄. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάττονι μ° ξ̄. ὅθεν δεῖ τὸν ςὸν εὑρίσκεσθαι μὴ μείζονα μ° ιβ. ἐδείχθη δὲ καὶ μὴ ἐλάττων μ° ιᾱ. ὥστε δεήσει τὸν ςὸν εὑρεῖν μείζονα μὲν μ° ιᾱ. ἐλάσσονα δὲ μ° ιβ. ἐὰν δὲ ζητῶμεν δυ ᾱ λείψει μ° ξ̄. ἴσα τετραγώνῳ πλάσσομεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς° ᾱ. λείψαντος μονάδας τινὰς, καὶ γίνεται ὁ ς° ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν γινομένου, καὶ προσλαβόντος μ° ξ̄. καὶ παραβληθέντος παρὰ τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος προσλαβὼν μ° ξ̄. καὶ παραβληθεὶς παρὰ τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν μ° ιᾱ. ἐλάσσονα δὲ μ° ιβ. καὶ ἐὰν τάξωμεν

QVod ſignificatur hoc epigrammate tale eſt. Quidam emit duos cados vini; vnius quidem choam drachmis 8. alterius verò choam drachmis quinque, & pro omnibus pretium perſoluit numerũ quadratum, cui addẽdo 60. fit quadratus latus habens multitudinem choarum. Diſtingue nunc choas octo drachmarũ, à chois quinque drachmarũ. Eſto choarum multitudo 1 N. Ergo pretium erit 1. Q. — 60. Reſtat vt 1 Q — 60. æquetur quadrato, & oportet huius quadrati latus ponere 1 N. cum defectu aliquot vnitatum. Sed quoniam 1 Q — 60. componitur ex duobus numeris, pretij ſcilicet choarum quæ cõſtant octo drachmis, & pretij choarum quæ conſtant quinque drachmis, & huius pretij quinta pars, facit multitudinem choarum conſtantium quinque drachmis; ſicut illius pretij octaua pars facit multitudinem choarum conſtantium octo drachmis; at multitudo omnium choarum eſt 1 N. Oportet 1 Q. — 60. diuidere in duos numeros, ita vt vnius quintans cum alterius octante faciat 1 N. Atqui hoc fieri non poteſt niſi 1 N. inueniatur maior octante de 1 Q — 60. minor autem quintante eiuſdem 1 Q — 60. Erit ergo 1 Q — 60. maior quàm 5 N. minor quam 8 N. Quia igitur 1 Q — 60. maior eſt quàm 5 N. adiiciantur vtrimque 60. Igitur 1 Q. maior eſt quàm 5 N + 60. Proinde 1 Q. æquatur 5 N. & numero alicui maiori quàm 60. Quare oportet 1 N. maiorem eſſe, vel ſaltem non minorem quàm 11. Rurſum quoniam 1 Q — 60. minor eſt quàm 8 N. addantur vtrimque 60. Ergo 1 Q. æqualis eſt 8 N. & numero alicui minori quàm 60. Vnde oportet 1 N. reperiri non maiorem quàm 12. At demonſtratum eſt non minorem eſſe debere quàm 11. Oportet igitur 1 N. inueniri maiorem quàm 11. minorem quàm 12. ſi autem velimus 1 Q — 60. æquare quadrato, fingemus quadrati latus 1 N. cum defectu aliquot vnitatum, & fiet 1 N. ex aliquo numero in ſe ducto, & adſumente 60. & per ſui duplum diuiſo. Eò itaque res deducta eſt, vt inueniendus ſit numerus, cuius quadratus ſi adſciſcat 60. & ſumma per duplum ipſius numeri diuidatur, fiat

quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. & ſi quæſitum ſtatuamus 1 N. oportebit 1 Q + 60. diuidentes per 2 N. facere quotientem maiorē quam 11. minorem quam 12. Oportet ergo 1 Q. + 60. diuiſo per 2 N. quotientem fieri maiorem quam 11. Quare 1 Q + 60. maior ſit oportet quàm 22 N. Proinde 22 N. æquales ſunt 1 Q. & numero alicui minori quàm 60. Quare non debet 1 N. minor eſſe quàm 19. Rurſus oportet 1 Q + 60. diuidentes per 2. N. quotientem fieri maiorem quàm 12. Quare 1 Q + 60. minor eſt quàm 24 N. Proinde 24 N. æquantur 1 Q. & numero alicui maiori quam 60. Vnde oportet 1 N. minorem eſſe quàm 21. Sed & oſtenſum eſt maiorem eſſe debere quàm 19. Oportet ergo quadratum æqualem 1 Q − 60. parantes, latus ſtatuere 1 N − 20. Vnde inuenitur 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. Quadratus eius 132 $\frac{1}{4}$. Tollo 60. relinquuntur 72 $\frac{1}{4}$. Oportet ergo diuidere 72 $\frac{1}{4}$. in duos numeros, vt prioris quintans, cum octante poſterioris faciat 11 $\frac{1}{2}$. Eſto quintans prioris 1 N. Erit ergo poſterioris octans 11 $\frac{1}{2}$ − 1 N. Ipſi ergo erunt, alter 5 N. alter 92 − 8 N. Hæc ſimul æquantur 72 $\frac{1}{4}$. & fit 1 N. $\frac{79}{12}$. Multitudo ergo choarum conſtantium quinque drachmis erit $\frac{79}{12}$. At multitudo choarum conſtantium octo drachmis erit $\frac{59}{12}$. Et reliqua ſunt manifeſta.

τὸν ζητούμενον ς^ο ᾱ. δεῖ δ^υ ᾱ. μ^ο ξ̄. μερίζοντας παρὰ ςς β̄ τὴν παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μὲν μ^ο ιᾱ. ἐλάσσονα δὲ μ^ο ιβ̄. δεῖ οὖν δ^υ ᾱ. μ^ο ξ̄. μερίζοντας παρὰ ςς^ους β̄ παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μ^ο ιᾱ. ὥστε δ^υ ᾱ. μ^ο ξ̄. μείζων ὀφείλουσιν εἶναι ςς κβ̄. ὥστε ςς^οι κβ̄ ἴσοι εἰσὶν δ^υ ᾱ. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάσσονι μ^ο ξ̄. ὥστε ὁ ς^ος οὐκ ὀφείλει εἶναι ἐλάσσων μ^ο ιθ̄. πάλιν δεῖ δ^υ ᾱ. μ^ο ξ̄. μερίζοντας παρὰ ἀριθμοὺς β̄. τὸν ς^ον εὑρεῖν ἐλάσσονα μ^ο ιβ̄. ὥστε δύναμις ᾱ μ^ο ξ̄. ἐλάσσους εἰσὶν ἀριθμῶν κδ̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄. ἴσοι εἰσὶν δ^υ ᾱ. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ^ο ξ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς ὀφείλει ἐλάσσων εἶναι μ^ο κᾱ. ἀλλὰ καὶ μείζων μ^ο ιθ̄. ὥστε δεῖ δυνάμει ᾱ. λεῖψει μ^ο ξ̄. ἴσον τετράγωνον ποιοῦντα τάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς^ου ᾱ. λεῖψει μ^ο κ̄. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς^ος μ^ο ιᾱ. ᾱ ς^ον. ὁ τετράγωνος ρλβ̄. ᾱ δ^ον. αἴρω μ^ο ξ̄. λοιπαὶ μ^ο οβ̄. ᾱ δ^ον. δεῖ οὖν τὰς μονάδας οβ̄. ᾱ δ^ον. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου πέμπτον, μετὰ τοῦ τοῦ δευτέρου ὀγδόου ποιῇ μ^ο ιᾱ. ᾱ ς^ον. ἔστω τὸ τοῦ πρώτου πέμπτον μέρος ς^ος ᾱ. τὸ ἄρα τοῦ δευτέρου ὄγδοον ἔσται μ^ο ιᾱ. ᾱ ς^ον. λεῖψει ς^ου ᾱ. αὐτοὶ ἄρα ἔσονται, ὁ μὲν ςς ε̄. ὁ δὲ μ^ο ϟβ̄. λεῖψει ςς η̄. ταῦτα ἴσα οβ̄. ᾱ δ^ον. ἔσται ὁ ς^ος μ^ο οθ̄ ιβ^ων. τὸ ἄρα πλῆθος τῶν πενταδράχμων χόων ἔσται οθ̄ ιβ^ων. τὸ δὲ τῶν ὀκταδράχμων χόων νθ̄ ιβ^ων. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

QVOT mendas hinc ſuſtulerimus æquo lectori æſtimandum relinquo, qui noſtram cum verſione Xilandri contulerit. Sanè vt omittam reliqua, vbi legebatur in codice manu exarato, τοῖς ὀβολοῖς πισῶν χρὴς ὂν ἐπιτεταγμένος, repoſuimus flagitante ſententia & lege metri, τοῖς πρωπολοῖσι πιεῖν χρὴς' ἀποταξάμενος, & vbi legebatur τοὺς ὀκταδράχμους ποίησον, emendauimus τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν. Vtrumque ex ſententia Salmaſij noſtri. Porrò emendato textu, non magna hîc eſt difficultas, quæ tamen animaduerſione digna cenſeo, hæc ſunt.

Primò, quod ait Diophantus 1 Q − 60. non poſſe diuidi in duas partes, ita vt alterius quintans cum alterius octante faciat 1 N. niſi 1 N. ſtatuatur maior octante, minor autem quintante ipſius 1 Q − 60. perſpicuum eſt ex adnotatis ad quintam primi, cuius hîc auxilium implorare cogimur, & cui huiuſmodi conditionem præſcripſit author.

Secundò ritè infert. Si quintans de 1 Q − 60. eſt maior quàm 1 N. ipſe 1 Q. − 60. maior eſt quàm 5 N. & rurſus ſi octans de 1 Q − 60. eſt minor quàm 1 N. ipſe 1 Q. − 60. minor eſt quàm 8 N. Vt ergo inueniantur termini intra quos conſiſtere debet valor numeri, vtendum artificio quo ad quadrageſimā quintam quarti, & alibi ſæpè vſi ſumus. Etenim quia 1 Q − 60 maior eſt quàm 5 N. addendo vtrimque 60. fit 1 Q maior quàm 5 N. + 60. & tandem fit 1 N. maior quàm R 66 $\frac{1}{4}$ + 2 $\frac{1}{2}$. ſeu per approximationem maior quàm 11. Similiter ſi 1 Q. − 60 ſtatuatur minor quàm 8 N. fiet 1 N. minor quàm R 76 + 4. ſeu per approximationem minor quàm 12. Concludit ergo Diophantus 1 N. cadere debere inter 11. & 12. Quod non ita accipiendum eſt, vt 11. & 12, exactiſſimi termini cenſeantur, cùm enim non poſſint in rationalibus præſcribi exactè huiuſmodi termini, ſatis habuit Diophantus tales præſcribere intra quos ritè ſumi poſſit valor numeri. Cæterùm ſi exactiores requirantur, aſſignari poterunt 10 $\frac{1}{4}$. & 12 $\frac{0}{1}$. Malè autem aſſignauerit 10. & 13. cùm inter eos cadant infiniti numeri, qui nequaquam ſumi poſſunt pro valore numeri,

Denique cum fingendo latus quadrati 1 Q – 60. fiat valor numeri, cuidam quadrato addendo 60. & ſummam diuidendo per duplum lateris illius, patet quærendum eſſe numerum per cuius duplum diuidendo quadratum ipſius, auctum numero 60. fiat quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. Poſito ergo tali numero 1 N. fit vtique $\frac{1 Q + 60}{2 N}$ maior quàm 11. minor quàm 12. & omnia ducendo in 2 N. fit 1 Q + 60. maior quàm 22 N. minor quàm 24. N. Et vtraque æquatione per approximationem reſoluta, conſtat quæſitum numerum maiorem eſſe debere quàm 19. minorem quàm 21. Quare ſumit Diophantus 20. & ponit quadrati 1 Q. – 60. latus 1 N – 20. vnde fit 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. ſumma ſcilicet choarum. Ergo totum pretium eſt quadratus 72 $\frac{1}{4}$. Quare ſupereſt vt diuidamus 72 $\frac{1}{4}$ in duas partes, ita vt quintans vnius cum octante alterius faciat 11 $\frac{1}{2}$. Hoc exequitur Diophantus per operationem quintæ primi, & reliqua ſunt manifeſta.

Porrò quod terminos ſtatuit 19. & 21. intra quos ſumi debet vnitatum numerus in latere fictitio ponendus, non ſic etiam accipiendum eſt, quod putet exactiſſimos eos eſſe, nam ſi libet exactiores præſcribentur 18 $\frac{4}{5}$ & 22 $\frac{1}{5}$. Quare huiuſmodi numerus poni poterat 19. atque etiam 21. vel 22. vel quilibet alius intra præſcriptos limites. Nequaquam autem 18. vel 23. vt & ratio & experientia dictat.

Quoniam verò argutum epigramma, incertum an ab ipſo confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantiſſima aliquot epigrammata proferre, non iniucundas quæſtiones de rebus arithmeticis continentia, quæ nondum edita fuerunt, quæque pridem è codice probatiſſimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditiſſimus Claudius Salmaſius, clariſſimum Burgundiæ noſtræ lumen. His ſubiiciemus verſionem noſtram totidem verſibus exaratam, feliciter, an ſecus iudicent Muſarum alumni. Tum breuiter quæſtiones ipſas explicabimus. Cætera quæ vel ad Græci ſermonis ornatum ſpectant, vel reconditæ quid ſapiunt eruditionis Salmaſio noſtro relinquemus, qui breui, vt ſtudioſos ſperare iubeo, Anthologiam innumeris auctam Epigrammatis, magno reipublicæ literariæ incremento, in lucem proferet. Vnum eſt quod moneam, maximam horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibuſdam verò, alia nomina eſſe præfixa, quædam denique incertos habere authores.

I.

Ολβιε Πυθαγόρη Μουσέων Ἑλικώνιον ἔρνος·
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ ὁππόσοι σοφίης κατ᾽ ἀγῶνα
Σοῖσι δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄριστα.
Τοὶ γὰρ ἐγὼν εἴποιμι Πολύκρατες. ἡμίσεες μὲν
Ἀμφὶ καλὰ σπουδῶσι μαθήματα. τέτρατοι αὖτε
Ἀθανάτου φύσεως πεπονήαται. ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι.
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ᾽ ἔξοχος ἄλλων.
Τόσσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.

Dic Heliconiadum decus ô ſublime ſororum
Pythagora, tua quot tyrones tecta frequentent
Qui ſub te Sophiæ ſudant in agone magiſtro.
Dicam, tuque animo mea dicta Polycrates hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata diſcit
Quarta immortalem naturam noſſe laborat.
Septima ſed tacitè ſedet, atque audita reuoluit.
Tres ſunt fœminei ſexus; At prima Theano.
Pieridum arcanis tot vates imbuo ſacris.

Hic perſpicuum eſt numerum quæri, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{7}$. ſimul adſumpto ternario ipſum quæſitum numerum conſtituant. Ponatur is 1 N. ergo $\frac{1}{2}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{7}$ N. & præterea 3. hoc eſt $\frac{25}{28}$ + 3. æquantur 1 N. vnde fit 1 N. 28. quæſitus numerus diſcipulorum. Nam eius $\frac{1}{2}$ eſt 14. At $\frac{1}{4}$ eſt 7. Demum $\frac{1}{7}$. eſt 4. quorum ſumma 25. adſciſcens 3. conficit ipſum 28. vt requirebatur. Quoniam verò multæ quæſtiones eiuſdem naturæ deinceps proponentur, ad eas ſoluendas eſto vniuerſalis Canon.

Sume minimum numerum qui habeat datas partes, tum illius datas partes ſimul aufer ab eodem numero; per reſiduum diuide datum numerum in ipſa expreſſum quæſtione, quotientem ducito in ſumptum ab initio numerum, fiet quæſitus numerus.

Vt in propoſita quæſtione, minimus numerus qui habeat $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. eſt 28. à quo aufer $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. illius, puta 25. relinquitur 3. per quem diuide 3. numerum in quæſtione expreſſum, fit quotiens 1. quem ducito in ipſum 28. fit quæſitus numerus 28.

II.

Α Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιόωντα προσηύδα.
Τίπτε τοι ὦ τέκος ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ᾽ ἀπαμείπτο.
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη
Αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε; δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη; ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα Θάλεια.
Μελπομένη δ᾽ εἰκοστὸν ἀπαίνυτο. Τερψιχόρη τε
Τέτρατον. ἑβδομάτην δ᾽ Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην.
Η δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων.
Οὐρανίη δ᾽ ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι. Καλλιόπη δὲ
Βεβριθυῖα μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ᾽ ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκάνω
Πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

Talibus aggreditur mœrentem Cypris Amorem.
Ecquis, nate, animo dolor inſidet? Ille ita contrà.
Diripuere ſinu Libethrides vndique adortæ
Decerpta ex Helicone ſacro quæ mala ferebam.
Clio malorum quintante, duodecimaque
Euterpe, octaua ſed gaudet parte Thalia.
Melpomenæ ceſſit viceſima; Nomen habenti
A me, ſeptima. Terpſichore quadrante potitur.
Triginta me multauit Polyhymnia malis.
Vranie centum viginti. Calliopeque
Improbior, raptis diſceſſit onuſta tricenis.
Ecce tibi manibus vacuis occurro, dearum
Relliquias, quinquaginta vix mala reportans.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. ſimul, adſumptis numeris 30. 120. 300. 50. conficiant ipſum quæſitum numerum. Quare per Canonem ſupra traditum ſumo minimum qui habeat datas partes, puta 840. ſuntque illius partes datæ 168. 70. 105. 42. 120. 210. quarum ſumma 715. qua detracta de 840. manet 125. per quem diuido ſummam datorum numerorum 30. 120. 300. 50. puta 500. fit quotiens 4. quo ducto in ſumptum numerum 840. fit quæſitus numerus 3360. malorum ſcilicet multitudo.

III.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθους φέρον, ἐν ᾗ ἑκάστῃ
Ἶσον ἔην πλῆθος. Μοῦσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν
Ἐννέα, καὶ μήλων σφέας ᾔτεον. αἱ δ᾽ ἄρ᾽ ἔδωκαν
Ἶσον ἑκάστῃ πλῆθος, ἔχον δ᾽ ἴσα ἐννέα καὶ τρεῖς.
Εἰπὲ πόσον δῶκαν, ὅπως δ᾽ ἴσα πᾶσαι ἔχωσιν.

Mala ferunt calathis Charites, æqualia cuique
Mala inſunt calatho. Muſarum his obuia turba
Mala petunt: Charites cunctis æqualia donant.
Tunc æqualia tres contingit habere, nouemque.
Dic quantum dederint, numerus ſit vt omnibus idem.[1]

Senſus eſt. Singulæ Charites habent eundem ſeu æqualem malorum numerum, & quælibet tradit ſingulis muſarum æqualem numerum, hacque demum contributione facta, quælibet Charis & quælibet Muſa, eundem reperitur habere numerum. Soluitur autem quæſtio ſi iungas numerum

Charitum atque Muſarum, puta 3. & 9. vnde fit 12. Quare dicendum quamlibet Charitum ab initio habuiſſe mala 12. vel numerum quemlibet malorum qui ſit multiplex ad 12. hac tamen lege vt ſi ſumas 12. quælibet Charis cuilibet Muſæ tribuat malum vnum; ſi ſumas 24. quælibet Charis tribuat cuilibet Muſæ mala duo, & ſic deinceps. Verbi gratia Ponamus. Charitum quamlibet habuiſſe ab initio mala 24. & dare ſingulis Muſis mala 2. Ergo quælibet Charis tribuet Mala 18. quia ſunt nouem muſæ, ac proinde cuilibet Chariti relinquentur mala 6. At quælibet muſa accipiens Mala 2. à qualibet Charite, habebit etiam mala 6. vt euidens eſt. Quare patet propoſitum.

IV.

Τεῦξόν μοι ςέφανον, χρυσὸν, χαλκόντε κεράσας,
Κασσίτερόν δ' ἅμα τοῖσι, πολύκμητόν τε σίδηρον
Μνᾶς ἑξήκοντα. χρυσὸς δ' ἐχέτω μετὰ χαλκοῦ
Δισὰ μέρη τελεσθῶν. χρυσὸς θ' ἅμα, κασσίτερός τε
Τρισσὰ μέρη τετόρων. χρυσὸς δ' ἅμα ἠδὲ σίδηρος
Τόσσα μέρη τῶν πέντε. πόσον δ' ἄρα δεῖ σε κεράσαι
Λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ' ἔτι λέξον
Κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου
Ὥστε σε τὸν ςέφανον τεῦξαι μνᾶν ἑξήκοντα.

Æs, ferrum, ſtannum miſcens, aurique metallum
Sexaginta minas penſantem finge coronam.
Æs aurumque duos ſimul efficiunto trientes.
Ternos quadrantes ſtanno mixtum impleat aurum,
At totidem quintas auri vis addita ferro.
Ergo age dic fului quantum tibi coniicis auri
Miſcendum, dic quantum æris ſtannique requiras,
Dic quoque ſufficiant duri quot pondera ferri
Præſcriptam vt valeas rite efformare coronam.

Eſto quantitas auri 1 N. Quia ergo aurum & æs ſimul ſunt $\frac{2}{3}$ de 60. puta 40. erit æris quantitas 40 − 1 N. eadem de cauſa, erit ſtanni quantitas 45 − 1 N. & ferri quantitas 36 − 1 N. Quantitas ergo quatuor metallorum ſimul, erit 121 − 2 N. æqualis 60. vnde fit 1 N. 30 $\frac{1}{2}$. quantitas ſcilicet auri, at quantitas æris eſt 9 $\frac{1}{2}$. ſtanni 14 $\frac{1}{2}$. ferri 5 $\frac{1}{2}$.

V.

Τὸ τρίτον ἀργυροποιὸς προσέμβαλε καὶ τὸ τέταρτον
Τῆς φιάλης εἰς ἓν, καὶ τὸ δυωδέκατον.
Εἰς δὲ κάμινον ἔλαυνε βαλὼν, καὶ πάντα κυκήσας
Ἐξέλε μοι βῶλον, μνᾶν δέ μοι ἑλκυσάτω.

Sume tibi Phialæ faber ingenioſe trientem
Quartamque, & partem ſume duodecimam.
Iniice fornaci ſimul omnia mixta; ſed inde
Prodeat vnam æquans pondere maſſa minam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. ſimul conficiant 1. Eſto is 1 N. ergo $\frac{1}{3}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{12}$ N. ſimul, hoc eſt $\frac{2}{3}$ N. æquantur vnitati, vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. quot minas pendebat Phiala.

VI.

Ἔχω τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τρίτον.
Κἀγὼ τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ προτέρου τρίτον.
Κἀγὼ δέκα μνᾶς, καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον.

Æquo ſequentem cum triente tertij.
Æquat ſequens me, iunctus & primi triens.
Supero trientem primi ego decem minis.

Tres

Tres poſtulantur numeri, vt primus, contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ tertij. Secundus contineat tertium & $\frac{1}{3}$ primi. Tertius contineat 10. & $\frac{1}{3}$ primi. Statuatur tertius 1 N. + 10. ergo triens primi erit 1 N. ac proinde primus ipſe 3 N. Quia vero ſecundus continet tertium & $\frac{1}{3}$ primi, ſi tertio pura 1 N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, pura 1 N. fiet ſecundus 2 N. + 10. Reſtat vt primus æquetur ſecundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, pura 1 N. fiet ſecundus 2 N. + 10. Reſtat vt primus æquetur ſecundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 13 $\frac{1}{3}$. & fit 1 N. 20. Sunt igitur quæſiti numeri 60. 50. 30.

VII.

Τοὺς χιλίους στατῆρας οὓς ἐκτησάμην
Λαβεῖν κελεύω τοὺς ἐμοὺς παῖδας δύο.
Πλὴν γνησίου τὸ πέμπτον ηὐξήσθω δέκα
Μέζον τετάρτου τῶν λαχόντων τῷ νόθῳ.

Quos poſſidere mille ſtateras datum eſt
Sic partiantur præcipio nati duo.
Ex coniuge orti quinta pars, addat ſuper
Quadranti eorum quos nothus ſumet, decem.

Senſus eſt Volo legitimum filium de mille nummis tot accipere, vt eorum quinta pars ſuperet numero 10. quadrantem eorum quos ſumet Nothus. Ergo numerus 1000. diuidendus eſt in duas partes, ita vt quinta pars vnius ſuperet denario quadrantem alterius. Eſto pars vna 1 N. altera 1000 − 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. + 10. æquari debet quintæ parti de 1000 − 1 N. hoc eſt 200 − $\frac{1}{5}$ N. æquatur $\frac{1}{4}$ N. + 10. & fit 1 N. 422 $\frac{2}{9}$. pars quæ notho cedit. Quare pars quæ legitimo competit, eſt 577 $\frac{7}{9}$.

VIII.

Ἓξ μνᾶν, ἓξ φιάλας Κροῖσος βασιλεὺς ἀνέθηκεν
Δραχμῇ τὴν ἑτέραν μείζονα τῆς ἑτέρας.

Mnarum ſex, Phialas ſex Crœſus dedicat, atque
Eſt maior drachma quæque priore ſequens.

Cùm quælibet minea contineat drachmas 100. minæ ſex ſunt 600. drachmæ. Quare numerus 600. diuidendus eſt in ſex partes per continuam vnitatis additionem progredientes. Eſto prima 1 N. erit ſecunda 1 N. + 1. tertia 1 N. + 2. quarta 1 N. + 3. quinta 1 N. + 4. ſexta 1 N. + 5. fit omnium ſumma 6 N. + 15. æqualis 600. vnde fit 1 N. 97 $\frac{1}{2}$. prima pars, ſunt ergo aliæ 98 $\frac{1}{2}$. 99 $\frac{1}{2}$. 100. $\frac{1}{2}$. 101 $\frac{1}{2}$. 102 $\frac{1}{2}$.

IX.

Ὡρονόμων ὄχ' ἄριστε, πόσον παρελήλυθεν ἠοῦς;
Ὅσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

Dic quota nunc hora eſt? ſuperat tantum ecce diei,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Antiquorum more diem diuidentes in duodecim partes æquales, ſeu in horas 12. quas Gnomonici Planetarias vocant; Ponamus numerum tranſactarum horarum eſſe 1 N. ergo reliquus horarum numerus vſque ad noctem erit ex quæſtionis lege $\frac{4}{3}$ N. & fiet omnium horarum ſumma $\frac{7}{3}$ N. æqualis 12. Eſt ergo 1 N. 5 $\frac{1}{7}$ numerus ſcilicet horarum tranſactarum, & ſuperſunt vſque ad finem diei horæ 6 $\frac{6}{7}$.

X.

Τίπτε με τῶν καρύων ἕνεκεν πληγῇσι πιέζεις
Ὦ μῆτερ, τὰ δὲ πάντα καλαὶ διεμοιρήσαντο
Παρθένοι. ἡ γὰρ ἐμεῖο Μελίασιον ἕβδομα δοιά.
Ἡ δὲ δυωδέκατον Τιτανὴ λάβεν. ἕκτον ἔχουσι
Καὶ τρίτον Ἀστυόχη φιλεπαίγμονες, ἡ δὲ Φίλιννα.
Εἴκοσι δ' ἁρπάξασα Θέτις λάβε. δώδεκα Θίσβη.

Ἣν δέκα καὶ δὴ γελᾷ Γλαύκη παλάμῃσιν ἔχουσα
Ἕνδεκα, τοῦτο δὲ μοι κάρυον περιλείπεται οἶον.

Quid mihi pro nucibus minitaris verbera mater?
Has pulchræ inter ſe diſpertiuere puellæ.
Septima pars flauæ ceſſit geminata Meliſſæ.
Ipſa duodecimam Titane ſibi ſumpſit, habentque
Sextantem Aſtyoche, feſtiua Philinna trientem,
Viginti Thetis, at rapuit Thiſbe improba bix ſex.
Abſtulit & ridens Glauce totidem minus vnâ.
Sed numero ex omni nux hæc mihi denique reſtat.

Quæritur numerus cuius $\frac{2}{7}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. ſimul adſumentes 20. 12. 11. 1. faciant ipſum quæſitū numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 84. cuius partes datæ ſimul additæ, faciunt 73. quo ablato de 84. ſupereſt 11. per quem diuido ſummam ipſorum 20. 12. 11. 1. puta 44. fit quotiens 4. quo ducto in ſumptum numerum 84. fit quæſitus numerus 336. Nam eius datæ partes ſunt 96. 28. 56. 112. quorum ſumma 292. cui ſi addas ſummam datorum numerorum, puta, 44. fit rurſus 336. vt poſtulabatur.

XI.

Πῆ σοι μῆλα βέβηκεν ἐμὸν τέκος; ἕκτα μὲν Ἰνὼ
  Δοιά, καὶ ὀγδοάτην μοῖραν ἔχει Σεμέλη.
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν. αὐτὰρ Ἀγαύη
  Πέμπτον ἐμῶν κόλπων οἴχετ' ἀπαιρομένη.
Σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται. αὐτὰρ ἔγωγε,
  Ναὶ μὰ φίλην Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

Dic vbi, Nate, repoſta tibi ſunt mala? Trientem
  Ino habet, octantem poſſidet at Semele.
Quadrantem Autonoë ſumpſit, properauit Agaue
  Quintantem è noſtro diripuiſſe ſinu.
Mala decem ſeruantur adhuc tibi. Teſtis amica.
  Sed Venus, hoc vnum iam ſupereſſe mihi.

Inueniendus eſt numerus, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. ſimul adſumpto 11. conficiant ipſum quæſitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 120. cuius partes datæ ſimul faciunt 109. quo ſublato de 120. ſupereſt 11. per quem diuido datum numerum 11. fit quæſitus numerus 120. & manifeſta eſt ſolutio.

XII.

Δριφαιδρὴν ποτὲ μῆλα φίλαις διεδάσσατο Μυρτώ.
Χρυσίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ἡροῖ.
Ἐννεακαιδέκατον Ψαμάθῃ, δέκατον Κλεοπάτρῃ.
Αὐτὰρ εἰκοστὸν δωρήσατο Παρθενοπείῃ.
Δώδεκα δ' Εὐάδνῃ μοῦνον πόρεν. αὐτὰρ ἐς αὐτὴν
Ἤλυθεν ἐκ πάντων ἑκατὸν καὶ εἴκοσι μῆλα.

Dilectis Myrto diuiſit mala puellis.
Heronem quarta, ſed donat Chryſida quintâ.
Dat decimam nonam Pſamathæ, decimam Cleopatræ.
Pars munus cedit viceſima Parthenopææ.
Bis ſex Euadne capit. Ipſi denique tanto
De numero, centum viginti mala ſuperſunt.

Quærendus eſt numerus cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{19}$. $\frac{1}{20}$. ſimul adſciſcentes 12. & 120. ſeu 132. faciant ipſum quæſitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 380. cuius datæ partes ſimul faciunt 248. quo detracto ab ipſo 380. remanet 132. vnde liquet ipſum 380. eſſe quæſitum numerum.

XIII.

Αὐτοῦ μύχοις ποτὲ μῆλα φίλαις διεμοιρήσαντο
Ἰνὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικαῖς.
Καὶ ταῖς μὲν Σεμέλη πόρεν ἄρτια, ταῖς δὲ περισσὰ
Δῶκε κασιγνήτη, μῆλα δ' ἔχεν πλέονα.
Ἡ μὲν γὰρ τρισσῆσι τρί' ἕβδομα δῶκεν ἑταίραις,
Ταῖς δὲ δύω πάντων πέμπτον ἔδωκε λάχος.
Ἕνδεκα δ' Ἀστυνόμη μιν ἀφείλατο, καὶ οἱ ἔλειπεν
Μοῦνα κασιγνήταις μῆλα δύω φερέμεν.
Ἡ δ' ἑτέρη πισύρεσσι πόρεν δύο τέτρατα μήλων.
Πέμπτη δ' ἑταίρῃ μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν.
Τέσσαρα δ' Εὐρυχόρῃ δῶρον πόρε. τέσσαρα δ' ἄλλα
Μήλοισιν Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

Bis ſenis Ino quondam Semeleque puellis
Pignus amicitiæ mala dedere ſuæ.
Parcior & Semele paria iſtis tradidit. Illis
Imparia exhibuit pluraque mala ſoror.
Quintam malorum partem dedit iſta duabus.
Eſt data virginibus ſeptima trina tribus.
Aſtynomeque decem, ſed & vnum ſumit. At Ino
Germanis retinet bina ferenda ſuis.
Altera bis geminas gemino quadrante puellas
Donat, ſextantem quinta puella capit,
Quatuor Eurychore. Solido Semele quoque gaudet
Quatuor è numero mala relicta ſibi.

Hic duo quæruntur numeri. Nam primum Ino mala ſua ſex puellis ita diſtribuit, vt duabus ſimul det $\frac{1}{5}$. malorum, tribus verò $\frac{3}{7}$. ſextæ autem 11. mala, quo facto remanent ei mala 2. Quare cùm minimus qui habeat datas partes ſit 35. à quo ſi auferas $\frac{1}{5}$. & $\frac{3}{7}$. puta 22. remanet 13. qui æquatur reliquis malis, patet ipſum 35. eſſe numerum malorum quæ habuit Ino. Deinde Semele quatuor puellis ſimul dat duos quadrantes ſeu $\frac{1}{2}$ ſuorum malorum, quintæ dat $\frac{1}{6}$. ſextæ mala 4. quo facto remaneat ei mala 4. Quare ſumpto 12. minimo qui habet datas partes, aufero ab eo datas partes, puta 8. remanet 4. per quem diuido reliqua mala in quæſtione expreſſa, puta 8. fit quotiens 2. quo ducto in ſumptum numerum 12. fit 24. numerus malorum Semeles. Accidit etiam primum numerum 35. eſſe imparem, ſecundum verò 24. eſſe parem & minorem primo, vt requirebat quæſtio.

XIV.

Ἡ καρύη πολλοῖσιν ἐβεβρίθει καρύοισι
Νῦν δέ τις ἐξαπίνης μιν ἀπέθρισεν. ἀλλά τι φησίν.
Ἐκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπεια.
Ὀγδόατον δὲ Φίλιννα φέρει λάχος; ἡ δ' Ἀγανίππη
Τέτρατον, ἑβδομάτῳ δ' ἐπιτέρπεται Ὠρειθυῖα
Ἑκτὴν δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδρέψατο μοῖραν.
Τρεῖς δὲ δ' ἐξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιρήσαντο.
Ἐννάκι δὲ ἐννέα Μοῦσαι ἐμεῦ λάβον. ἑπτὰ δὲ λοιπὰ
Δήεις ἀκρεμόνεσσιν ἐφημένα τηλοτέροισιν.

Quæ ſucciſa iacet , multo nux ardua quondam
Pollebat fœtu, numerumque hàc arte recenſet.
Noſtris ex nucibus quintam ſibi Parthenopæa.
Octauamque Philinna capit, quartamque Aganippe.
Septima formoſæ conceditur Orithyiæ.
Eurynome ſextam è numero ſibi vendicat omni.
Centenas ternæ Charites ſenaſque tulere.
Demum Pierides nouies ſumpſere nouenas.
Summis in ramis ſeptem tamen ecce ſuperſunt.

Oportet inuenire numerum cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{6}$. ſimul vnà cum ſumma numerorum 106. 81. 7. puta cum 194. faciant ipſum numerum qui quæritur. Minimus habens partes datas eſt 840. à quo ſi auferas compoſitum ex datis partibus, puta 743. remanet 97 per quem ſi diuidas datum numerum 194. fit quotiens 2. quo ducto in ſumptum numerum 840. fit quæſitus numerus 1680.

X V.

Ἑπτάλοφον ποτὶ ἄστυ Γαδειρόθεν, ἕκτον ὁδοῖο
Βαίτιος ἀμμόχθους ἄχρις ἐς ἠιόνας.
Κεῖθεν δ' αὖ πέμπτον Πυλάδου μετὰ φώκιον οὖδας
Ταύρη χθὼν βοέης οὔνομ' ἀπ' εὐτίνης.
Πυρήνην δέ τοι ἔνθεν ἐπ' ὀρθόκραιρον ἰόντι
Ὄγδοον, ἡ δὲ μιῆς δωδέκατον δεκάδος.
Πυρήνης δὲ μεσηγὺ καὶ Ἄλπιος ὑψικαρήνου
Τέτρατον Αὐσονίης αἶψα δυωδέκατον
Ἀρχομένης, ἤλεκτρα φαείνεται Ἠριδάνοιο
Ὦ μάκαρ ὃς δοιὰς ἤνυσα χιλιάδας
Πρὸς δ' ἔτι πέντ' ἐπὶ ταῖς ἑκατοντάδας ἔνθεν ἐλαύνειν
Ἡ γὰρ Ταρπαίη μέμβλετ' ἀνακτορίη.

Quiſquis adire cupis Romanam Gadibus vrbem,
Sextans ad ripam Bætidis vſque viæ eſt.
Quintantem hinc numera Phocenſis ad arua coloni
A multa regio quæ boue nomen habet.
Inde Pyrenæi præcelſa ad culmina montis
Octauus eſt, decimæ parſque duodecima.
Quarta Pyrenæos , gelidas iacet inter & Alpes.
Parte duodecima hinc incipit Auſonia.
Quà Phaëtontiades ſudant electra ſorores.
Sed tamen vlterius millia perge duo.
Reſtabunt quingenta tibi tum denique , donec
Tarpeio poſſis ſiſtere colle gradum.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{120}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. ſimul vnà cum 2500. conficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120.& illius datæ partes ſimul faciunt 100. quo ablato de 120. remanet 20. per quem diuidendo 2500. fit quotiens 125. quo ducto in ſumptum numerum 120. fit quæſitus 15000. numerus ſcilicet ſtadiorum quæ inter Gades & vrbem Romanam numerat Epigrammatarius.

XVI.

Εὐβλεφάροιο δίκης ἱερὰ χρήσιμα μίνας
Ὄφρα σε πανδαμάτωρ χρυσὸν βλέψαιμι τόσον.
Οὐδὲν ἔχω, πίστευσον ἐπ' οὐκ ἀγαθοῖσι ταλάντων

Οἰωνοῖσι, μάτην δῶκα φίλοις δεκάδας.
Ἥμισυ δ' αὖ, τρίτατον δὲ καὶ ὄγδοον (ὦ πολύμορφοι
Ἀνθρώπων κῆρες) ἐχθρὸν ἔχοντα βλέπω.

Iuſtitiæ ſacras auſus conuellere leges
Vt turgens auro cuncta domante forem;
Nil iam poſſideo, infidis quia nuper amicis,
Læua mente quater dena talenta dedi.
Nunc quoque ſemiſſem, ſimul octantem, atque trientem
(O duram ſortem) barbarus hoſtis habet.

Quærendus eſt numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{3}$. ſimul cum 40. efficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 24. cuius datæ partes ſimul faciunt 23. quo detracto de 24. ſupereſt 1. per quem diuidendo 40. fit 40. quo ducto in 24. fit 960. quæſitus numerus.

XVII.

Πέμπτον μοι κλήρου παῖ λάμβανε. δωδέκατον δὲ
Δέξο δάμαρ. πίσυρες δ' υἱέες οἰχομένου
Παιδὸς, ἀδελφειώ τε δύω, καὶ ἀγάστονε μῆτερ
Ἑνδεκάτην κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
Αὐτὰρ ἀνεψιοὶ δύο καὶ δέκα δέχθε τάλαντα.
Εὔβουλος δ' ἐχέτω πέντε τάλαντα φίλος.
Πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίην καὶ ἄποινα
Μισθὸν ὑπηρεσίης, τοῖς δὲ δίδωμι τάδε.
Ὧδε λαμβανέτωσαν, Ὀνήσιμος εἴκοσι πέντε
Μνᾶς ἐχέτω. Δᾶος δ' εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω.
Πεντήκοντα Σύρος, Συνέτη δέκα, Τίβιος ὀκτώ.
Ἑπτὰ δὲ μνᾶς Συνέτῳ παιδὶ δίδωμι Σύρου.
Ἐκ δὲ τριηκόντων κοσμήσατε σῆμα ταλάντων
Ῥέζετε δ' οὐδαίῳ Ζανὶ θυηπολίην.
Διστῶν ἐς δὲ πυρήν, καὶ ἄλφιτα, καὶ τελαμῶνας,
Εἰκαίην δοιὼν σῶμα χάριν λαβέτω.

Aſſis habe quintam, fili; chariſſima coniux
Sume duodecimam. Quatuor alterius
Natorum nati, fratres bini, optima mater
Vndecimam partem quilibet accipiat.
Ferte talenta decem patrueles aucta duobus
Noſter & Eubulus quinque talenta ferat.
Fidis libertas famulis conceditor, hæcque
Sint longi merces munera ſeruitij.
Vicenas quinas ſibi ſumat Oneſimus; atqui
Vicenas ſinitor Dauus habere minas.
Quinquaginta Syrus, capiat quoque Tibius octo;
At Syneto ſeptem ſint, Syneteque decem.
Triginta totis tumulum exornate talentis,
Debitaque inferno ſacra parate Ioui.
Bina pyræ, cum faſciolis, dapibuſque ſupremis
Artubus vngendis bina talenta dico.

Hic exprimuntur partes $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{11}$. & talenta 12. 5. 30. 2. 2. ac præterea minæ 25. 20. 50. 8. 7. 10. ſeu

minæ 120. quæ valent talenta duo , quare talentorum expreſſorum numerus eſt 53. Porrò minimus qui habeat datas partes eſt 660. atque idem eſt numerus qui quæritur , quia ſi ab eo abſtuleris datas illius partes , puta 607. remanet 53.

XVIII.

Τύμβος ἐγώ, κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,
Τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
Πέμπτον ἐν ἠιθέοις, τρίτατον δ' ἐνὶ παρθενικῇσι.
Τρεῖς δέ μοι ἀρτιγάμους δῶκε Φίλιννα κόρας.
Λοιποὶ δ' ἠελίοιο πανάμμοροι οὐδὲ καὶ αὐδῆς
Τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς Ἀχέροντα πέσον.

Marmore clauditur hoc proles numeroſa Philinnæ,
Fruſtrà maternis edita viſceribus.
Quintantem iuuenes complent ; geminumque puellæ
Sextantem ; nuptas tres tegit iſte lapis.
Quatuor haud viſo ceciderunt ſole ſub orcum
Tranſlati ex vtero , proh dolor ! in tumulum.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{3}$. ſimul cum 7. faciant ipſum quæſitum numerum , & ſtatim per Canonem traditum inuenitur numerus 15.

XIX.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἆ μέγα θαῦμα
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην
Δωδεκάτῃ δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἲ αἲ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Hunc Diophantus habet tumulum , qui tempora vitæ
Illius, mira denotat arte tibi.
Egit ſextantem iuuenis ; lanugine malas
Veſtire hinc cœpit parte duodecima.
Septante vxori poſt hæc ſociatur, & anno
Formoſus quinto naſcitur inde puer.
Semiſſem ætatis poſtquàm attigit ille paternæ
Infelix ſubita morte peremptus obit.
Quatuor æſtates genitor lugere ſuperſtes
Cogitur , hinc annos illius aſſequere.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{2}$. ſimul adſumentes 5. & 4. ſeu 9. faciant ipſum quæſitum numerum. Is ex tradito Canone inuenietur eſſe 84.

XX.

Παντὸς ὅσον βεβίωκε χρόνου, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Δημοχάρης βεβίωκε ; νεηνίσκος δὲ τὸ πέμπτον.

Τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας. πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας
Ἔζησεν λοιπὰ ξεῖς; καὶ δέκα γήραος οὐδῷ.

Quadrantem ætatis puerilibus egit in annis
Quintantem iuuenis decurrit, virque trientem
Demochares, cana demum accedente ſenecta
Bis quinos reliquum vixit treſque inſuper annos.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{3}$. adſumentes 13. faciunt ipſum quæſitum numerum. Is inuenietur per vſitatum Canonem 60.

XXI.

Οἷον ἀδελφειός με βιήσατο, πέντε τάλαντα
Οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος.
Ἑπτὰ κασιγνήτοιο τῶν ἑνδεκάτων πολύδακρυς
Πέμπτον ἔχω μοίρης. Ζεῦ βαθὺν ὕπνον ἔχεις.

Vim frater facit, in partes nec diuidit æquas
Quæ nobis liquit quinque talenta pater.
Nam multum lachrymans ſeptem illius vndecimatum
Quintam habeo partem. Iupiter iſta vides?

Numerus 5. diuidendus eſt in duas partes, vt prioris quinta pars de $\frac{7}{11}$. ſeu $\frac{7}{55}$. æquentur poſteriori. Eſto prior 1 N. poſterior 5 − 1 N. ergo $\frac{7}{55}$ N. æquantur 5 − 1 N. & fit 1 N. 4 $\frac{27}{62}$. prior pars. Igitur poſterior eſt $\frac{35}{62}$.

XXII.

Εἶπε κυβερνητῆρα, πλατὺν πόρον Ἀδριακοῖο
Τέμνων τίς, ἁλὸς πόσα λείπεται εἰσέτι μέτρα;
Τὸν δ' ἀπαμείβετο. ταῦτα μέσον κριοῖο μετώπου
Κρηταίου, Σικελῆς τε Πελωρίδος, ἑξάκι μέτρα
Χίλια, δοιὰ δ' αὐτὸ παρεξεχυθέντα δρόμοιο
Πέμπτον διπλάσιον Σικελὸν ἐπὶ πορθμίδα λείπει.

Adriacas dum findit aquas, è puppe magiſtrum
Nauta rogat, quantum pelagi iam reſtet arandum.
Ille refert. Creten inter Siculumque Pelorum
Millia ſex numerant, exhauſti iamque profundi
Bis gemini nobis quintantes ecce ſuperſunt
Sicania donec remos lentemus in vnda.

Numerus 6000. ſecandus eſt in duas partes, vt prioris $\frac{4}{5}$. æquentur poſteriori. Eſto prior 1 N. ergo poſterior 6000 − 1 N. Quare $\frac{4}{5}$. N. æquantur 6000 − 1 N. & fit 1 N. 3333 $\frac{1}{3}$. prior pars. Igitur poſterior relinquitur 2666. $\frac{2}{3}$. Quot ſtadia reſtabant vſque ad Pelorum.

XXIII.

Τοῦ πισύρων κρηνῶν ὁ μὲν ἤματι πλήσει ἅπασαν
Δεξαμένην, δύο δ' ἄλλος, ὁ δ' ἐν τρισὶν ἤμασιν ἄλλος,
Τέτρατος ἐν τετόρεσσι. πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

Totum implere lacum tubulis è quatuor, vno
Eſt potis iſte die, binis hic & tribus ille,
Quatuor at quartus. Dic quo ſpatio ſimul omnes.

Pone quatuor tubos ſimul implere totum lacum in 1 N. dierum. Et die per regulam trium ſi primus tubus vna die implet totum lacum, ſeu vnum lacum, quantum implebit in 1 N. diei, inuenies 1 N. eadem ratione reperies ſecundum tubum implere $\frac{1}{2}$ N. tertium $\frac{1}{3}$ N. quartum $\frac{1}{4}$ N. Quare omnes ſimul implebunt $\frac{25}{12}$ N. Quare $\frac{25}{12}$ N. æquantur vnitati, & fit 1 N. $\frac{12}{25}$. Quare omnes tubi ſimul implebunt lacum in $\frac{12}{25}$. diei.

Hinc porro ad ſoluendas huiuſmodi quæſtiones formabimus huiuſmodi Canonem.

Diuide vnitatem ſigillatim per denominatores rationum datarum, rurſus per ſummam quotientum diuide vnitatem, orietur quæſitus numerus.

Vt in propoſita quæſtione, quia denominatores rationum datarum ſunt 1. 2. 3. 4. diuide vnitatem, ſigillatim per 1. 2. 3. 4. fient 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. quorum ſumma $\frac{25}{12}$ per quam rurſus diuide vnitatem, fit $\frac{12}{25}$ numerus quæſitus.

XXIV.

Οἶγέ με, καὶ πίσυρεσσιν ἐμπλήσω παρεοῦσαν
  Δεξαμενὴν ὥραις, κρουνὸς ἄλις προρέων.
Δεξιτερὸς δ' ἄρ' ἐμεῖο τόσαις ἀπολείπεται ὥραις
  Ὄφρα μιν ἐμπλήσῃ. δὶς δὲ τόσαις ὁ τρίτος.
Εἰ δ' ἄμφω σὺν ἐμοὶ προχέειν ῥόον ἐς μίαν οἴγοις
  Ἐν ὀλίγῃ μοίρῃ πλήσομεν ἠματίῃ.

Me reſera, & lymphas profundens quatuor horis
  Subiectum implebo protinus ipſe lacum.
Æquali dexter ſpatio, duploque ſiniſter
  Quando fluit, vitreis hunc tubus implet aquis.
Parte ſed implemus longè breuiore diei
  Vno ſi mecum tempore vterque fluat.

Per Canonem ſuprà traditum diuide ſigillatim vnitatem per numeros 4. 4. 8. fient quotientes $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. quorum ſumma $\frac{5}{8}$. per quam ſi diuidas rurſus vnitatem fit $\frac{8}{5}$ quæſitus horarum numerus, quibus tres tubi ſimul lacum implebunt.

XXV.

Κύκλωψ ὁ Πολύφημος ὁ χάλκεος, οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
  Τεῦξέ τις ὀφθαλμὸν, καὶ στόμα, καὶ παλάμην.
Κρουνοῖς συζεύξας, στάζοντι δὲ πάμπαν ἔοικεν
  Ἠδ' ἔτι καὶ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ στόματος.
Κρουνὸν δ' οὔπις ἄτακτος. ὁ μὲν παλάμης τρισὶ μούνοις
  Ἤμασιν ἐμπλήσει δεξαμενὴν προρέων.
Ἠμάτιος γλήνης, στόμα δ' ἤματος ἐν δύο πέμπτοις.
  Τίς κ' ἐνέποι τρισσοῖς ἰσαθέοντα χρόνον.

Æreus hic Cyclops Polyphemus. Reſpice quali
  Arte, quis os, oculum finxerit, atque manum.
Occultos parti ſalientes cuilibet aptans
  Effecit gelidas vt iaculentur aquas.
Ordine ſed tali. Plenus tribus ecce diebus
  Eſt lacus, è dextræ ſi fluat vnda tubo.
Vna dies oculo; geminatus ſufficit ori
  Quintans. Quod ſpatium ſufficit ergo tribus?

Ex lege traditi Canonis diuide ſigillatim vnitatem per 3. 1. $\frac{2}{5}$. fient quotientes $\frac{1}{3}$. 1. $\frac{5}{2}$. quorum ſumma $\frac{23}{6}$. per quam ſi diuidas rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{23}$ pars diei qua tres tubi ſimul lacum impleturi ſunt.

XXVI.

XXVI.

Ὡς ἀγαθὸν κρητῆρι θεοὶ κεράωσι ῥέεθρον
  Οἱ δὲ δύω ποταμοί, καὶ Βρομίοιο χάρις.
Ἴσος δ᾽ οὐ πάντεσσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἷος
  Νεῖλος μὲν προρέων ἠμάτιος κορέσει,
Τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀπερεύγεται. ἐκ δ᾽ ἄρα Βάκχου
  Θυρσὸς ἐνὶ τρισσοῖς ἤμασιν οἶνον ἱείς.
Σὸν δὲ κέρας Ἀχελῷε δύ᾽ ἤμασι. νῦν δ᾽ ἅμα πάντες
  Ῥεῖτε, καὶ ἐν ὥραις πλήσετέ μιν ὀλίγαις.

Vt miſcent pariter dulcem in Cratere liquorem
  Hinc gemini fluuij, Liber & inde pater.
At non æquali ſpatio tamen influit humor
  Vno namque potes nile replere die.
Tantum fundis aquæ è mammis. Tribus ecce diebus
  Quod Thyrſo præbes implet Iacche merum.
Binos cornu Acheloë dies fluis. At ſimul omnes
  Ite, breui Crater tempore plenus erit.

Diuide ſigillatim vnitatem per 1. 3. 2. fient quotientes 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum ſumma $\frac{11}{6}$. per quam diuide rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{11}$. pars ſcilicet diei qua tres tubi ſimul craterem implebunt.

XXVII.

Ὦ γύναι ὡς πενίης ἐπελήσαο. ἣδ᾽ ἐπίκειται
  Αἰὲν ἀναγκαίη κέντρα φέρουσα πόνων.
Μναῖ ἐρίων νήθεσκες ἐν ἤματι. πρεσβυτέρη δὲ
  Θυγατέρων, καὶ μνᾶν καὶ τρίτον εἷλκε κρόκης.
Ὁπλοτέρη δὲ μνῆς φέρεν ἥμισυ. νῦν δ᾽ ἅμα πάσας
  Δόρπον ἐφοπλίζει μναῖ ἐρύσας ὁ κανών.

Te tua paupertas mulier latet? Attamen vrget
  Et duri ſtimulos ipſa laboris habet.
Quotidie vnam tu: ſed maior nata ſolebat
  Lanæ cum toto nere triente minam.
Nebat nata minor ſemiſſem. Nunc tribus autem
  Ex vna vobis cœna parata mina eſt.

Senſus eſt. Mater quotidie nebat minam vnam lanæ. Maior natarum $\frac{4}{3}$. vnius minæ. Minor nata $\frac{1}{2}$ vnius minæ. Nunc tres ſimul nent minam vnam tantum quotidie, quæritur quantum quælibet neat eadem ſeruata proportione. Hoc ergo nil aliud eſt quàm diuidere vnitatem in tres partes ſeruantes eaſdem rationes quas habent inter ſe 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. Quare per Canonem ſecundæ primi adde ſimul 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fit ſumma $\frac{17}{6}$. per quam diuide vnitatem, fit quotiens $\frac{6}{17}$ quem ducito ſigillatim in ipſos 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fieut quæſiti numeri $\frac{6}{17}$, $\frac{8}{17}$. $\frac{3}{17}$.

XXVIII.

Οἱ δὲ λειβοχόοι τρεῖς ἕσταμεν ἐνθάδ᾽ ἔρωτες
Καλλιρόην πέμποντες ἐπ᾽ εὐρίποιο λοετρά·
Δεξιτερὸς μὲν ἐγώ, τανυπτερύγων ἀπὸ ταρσῶν
Ἤματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἐνὶ τόνδε κορέσσω.
Λαιὸς δ᾽ αὖ πισύρεσσιν ἀπ᾽ ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις.
Ἐκ δ᾽ ὁ μέσος τόξοιο καθ᾽ ἤματος αὐτὸ τὸ μέσσον.

Φράζεο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
Ἐκ πτερύγων, τόξου τε, ϗ ἀμφιφορῆος ἰόντες.

Qui iaculamur aquas tres hîc adſtamus Amores,
Sed variè liquidas Euripo immittimus vndas.
Dexter ego, ſummis & quæ mihi manat ab alis
Ipſum Lympha replet ſolo ſextante diei.
Quatuor aſt horis læuus verſa influit vrna
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arcu.
Dic age quàm paucis Euripum implebimus horis
Ex arcu ſimul, atque alis, vrnaque fluentes?

Diem conſtituentes ex 12. horis, erunt quatuor horæ $\frac{1}{3}$. diei. Quare per Canonem ſuprà traditum diuidemus vnitatem ſigillatim per $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quotientes 6. 3. 2. quorum ſumma 11. per quam diuidendo vnitatem fit $\frac{1}{11}$ quæſita pars diei, qua tres Amores ſimul fluentes Euripum implebunt.

XXIX.

Πλινθουργοὶ μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι
Ἦμαρ δ' ἀννέφελον τόδε σήμερον· ἠδ' ἔτι πολλῶν
Χρηΐζω, πάσας δὲ τριηκοσίῃσι δέουσας
Πλίνθους ἔχω. σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευξας.
Παῖς δέ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίας ἀπέληγεν.
Γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καὶ εἰσέτι πεντήκοντα.
Τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχεται ὥραις.

Fictores laterum ceſſerunt nubila cœlo
Indulgete operi; domus vt mea perficiatur
Non multi deſunt lateres, finxiſſe tricenos
Sufficiet. Tantum ſolus formare ſolebas
Qualibet ipſe die: ſed centum, filius. Atqui
Illo quinquaginta minus gener edere ſuetus.
Quos peto tres pariter quot conſummabitis horis?

Cùm pater vna die conficiat 300. lateres, filius 100. gener 50. tres ſimul vna die conficiunt 450 Dic ergo per regulam trium. Si 450. lateres conficiuntur vna die quo tempore fient 300. Inuenies $\frac{2}{3}$. diei, ſeu horis octo, ſi diem 12. horarum conſtituas.

XXX.

Δακρὺ παραστάξαντες ἀμείβετε. οἱ γὰρ ἡμεῖς
Οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Ἀντιόχου
Δαιτυμόνας, οἷσιν γε θεὸς δαιτός τε τάφου τε
Τὸν δ' ἔπορεν χῶρον. τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης δὲ δυώδεκα. ἐκ δ' ἔτι πέντε
Ἄργεος. ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων.
Αὐτὸς δ' Ἀντίοχος. πέμπτον δὲ τε πέμπτον ὄλοντο
Κεκροπίδαι. σὺ δ' Ὕλαν κλαῖε Κόρινθε μόνον.

Carpe viator iter lacrymans. Hîc namque iacemus
Quos domus vna cadens obruit Antiochi
Queis epulas inter crudeli occumbere letho
Fata tulere. Iacent quatuor ex Tegea
Bis ſex Meſſene; clarum quinque edidit Argos.
Dimidium Sparte Martis amica tulit.

Occidit Antiochus. Quintam quintantis Athenæ
  Lugent; extinctum fletque Corinthus Hylam.

Quæritur numerus cuius $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{11}$. ſimul adſumentes 23. (nam tot conuiuæ numerantur) efficiant ipſum quæſitum numerum. Reperietur ergo per Canonem ſæpè vſitatum, numerus 50.

XXXI.

Νικαρέτη παίζουσα σὺν ἡλικιώτισι πέντε
  Ὧν εἶχεν καρύων Κλειτ' ἔπορεν τὸ τρίτον.
Καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον. Ἀριστοδίκῃ δὲ τὸ πέμπτον.
  Εἰκοστὸν Θεανοῖ, καὶ πάλι δωδέκατον
Εἰκοστὸν τέτρατον δὲ Φιλιννίδι, καὶ περίων δὲ
  Πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτῃ κάρυα.

Mittens Nicarete ſociabus dona, ſuarum
  Impertit Cliten læta triente nucum.
Sappho quarta datur. Vigeſima facta Theanûs
  Atque duodecima eſt; Quintaque Ariſtodices.
Pars tibi cùm ceſſit vigeſima quarta Philinni
  Quinquaginta ſibi Nicarete retinet.

Quæritur numerus, talis, vt illius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{24}$. ſimul additæ, & adſumentes 50. conficiant ipſum qui quæritur numerum. Minimus qui habeat datas partes eſt 120. cuius datæ partes ſimul conficiunt 115. quo ablato de 120. ſupereſt per quem diuidendo 50. fit quotiens 10. quo ducto in 120. fit quæſitus numerus 1200.

XXXII.

Γνωμονικῶν Διόδωρε μέγακλέος, εἰπέ μοι ὥρην,
Ἡνίκ' ἀπ' ἀντολίης πόλον ἥλατο χρύσεα κύκλα
Ἠελίου; τῷ δ' ἤτοι ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
Τετράκι τόσσον. ἔπειτα μεθ' ἑσπερίην ἅλα λείπει.

Dic quota iam effluxit pars ô Diodore dieí.
Auratis ex quo radiis ſol gnomona tangit
Quantum decurſi tres quintæ temporis, inde
Eſt tantum quater, heſperiis dum ſe occulat vndis.

Hîc numerus 12. diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat quater $\frac{3}{5}$. ſeu $\frac{12}{5}$ prioris; vel quod idem eſt 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 5. ad 12. Quare per Canonem ſecundæ primi addo ſimul 5. & 12. fit 17. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{17}$. quem duco ſigillatim in 5. & in 12. fiunt quæſitæ partes $\frac{60}{17}$. & $\frac{144}{17}$. Itaque tranſactum tempus eſt horarum 3 $\frac{9}{17}$. reliquum verò eſt horarum 8 $\frac{8}{17}$.

XXXIII.

Ζεῦ μάκαρ, ἦρά τοι ἦρα τὰ δ' ἀνδάνει, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μαραίνεται ὄμμα Σελήνης
Ἐκ μερόπων. ἴδον αὐτὸς, ἔην δ' ἔτι νυκτὸς ἐπ' ἠοῦ
Δὶς τόσσον ὅσσα δύω, ἕκτα καὶ ἕβδομον οἰχομένοιο.

Proh ſuperûm pater, iſta placet quæ Theſſala cantu
Molitur maga? Cùm Phœbe pudibunda lateret
Vidi ego. Bis tantum ſolis reſtabat ad ortum
Tertia tranſactæ quantum & pars ſeptima noctis.

Numerus 12. rurſus diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat $\frac{2}{3}$. & $\frac{2}{7}$. ſeu $\frac{20}{21}$. prioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 21. ad 20. Ergo per Canonem ſecundæ primi addo ſimul 21. & 20. fit 41. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{41}$. quem duco ſigillatim in 21. & in 20. fiunt quæſitæ partes $\frac{252}{41}$. & $\frac{240}{41}$. Itaque quando Eclipſis lunæ facta eſt, tranſierant horæ noctis $6\frac{6}{41}$. Reſtabant autem vſque ad ſolis ortum, horæ $5\frac{35}{41}$.

XXXIV.

Ἀπλανέων ἄστρων παρόδους δ' ἐπὶ τοῖσιν ἀλήτης
  Εἰπέ μοι ἡνίκ' ἐμοὶ χθιζὸς ἔτικτε δάμαρ.
Ἦμαρ ἔλω ὅσσόν τε δὶς ἑβδόμου ἀντολίηθεν
  Ἑξάκι τόσσον ἔλω ἑσπερίην ἐς ἅλα.

Fixorum coitus Aſtrorum, vnaque vagantum
  Dic age cùm pareret vxor amata mihi.
Lux erat, & quantum ſeptans geminatus ab ortu
  Tantum bis ter erat ſolis ad occubitum.

Numerus 12. denuò diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat ſexies $\frac{2}{7}$. id eſt $\frac{12}{7}$ prioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 7. ad 12. Addo ſimul 7. & 12. fit 19. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{19}$. quem duco ſigillatim in 7. & in 12. fiunt quæſitæ partes $\frac{84}{19}$. & $\frac{144}{19}$. Itaque tempore partus tranſierant horæ diei $4\frac{8}{19}$. Reſtabant autem vſque ad noctem horæ $7\frac{11}{19}$.

XXXV.

Ἔστεθ' ἐργάτιναι παρέδραμε πέμπτον ἕεδνα.
  λειπομένης τρισσῶν οἴχεται ὀγδοάτων.

Surgite lanificæ, lux eſt, reliquæque diei
  Octantum effluxit portio quinta trium.

Numerus 12. diuidendus eſt quoque in duas partes, ita vt prior contineat quintam partem de $\frac{3}{8}$ ſeu $\frac{3}{40}$ poſterioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 3. ad 40. addo 3. ad 40. fit 43. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{43}$. quo ducto ſigillatim in 3. & in 40. fiunt quæſitæ partes $\frac{36}{43}$ & $\frac{480}{43}$. Itaque iam effluxerant horæ vnius $\frac{36}{43}$. reſtabant autem horæ $11\frac{7}{43}$.

XXXVI.

Σύρτιος ἐν πελάγεσσι πατὴρ θάνεν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
  Πέντε τάλαντα φέρων ἤλυθε ναυτιλίης
Οὗτος ἀδελφειῶν προφερέστατος, ᾗ γὰρ ἔμοιγε
  Δῶκεν ἑῆς μοίρης διπλάσιον τριτάτου
Δοιῶν, ἡμετέρης δὲ δύ' ὄγδοα μητέρι μοίρης
  Ὤπασεν, οὐδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

Syrtibus in medijs pater occidit; Attamen inde
  Incolumis rediit quinque talenta ferens
Optimus hic fratrum: Gemini mihi namque trientis
  Duplum conceſſit ſortis habere ſuæ.
At charam noſtræ partis quadrante parentem
  Donauit, certus non violaſſe deos.

Numerus 5. diuidendus eſt in tres partes, ita vt ſecunda contineat $\frac{4}{3}$ primæ. At tertia contineat $\frac{1}{4}$ ſecundæ. Hoc eſt 5. diuidendus eſt in tres partes ſeruantes eaſdem rationes, quas ſeruant 3. 4. 1. Horum ergo ſumma eſt 8. per quam diuido 5. fit $\frac{5}{8}$ quo ducto ſigillatim in ipſos 3. 4. 1. fiunt quæſitæ partes $\frac{15}{8}$. $\frac{20}{8}$. $\frac{5}{8}$. Habuit igitur primus frater talentum 1. & $\frac{7}{8}$. ſecundi talenta $2\frac{1}{2}$. Mater verò $\frac{5}{8}$ vnius talenti, vel ſi placet talentum vnum, minas reſoluere in minas 60. & minam in drachmas 100.

habuit primus frater talentum 52. drachmas 50. ſecundus frater habuit talenta 2. minas 30. mater denique minas 37. drachmas 50.

XXVII.

Α βάσις ἂν πατέω σὺν ἐμοὶ βάρος ἄλκιον ἕλκει
Χ' ἁ κρηπὶς σὺν ἐμοὶ τόσσα τάλαντα φέρει.
Ἀλλ' ἐγὼ ἐῶν ἅπαξ τὰν σὰν βάσιν ἐς δὶς ἀνέλκω.
Κἠγὼ μοῦνος ἐὼν σὰν βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

Quam calco baſis, hæc mecum pondus trahit ingens.
Mecum æquale trahit pondus & iſta baſis.
Solus at ipſe tuæ baſeos ſum pondere duplus
Sum triplus baſeos ſolus & ipſe tuæ.

Hæc quæſtio non vnam recipit ſolutionem, ſed infinitas. Nam quæritur Numerus qui bis ita diuidatur in duas partes, vt maior priori diuiſionis ſit dupla ad maiorem poſterioris diuiſionis. At maior poſterioris diuiſionis ſit tripla ad minorem prioris. Omnem autem numerum ita diuidi poſſe bis in duas partes, docuit abundè Diophantus quæſtione duodecima libri primi. Statuamus verbi gratia quamlibet ſtatuam cum ſua baſe pendere talenta 100. Diuidetur ergo 100. in partes quæſitas per operationem Diophanti loco citato, vel per Canonem à nobis ibidem traditum, & erunt partes prioris diuiſionis 80. & 20. At partes poſterioris 40. & 60. quæ propoſitum implent.

XXXVIII.

Δός μοι δέκα μνᾶς, καὶ τρίπλους σοι γίνομαι.
Κἀγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ πεντάπλους.

Minas decem da, triplus vt fiam tui.
At tu decem da, quintuplus fiam vt tui.

Quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 10. à ſecundo, ſit triplus eius quod relinquitur ſecundo. At ſecundus accipiens 10. à primo, ſit quintuplus ad reſiduum primi. Similem quæſtionem tractauit Diophantus lib. 1. quæſtione 15. ſic autem ſoluitur. Eſto primus 1 N. + 10. hic ergo cùm dederit 10. ſecundo remanebit 1 N. & erit tunc ſecundus 5 N. à quo ſi auferas 10. quæ accepit à primo, erit ſecundus ab initio 5 N. − 10. Reſtat vt primus accipiens 10. à ſecundo, ſit triplus ad reſiduum ſecundi. Quare 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. æquatur 15 N. − 60. & fit 1 N. 5 $\frac{5}{7}$. ſunt ergo quæſiti numeri 15 $\frac{5}{7}$. & 18. $\frac{4}{7}$.

XXXIX.

Δός μοι δύο μνᾶς, καὶ δίπλους σοι γίνομαι.
Κἀγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ τετράπλους.

Minas duas da, duplus vt fiam tui.
At tu duas da, quadruplus fiam vt tui.

Hæc quæſtio eiuſdem eſt naturæ atque præcedens. Eſto primus 1 N. + 2. hic ergo cùm dederit 2. ſecundo, remanebit 1 N. eritque tunc ſecundus 4 N. & ab eo ſi auferas 2. quæ accepit à primo, erit ſecundus ab initio 4 N. − 2. qui ſi dederit 2. primo fiet primus 1 N. + 4. duplus ad reſiduum ſecundi, puta ad 4 N. − 4. Quare 1 N. + 4. æquatur 8 N. − 8. vnde fit 1 N. 1 $\frac{5}{7}$. ſunt igitur quæſiti numeri 5 $\frac{5}{7}$. & 4 $\frac{6}{7}$.

XL.

Ὅμηρος Ἡσιόδῳ ἐρωτήσαντι πόσον τὸ τῶν Ἑλλήνων
πλῆθος κατὰ τῆς Ἰλίου στρατεῦσαν.

Ἑπτὰ ἔσσαν μαλεροῦ πυρὸς ἐσχάραι, ἐν δὲ ἑκάστῃ
Πεντήκοντ' ὀβελοί, περὶ δὲ κρέα πεντήκοντα.

Τρίς τε τριηκόσιοι ἐπὶ ἐν κρέας ἦσαν Ἀχαιοί.

Homerus Heſiodo interroganti quanta fuiſſet Græcorum multitudo aduerſus Troiam militantium.

Septeni luxere foci, ſed quemlibet antè
Quinquaginta caro verubus confixa tremebat,
Nongentiſque veru Danaïs data fercula ab vno.

Per ſolam multiplicationem bis repetitam ſoluitur quæſtio, ducito 7. in 50. fit 350. quem rurſus ducito in 900. fit numerus Græcorum militum 315000. extat hoc epigramma in agone Homeri & Heſiodi Græcè edito, ſed corruptum, nam initium primi verſus ſic legitur.

Πεντήκοντ' ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι.

Vnde non immeritò Agonis illius author incredibilem quæ inde colligitur militum multitudinem miratur, ſic enim fieret eorum numerus 2250000.

His quæ nondum edita erant Epigrammatis, ſubiicere libet quinque ſequentia cum noſtra interpretatione, ne quid ad hanc materiam pertinens hîc deeſſe ſinamus, quamuis olim hæc edita circumferantur in Anthologia.

XLI.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσῆ σφυρήλατος. αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος· ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις. καὶ δεκάτην μοῖραν ἔδωκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων. τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη δῶρον Ἀριστοδίκου.

Aurea Pallas ego. Muſis ſed amica iuuentus
Materiam docto præbuit artifici
Octauam Theſpis, partemque Chariſius auri]
Dimidiam, decimam contulit ipſe Solon.
A Themiſone data eſt vigeſima. Terna talenta
Et ſena, ipſe opifex præſtat Ariſtodicus.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. ſimul, adſumentes 9. conficiant ipſum quæſitorum numerum. Minimus habens datas partes eſt 40. idemque quæſitus numerus, vt conſtat ex Canone iam ſæpè à nobis vſurpato.

XLII.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος. ὃς δ' ἀπάμειπτο.
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶν δε.
Μοίρῃ δ' ὀγδοάτῃ ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτῃ δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' ἧρον.
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστῇ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα.
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

Augæam rogat Alcides, quot paſcua circûm
Errarent armenta ſibi. Cui retulit ille.
Paſcitur Alphæi rapidas ſemiſſis ad vndas.
Pars octaua ſacro Saturni in colle vagatur.
Pone Taraxippi tumulum ſextantis oberrat

Dimidium; decimæ ſemiſſem detinet Elis.
Denique in Arcadicis trigeſima ſubſtitit oris.
Quadraginta vides tamen hîc armenta relinqui.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{30}$. ſimul cum numero 50. efficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120. cuius datæ partes ſimul efficiunt 95. quo ablato de 120. ſupereſt 25. per quem diuide 50. fit 2. quo ducto in 120. fit 240. quæſitus armentorum numerus.

XLIII.

χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιὰ,
Καὶ στόμα, σὺν δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρατῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα.
Καὶ λαιὸν τριτάτοις, καὶ πισύρεσσι θέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι στόμα. σὺν δ' ἅμα πάντα
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον;

Æreus adſto leo, tubuli mihi lumina bina
Oſque etiam, dextri ſic quoque planta pedis.
Binis dextro oculo, ternis lacus iſte diebus,
Impletur læuo ſed pede bis geminis.
Ori ſufficiunt ſex horæ. Dic ſimul ergo
Quo ſpatio os, oculi, peſque replere valent.

Sumendo diem artificialem 12. horarum, cuius 6. horæ ſunt $\frac{1}{2}$. erunt numeri exprimentes rationes datas 2. 3. 4. $\frac{1}{2}$. per quos ſigillatim diuiſa vnitate fiunt quotientes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. 2. quorum ſumma $\frac{37}{12}$ per quam rurſus diuidendo vnitatem fit quæſita pars diei $\frac{12}{37}$. ſeu horæ $3\frac{33}{37}$.

XLIV.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν
Ζῆθός τε χ' ὡ ξύναιμος, ἢν δὲ μου λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦ δ' Ἀμφίονος
Ἓξ πάντ' ἀνευρὼν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

Viginti vterque pendimus ſimul minas
Zethus ego, fraterque. Attamen ſi ceperis
Mei trientem, cum quadrante Amphionis
Senæ, parentis pondus, exibunt minæ.

Soluit ſimilem quæſtionem Diophantus lib. 1. quæſt. 5. Nam numerus 20. diuidendus eſt in duas partes, vt $\frac{1}{3}$. prioris, & $\frac{1}{4}$. poſterioris ſimul efficiant 6. Eſto poſterioris $\frac{1}{4}$. 1 N. ipſa ergo pars poſterior eſt 4 N. At triens prioris eſt 6 − 1 N. ipſa prior pars 18 − 3 N. At duarum partium ſumma fit 18 + 1 N. æqualis 20. Ergo 1 N. eſt 2. Igitur quæſitæ partes de 20. ſunt 12. & 8. & ſatisfaciunt propoſito.

XLV.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον.
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε γεωμετρίης ἐπίιστορ.

Vnà cum mulo vinum portabat aſella,
Atque ſuo grauiter ceu pondere preſſa gemebat
Talibus at dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, ſi des menſuram, pondera geſto,
At ſi menſuram capias, æqualia porto.
Optime menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Hæc etiam quæſtio ſoluitur per decimam quintam primi. Nam quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 1. à ſecundo ſit duplus ad reſiduum ſecundi; at ſecundus accipiens 1. à primo ſit æqualis reſiduo primi. Eſto primus 1 N. + 1. Ergo dando 1. ſecundo, remanebit primus 1 N. & tunc ſecundus erit 1 N. Quare auferendo ab eo vnitatem quam accepit à primo, fit ſecundus, vt erat ab initio 1 N. − 1. Iam ſi ab eo primus accipiat 1. fiet primus 1 N. + 2. & reſiduum ſecundi erit 1 N. − 2. Itaque 1 N. + 2. duplus eſt ad 1 N. − 2. & tandem 1 N. + 2 æquatur 2 N. − 4. Vnde fit 1 N. 6. Sunt ergo quæſiti numeri 7. & 5.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM

LIBER SEXTVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenuſa ſubtracto alterutro laterum circa rectum, faciat cubum. Eſto quæſitum triangulum effictum à duobus numeris, & ſit alter 1 N. alter 3. fit igitur hypotenuſa 1. Q. + 9. perpendiculum 6 N. Baſis 1 Q. − 9. Et hypotenuſa dempto vno laterum circa rectum, hoc eſt 1 Q. − 9. facit 18. qui non eſt cubus. Vnde autem prouenit 18? Quadratus eſt de 3. bis ſumptus. Oportet igitur inuenire numerum aliquem, vt illius quadratus bis ſumptus faciat cubum. Eſto quæſitus numerus 1 N. & fiunt 2 Q. æquales cubo. Eſto 1 C. & fit 1 N. 2. Rurſus formo triangulum ab 1 N. & non à 3. ſed à 2. & fit hypotenuſa 1 Q. + 4. Perpendiculum 4 N. Baſis 1 Q. − 4. & manet hypotenuſa detracta baſi faciens cubum. Supereſt vt & perpendiculum quod eſt 4 N. detractum ab hypotenuſa faciat cubum. Fit autem 1 Q. + 4 − 4 N. æquale cubo. Eſt autem quadratus à latere 1 N. − 2. ſi ergo æquemus cubo 1 N. − 2. ſoluemus quæſtionem. Eſto æquale 8. fit 1 N. 10. Itaque formabitur triangulum à 10. & 2. & fit hypotenuſa 104. Perpendiculum 40. Baſis 96. & conſtat.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον πεπλασμένον ἀπὸ δύο ςς. καὶ ἔστω ὁ μὲν ςο α̅. ὁ δὲ μο γ̅. γίνεται ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα δυ α̅. μο θ̅. ἡ δὲ κάθετος ςς ς̅. ἡ δὲ βάσις δυ α̅. λείψει μο θ̅. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἐὰν λείψῃ ἵνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τουτέστι δυ α̅. λείψει μο θ̅. γίνεται μο ιη̅. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. πόθεν ὁ ιη̅. ὁ ἀπὸ τοῦ γ̅ ἐστὶν τετράγωνος, δὶς γενόμενος. δεῖ οὖν εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὅπως ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δὶς γενόμενος ποιῇ κύβον. ἔστω ὁ ζητούμενος ςο α̅. καὶ γίνονται δυ β̅. ἴσαι κύβῳ. ἔστω κυ α̅. καὶ γίνεται ὁ ςο μο β̅. πάλιν πλάσσω τὸν τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ α̅. καὶ οὐκ ἔτι μο γ̅. ἀλλὰ μο β̅. καὶ γίνεται ἡ ὑποτείνουσα δυνάμεως α̅. μο δ̅. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμῶν δ̅. ἡ δὲ βάσις δυ α̅. λείψει μο δ̅. καὶ μένει ἡ ὑποτείνουσα λείψασα τὴν ἐν τῇ βάσει τουτέστι δυ α̅. λείψει μο δ̅. ποιοῦσα κύβον. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν κάθετον οὖσαν ςς δ̅. λειφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ποιεῖν κύβον. γίνεται δὲ δυ α̅. μο δ̅. λείψει ςς δ̅. ἴσον κύβῳ. καὶ ἔστι τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ςο α̅. λείψει μο β̅. ἐὰν ἄρα ἀριθμὸν α̅ λείψει μο β̅. ἰσώσωμεν κύβῳ, λύσομεν τὸ ζητούμενον. ἔστω ἴσον μο η̅. καὶ γίνεται ὁ ςο μο ι̅. ὥστε πλασθήσεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ μο ι̅. καὶ μο β̅. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα ρδ̅. ἡ δὲ κάθετος μο μ̅. ἡ δὲ βάσις μο ϟς̅. καὶ μένει.

In VI. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis eſt , in qua tamen nonnulla occurrunt animaduerſione digna. Quare primò aduerte à duobus numeris formari triangulum rectangulum, modo quem demonſtrauimus propoſitione quinta tertij poriſmatum. Et fit hypotenuſa ſumma quadratorum , baſis interuallum eorundem , perpendiculum verò duplum multiplicationis laterum. Hinc apparet cur ab hypotenuſa detracto perpendiculo , relinquatur quadratus. ' Etenim à ſumma quadratorum auferendo duplum producti laterum , remanet quadratus interualli laterum. Sic in priore poſitione detractis 6 N. ab 1 Q. + 9. fit quadratus 1 Q. + 9 − 6 N. à latere 1 N. − 3. quod eſt interuallum numerorum 1 N. & 3. à quibus formatur triangulum. At in ſecunda poſitione detractis 4 N. ab 1 Q. + 4. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N. à latere 1 N. − 2. quod eſt interuallum ipſorum 1 N. & 2. à quibus effictum eſt triangulum.

4.2.poriſ.

Secundò aduerte lemma quo quæritur cubus quadrati duplus infinitas recipere ſolutiones, & turpiter allucinari Xilandrum , qui ad ſequentem quæſtionem aſſerit nullum alium cubum præter 8. aſſignari poſſe quadrati duplum , neque in fractis , cum infiniti tales cubi aſſignari poſſint & in integris , & in fractis. Nam vt patet 2 Q. æquari poſſunt cuilibet cuborum numero cubico. Verbi gratia ponantur 2. Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet 1 N. 16. eritque cubus 512. duplus quadrati 256. Rurſus ponantur 2 Q. æquales 8 C. fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. Et inuenietur cubus $\frac{1}{8}$. duplus quadrati $\frac{1}{16}$. & ſic de allijs. Imò eodem prorſus artificio inuenies cubos infinitos qui ad aliquos quadratos datam habeant rationem , & hinc formatur Canon vniuerſalis.

Diuide denominatorem rationis datæ , per cubum aliquem , orietur latus quadrati quæſiti.

Vt ſi velis cubum qui ſit quadrati triplus , diuide 3. per cubum aliquem , puta per 1. vel per 8. vel per 27. fient 3. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{9}$. quorum quadrati 9. $\frac{9}{64}$. $\frac{1}{81}$. quorum tripli , puta 27. $\frac{27}{64}$. $\frac{1}{27}$. ſunt cubi , vt requiritur.

Tertiò aduerte cùm quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. ſit æquandus cubo , rectè Diophantum æquare cubo latus illius , puta 1 N. − 2. Conſtat enim ſi latus quadrati ſit cubus , & ipſum quadratum fore cubum , quia ex cubo in cubum producitur cubus per tertiam & quartam noni Euclidis. Porro hac etiam ex parte infinitas ſolutiones quæſtio recipit , nam 1 N. − 2. cuilibet vnitatum numero cubico æquari poteſt , æquauit Diophantus cubo 8. ſed ſi æquaſſet cubo 1. fuiſſet 1 N. 3 & fingendo triangulum à 2. & 3. facta eſſent latera 13. 12. 5. quæ ſoluunt quæſtionem , nam auferendo ſigillatim vtramque laterum circa rectum ab hypotenuſa , ſuperſunt cubi 1. & 8. Hinc etiam elicitur huiuſmodi Canon.

Sume numerum aliquem , ita vt quadratus illius ſit ſemiſſis cubi ; ſumpto numero adde cubum quemlibet , tum ab hac ſumma , & à ſumpto numero finge triangulum.

Verbi gratia ſume $\frac{1}{4}$ cuius quadratus $\frac{1}{16}$. eſt ſemiſſis cubi $\frac{1}{8}$. Adde cubum 8. ad $\frac{1}{4}$ fiet $\frac{33}{4}$. tum finge triangulum ab $\frac{1}{4}$ & $\frac{33}{4}$. fient latera trianguli $\frac{545}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{544}{8}$. quæ ſoluunt quæſtionem , nam ſublato vtrouis laterum circa rectum ab hypotenuſa , ſuperſunt cubi 8. & $\frac{1}{8}$.

Cæterùm inuento triangulo quæſtionem ſoluente , ſi ſingula illius latera diuidas vel multiplices per aliquem eundem cubum , fiet aliud triangulum æquè propoſito ſatisfaciens. Vt ſi triangulum à Diophanto inuentum 104. 40. 96. diuidas per 8. fiet aliud triangulum 13. 5. & 12. æquè benè propoſito congruens , & ratio eſt euidens , nam interualla quibus hypotenuſa 13. ſuperat latera 5. & 12. fiunt diuidendo per 8. interualla quibus hypotenuſa 104. ſuperat latera 40. & 96. Quare cùm hæc interualla ſint cubi ex hypotheſi , & cubo per cubum diuiſo , oriatur cubus , patet & illa interualla quibus 13. ſuperat 5. & 12. fore cubos , quod eſt propoſitum.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἐὰν πλάσσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ὡς καὶ πρὸ τούτου. γίνεται ζητεῖν τετράγωνον τινὰ ὅπως ὁ διπλάσιος αὐτοῦ ᾖ κύβος, καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ πλευρᾶς μο β. πλάσσομεν δὲ τὸ ζητούμενον ἀπὸ ϛ α.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenuſa adſumens alterutrum laterum circa rectum, faciat cubum. Si formemus quæſitum triangulum à duobus numeris vt in præcedente, quærendus erit quadratus cuius duplum ſit cubus, eſt autem is à latere 2. Fingemus er-

go triangulum ab 1 N. & à 2. & fiet ſimiliter hypotenuſa 1 Q. + 4. vnum autem laterum circa rectum 4 N. alterum denique 4 — 1 Q. Supereſt vt hypotenuſa adſcito priore latere faciat cubum; ſed & neceſſe eſt vt cum ad poſitiones veniemus 1 Q. inueniatur minor quàm 4. Proinde 1 N. minor eſt quam 2. Eò itaque redacti ſumus vt inueniamus cubum minorem quàm 4. maiorem quàm 2. Eſt autem $\frac{27}{8}$. Quamobrem 1 N. + 2. æqualis eſto $\frac{27}{8}$. & fit 1 N. $\frac{11}{8}$. Erit ergo hypotenuſa $\frac{377}{64}$. laterum circa rectum alterum $\frac{352}{64}$. alterum $\frac{135}{64}$. & conſtat.

καὶ μο β. καὶ γίνεται ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα δυ α. μο δ. μία δὲ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς δ. ἡ δὲ λοιπὴ μο δ. λείψει δυ α. λοιπόν ἐστι τὴν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβόντα τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ καὶ διελθόντας εἰς τὴν ὑπόστασιν εὑρεῖν τὴν δύναμιν ἐλάσσονα μο δ. ὁ ἄρα ς ἐλάσσων ἐστὶ μο β. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον ἐλάσσονα μο δ. μείζονα δὲ μο β. καὶ ἐστὶ μο κζ η. καὶ ἔστω ς α μο β. ἴσος μο κζ η. καὶ γίνεται ὁ ς ια η. ἔσται ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα τοζ ξδ. τῶν δὲ περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ μὲν ρλε ξδ. ἡ δὲ τνβ ξδ. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM II.

HIc multa infeliciter adnotauit Xilander. Primò enim aſſerit cubum quadrati duplum nullum eſſe præter 8. & nullum quadrati triplum præter 27. &c. quod ad præcedentem abunde confutauimus. Deinde putat alterum laterum circa rectum poni debere, vt in præcedente 1 Q. — 4. quod eſt abſurdum, nam ob talem poſitionem cogitur ſimul & ſemel æquare cubo, tum 2 Q. tum 1 N. + 2. Quare deueniendum ei ad duplicatam æqualitatem, quæ quomodo reſolui poſſit, cùm ſcilicet duo numeri ſunt ſimul æquandi cubo, nec ipſe docere potuit, nec vſquam docuit Diophantus. Denique non ſatis aperit cauſam cur 1 N. + 2. æquari debeant cubo alicui maiori quàm 2. minori quàm 4. Quamobrem vt omnia ſigillatim elucidemus.

Aduerte primò cur ſumatur numerus cuius quadratus ſit ſemiſſis cubi, & ponatur baſis trianguli 4 — 1 Q. quæ in præcedente ponebatur 1 Q. — 4. cauſam eſſe, quia vult Diophantus per huiuſmodi poſitionem ſatisfieri vni parti poſtulati, nam hypotenuſæ 1 Q. + 4. addendo baſim 4 — 1 Q. fit vtique cubus 8. Poſſe autem baſim poni 4 — 1 Q. æquè benè ac 1 Q. — 4. patet, quia baſis debet eſſe interuallum quadratorum 1 Q. & 4. Quare cum ignoretur vter eorum maior ſit, poteſt eorum interuallum eſſe 1 Q. — 4. vel 4 — 1 Q.

Aduerte ſecundò hypotenuſæ 1 Q. + 4. addendo perpendiculum 4 N. fieri quadratum 1 Q. + 4 N + 4. Quia hypotenuſa eſt ſumma quadratorum, at perpendiculum eſt duplum plani ſub lateribus, vnde patet hypotenuſæ & perpendiculi ſummam [a] æquari quadrato ſummæ laterum 1 N. + 2. Quare ſicut in præcedente reſtat vt æquemus cubo 1 N. + 2. quia ſi latus hoc ſit cubus, erit & quadratus illius cubus; [b] quandoquidem ex cubo in ſeipſum producitur cubus. 4. ſecundò, 3. non.

Aduerte tertiò 1 N + 2. æquari debere cubo qui ſit maior quàm 2. minor quàm 4. primum patet, nam à cubo illo auferendo 2. reſiduum æquari debet 1 N. ſecundùm ſic probatur. Quia baſis poſita eſt. 4 — 1 Q. oportet 4. maiorem eſſe quàm 1 Q. Ergo 2. maior eſſe debet quàm 1 N. fit autem 1 N. vt dictum eſt, ab aliquo cubo auferendo 2. Oportet ergo talem eſſe cubum illum, vt ab eo auferendo 2. reſiduum ſit minus quàm 2. ac proinde oportet cubum huiuſmodi, minorem eſſe quàm 4. Porrò qua ratione inueniendus ſit cubus maior quàm 2. minor quàm 4. non docet hîc Diophantus. Sed id facilè conſequemur eodem artificio quo ad decimam tertiam quinti reperit author quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. Reducantur enim 2. & 4. ad fractionem cubicam eiuſdem denominationis, puta ad octauas, fient $\frac{16}{8}$. & $\frac{32}{8}$. Inter quos cadit cubus $\frac{27}{8}$. propoſito ſatisfaciens. Sic infinitos hujuſmodi cubos reperies, & quo maior erit denominator ad quem fit reductio, eò plures cubi cadent inter numeros propoſitos, vt ſi reducas 2. & 4. ad milleſimas, fient $\frac{2000}{1000}$. & $\frac{4000}{1000}$. inter quos cadunt tres cubi propoſito apti, puta $\frac{2197}{1000}$. $\frac{2744}{1000}$. $\frac{3375}{1000}$. & ſic de alijs.

Aduerte denique hîc contingere vt multiplicando vel diuidendo latera inuenti trianguli, per eundem cubum, fiat aliud triangulum ſoluens quæſtionem. Sic loco laterum quæ inuenit Diophantus, puta $\frac{377}{64}$. $\frac{135}{64}$. $\frac{352}{64}$. ducendo omnia in 64. ſumi poſſunt 377. 135. 352. quod facile eſt demonſtrare.

Cæterùm ratio diuerſitatis in ſolutione & operatione, ex duplici capite ortum habet. Primò enim vt docuimus 1 N. + 2. æquari poteſt infinitis cubis maioribus quàm 2. minoribus quàm 4. quales ſunt $\frac{27}{8}$. $\frac{64}{27}$. $\frac{343}{125}$. &c. Deinde triangulum ipſum ab initio fingi poteſt ab 1 N. & quotlibet vnitatibus, quarum quadratus ſit ſemiſſis cubi, quales infinitos numeros dari, quicquid dicat Xilander, ad præcedentem oſtendimus. Verbi gratia fingatur ab 1 N. & $\frac{1}{4}$. erit hypotenuſa 1 Q. + $\frac{1}{16}$. Baſis $\frac{1}{2}$ N. perpendiculum $\frac{1}{16}$ — 1 Q. hocque addito ad hypotenuſam, fit cubus $\frac{1}{8}$. At baſi addita eidem hypotenuſæ fit quadratus 1 Q. + $\frac{1}{16}$. + $\frac{1}{2}$ N. cuius latus 1 N. + $\frac{1}{4}$. æquandum eſt cubo

maiori quàm $\frac{5}{4}$. minori quàm $\frac{3}{2}$. quales ſunt [illegible]. [illegible]. aliique infiniti. Et vniuerſaliter. Cubus quo cum ſit vltima æquatio debet eſſe maior vnitatibus, à quibus cum 1 N. formatum eſt triangulum, & minor duplo earundem. Quamobrem hinc facilè eſt elicere Canonem.

Sume quemlibet numerum, cuius quadratus ſit ſemiſſis cubi, quem aufer ab aliquo cubo qui ſit maior ipſo, & minor duplo eiuſdem; A reſiduo & à ſumpto numero formabis quæſitum triangulum.

Verbi gratia ſume 2. quem aufer à cubo $\frac{343}{125}$. remanet $\frac{93}{125}$. à quo & à 2. forma triangulum, vel reducendo ad integros, forma triangulum à 93. & à 250. fient latera 71149. 53851. 46500. & hypotenuſa adſumens baſim, tum perpendiculum, facit cubos 125000. & 117649. quorum latera 50. & 49.

Quoniam verò in mentem alicui venire poſſet cur non propoſuerit Diophantus inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa adſumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratum. Vel cuius hypotenuſa detracto quolibet laterum circa rectum relinquat quadratum, non abs re fuerit monere, omiſſas eſſe huiuſmodi quæſtiones, quod ſint impoſſibiles. Id autem, nequis temerè dictum putet, ſic demonſtrabitur. Eſto triangulum rectangulum A B C. dico ſiue hypotenuſæ A addantur ſigillatim latera B. C. ſiue adimantur, non poſſe ſimul fieri duos quadratos. [1] Etenim cùm hypotenuſa A componatur ex duobus planis ſimilibus, ſint ij D major, & E minor; erit ergo B duplum medij proportionalis inter D & E cadentis. At C erit interuallum ipſorum D E. Porro ipſi D E vel quadrati ſunt, vel quadratorum ſimiles. Ponantur primò quadrati. Cùm ergo A ſit ſumma duorum quadratorum D E. & C ſit eorundem interuallum, [2] patet compoſitum ex duobus A C. eſſe duplum maioris quadrati D. Ergo ſi compoſitus ex A C ponatur quadratus, ſequitur ex binario in quadratum D. produci quadratum. Quod eſt impoſſibile, cùm binarius non ſit quadratus, vt oſtendit Clauius ad ſecundam noni. Rurſus ſi ab A qui eſt ſumma quadratorum D E. auferatur C. eorundem interuallum, [3] reſiduum duplum erit minoris quadrati E. Quare ſi hoc reſiduum ponatur quadratus, ſequitur rurſus ex binario in quadratum E. produci quadratum. Quod eadem de cauſa eſt impoſſibile. Quare in hoc caſu patet propoſitum.

D 4. E 1.
A 5. B 4. C 3.
F 15. G 12. H 9.
K 12. L 3.

4. 3. poriſ.
23. 1. poriſ.
23. 1. poriſ.

Iam verò eſto triangulum rectangulum F G H. & plani ſimiles K L. ex quibus hypotenuſa F componitur, non ſint quadrati; dico nihilominus ſequi propoſitum. Nam K L. cùm ſint plani ſimiles, [4] habent rationem quadrati ad quadratum; habeant ergo rationem quam quadratus D ad quadratum E. Igitur cùm ſint proportionales D. E. K. L. & ab ipſis D E formetur triangulum A B C. ab ipſis K L formetur triangulum F G H. [5] erunt hæc triangula ſimilia. Itaque cùm ſit A ad F. vt B. ad G [6] erit ſumma duorum A B ad ſummam ipſorum F G. vt A ad F. Quia verò A eſt ſumma quadratorum D E. & B eſt duplum plani ſub lateribus, [7] patet ſummam ipſorum A B eſſe quadratum, ac proinde ſi & ſumma ipſorum F G ponatur quadratus, erit A ad F vt quadratus ad quadratum. Sed vt A ad F ſic eſt C ad H ob ſimilitudinem triangulorum, ac proinde vt A ad F, [8] ſic eſt ſumma antecedentium A C. ad ſummam conſequentium F H. Igitur [9] ſi ſumma ipſorum F H ſit quadratus, oportet & ſummam ipſorum A C eſſe quadratum. Quod impoſſibile eſt, vt ſuprà oſtendimus. Deinde quia eſt A ad B vt F ad G. & rurſus B ad C vt G ad H. patet argumentando per conuerſionem rationis, tum per rationem permutatam eſſe interuallum ipſorum A B ad interuallum ipſorum F G. itemque interuallum ipſorum A.C. ad interuallum ipſorum F H. ſicut A ad F. Cùm igitur interuallum quo A ſumma quadratorum ſuperat B duplum plani ſub lateribus, ſit quadratus, [1] ſi & interuallum ipſorum F G ponatur quadratus, erit vtrumque interuallum quadratus. Quare & interuallum ipſorum A C. ad interuallum ipſorum F H erit in ratione quadrati ad quadratum, ac proinde ſi interuallum ipſorum F H ponatur quadratus [2] erit & interuallum ipſorum A C quadratus. Quod oſtenſum eſt eſſe impoſſibile. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

26. octaui.
9. 3. poriſ.
12. ſeptimi.
4. ſecundi.
14. ſeptimi.
24. octaui.
4. 2. poriſ.
24. octaui.

Eadem quoque ratio eſt de cæteris omnibus poteſtatibus quadratis, vt pote quadratoquadratis, cubocubis, &c. Etenim inueniri non poteſt triangulum rectangulum, cuius hypotenuſæ addendo vel adimendo vtrumlibet latus fiat quadratoquadratus, vel cubocubus. Hoc enim ſi daretur ſequeretur dari quadratum duplum quadrati. Quod eſt impoſſibile; Alijs autem poteſtatibus omnibus quæ quadratæ non ſunt, quales ſunt cubi, quadratocubi, quadratoquadratocubi, &c. ritè applicabitur quæſtio, vt exemplo quadratocuborum facile eſt demonſtrare.

Sit ergo propoſitum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenuſa adſumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratocubum. Patet ſi ſequamur ductum operationis Diophanti, eò nos adigi, vt inueniamus quadratocubum duplum quadrati, & quia omnis quadratoquadratus eſt quadratus, ſoluetur lemma ſi inueniamus quadratocubum duplum quadratoquadrati. Eſto quadratoquadratus 1 Q.Q. ergo 2 Q.Q. æquantur quadratocubo, eſto 1 Q C. fit 1 N. 2. eſtque quadratoquadratus 16. quadratocubus 32. ſumentes igitur latus quadratum ipſius 16. puta 4. effingamus triangulum ab 1 N. & à 4. erit hypotenuſa 1 Q. + 16. Baſis 16 − 1 Q. Perpendiculum 8 N. & conſtat addendo baſim hypotenuſæ fieri quadratocubum 32. Reſtat vt eidem hypotenuſæ addendo per-

pendiculum fiat quoque quadratocubus. Fit ergo 1 Q. + 16. + 8 N. æqualis quadratocubo. Ergo latus quadratum ipſius 1 Q. + 16 + 8 N. puta 1 N. + 4. æquabimus quadratocubo, ſic enim conſequemur intentum, quia ex quadratocubo in quadratocubum fit quadratocubus, vt demonſtrauimus in Elementis. Porro 1 N. + 4. ſic æquari debet quadratocubo, vt is ſit maior quàm 4. minor quàm 8. ob cauſas ſupra explicatas. Quare cum reducendo 4. & 8. ad fractionem quadratocubicam, fiant $\frac{128}{32}$. & $\frac{256}{32}$. & inter eos cadat quadratocubus $\frac{243}{32}$. huic æquabimus 1 N. + 4. fietque 1 N. $\frac{115}{32}$. Igitur effingemus quæſitum triangulum à 4. & à $\frac{115}{32}$ vel vtroque ad eandem denominationem redacto & communi abiecto denominatore à 128. & à 115. fietque triangulum 29609. 29440. 3159. quod ſoluit quæſtionem: nam hypotenuſæ addendo ſigillatim latera, fient quadratocubi 59049. & 32768. quorum latera 9. & 8.

Eadem arte & quæſtio præcedens extendetur ad huiuſmodi poteſtates. Nam ſit propoſitum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenuſa multata quolibet laterum circa rectum, relinquat quadratocubum. Effingemus vt prius triangulum ab 1 N. & à 4. & erit hypotenuſa 1 Q. + 16. baſis 1 Q. − 16. Perpendiculum 8 N. ſic enim ſatisfit vni parti propoſitionis. Reſtat vt 1 Q. + 16. − 8 N. æquetur quadratocubo. Quare latus 1 N. − 4. æquandum eſt quadratocubo, eſto is 32. fiet 1 N. 36. formetur ergo triangulum à 4. & à 36. erunt latera 1312. 1280. 288. & ſoluta eſt quæſtio. Nam hypotenuſa multata quolibet laterum, relinquit quadratocubos 32. & 1024. à lateribus 2. & 4.

QVÆSTIO III.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ eius numerus adſumens datum numerum, faciat quadratum. Eſto datus 5. & ponatur triangulum datum ſpecie 3 N. 4. N. 5 N. & fit area adſcito 5. 6 Q. + 5. æqualis quadrato. Eſto ipſi 9. & auferantur a ſimilibus ſimilia, relinquuntur 3 Q. æquales 5. & oportet ſpeciem ad ſpeciem, rationem habere quæ eſt quadrati numeri ad quadratum numerum, ſed & multitudinem ad multitudinem. Itaque eò deuentum eſt, vt oporteat inuenire triangulum rectangulum, & quadratum numerum, vt quadratus area trianguli multatus, faciat quintam partem quadrati, quia datus eſt 5. Formetur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. & fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Eſto quadrati latus 1 N. & fractio numerica tot vnitatum, quantus eſt duplus dati numeri, hoc eſt $\frac{10}{1N}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{100}{1Q}$. + 20. & ſi ab eo detrahamus aream, hoc eſt 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. relinquitur $\frac{101}{1Q}$. + 20. Hæc quinquies, fit $\frac{505}{1Q}$. + 100. æquale quadrato. Et omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 100 Q. + 505. æquales quadrato. Eſto latus eius 10 N. + 5. Inuenitur 1 N. $\frac{24}{5}$. Ad poſitiones. Formabitur ergo triangulum à $\frac{24}{5}$ & $\frac{5}{24}$. Erit autem quadrati latus $\frac{413}{60}$. ſi ergo triangulum ſtatuamus in numeris, & aream ipſius adſcito 5. æqualem faciamus $\frac{170569}{3600}$ Q. reliqua fient manifeſta.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ε. καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ἀριθμῶν ε. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μονάδων ε. δυνάμεις ς. μο ε. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δυνάμεσι θ. καὶ ἀπὸ τῶν ὁμοίων τὰ ὅμοια. λοιπαὶ δυνάμεις γ. ἴσαι μο ε. καὶ δεῖ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ τετράγωνος λείψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ τριγώνου ποιῇ πέμπτον τετραγώνου. ἐπειδήπερ ὁ δοθεὶς μο ε. ἐστί. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςο α. καὶ α ςου. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ δυνάμεως α. λείψει α δυναμοστοῦ. ἔστω ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ςο α. καὶ ἀριθμοστὸν μονάδων τοσούτων ὅσων ἐστὶν ὁ διπλάσιος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τουτέστιν ι ἀριθμοστῶν. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυνάμεως α. ρ δυναμοστῶν. μο κ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὸ ἐμβαδόν, τουτέστι δυνάμεως α. λείψει α δυναμοστοῦ. λοιπὸν γίνεται ρα. δυναμοστὰ μο κ. ταῦτα πεντάκι γίνεται φε δυναμοστά. μο ρ. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν α. γίνονται δυνάμεις ρ. μο φε. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ἀριθμῶν ι μο ε. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μο κδ ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ κδ ε. καὶ ε κδ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ υιγ ξ. ἐὰν οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ἀριθμοῖς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μετὰ μονάδας ε. ποιῶμεν ἴσον δυνάμεσι ιζ. φξθ ,γχ. ἔσται ἡμῖν τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM III.

AD quæſtiones omnes huius libri reliquas nihil adnotauit Xilander, earum tum difficultate, tum inſigni deprauatione deterritus. Sed & ſummi vir ingenij Franciſcus Vieta cùm hanc ipſam quæſtionem pertractandam ſuſcepiſſet, Zetetico nono libri quinti parum feliciter eam explicauit; etenim methodum Diophanti minimè percipiens, aliamque viam inire coactus, quod ille vniuerſaliſſimè propoſuerat de quolibet numero ad aream trianguli addendo, ipſe ad ſolos numeros è duobus quadratis compoſitos, teſtrinxit. Itaque nobis ob integram tot pulcherrimorum ſubtiliſſimorumque problematum enodationem, ſolida relicta eſt gloria. Quàm vt non immeritò conſequamur, circa hanc quæſtionem.

Aduerte primò triangulum datum ſpecie vocari à Diophanto, illud cuius laterum proportio data eſt tantùm, ipſorum laterum quantitate indefinita manente, quod à tertia definitione datorum Euclidis depromptum eſt. Verè enim triangula omnia quæ latera habent proportionalia eiuſdem ſpeciei cenſeri poſſunt, tum ob laterum ſimilitudinem, tum ob angulorum æqualitatem, vnde & ſimilia vocantur ab Euclide. Idcirco Diophantus huiuſmodi triangula non exhibet in vnitatibus, quia verbi gratia ſi exponatur triangulum 3. 4. 5. Id iam non in ſpecie, ſed in indiuiduo exhibitum erit. Cùm autem proportio laterum dabitur, ſed ipſa laterum quantitas manebit indefinita, exhibendo ſcilicet triangulum in Numeris, vt facit Diophantus ſicut 3 N. 4 N. 5 N. verè & propriè exhibitum erit triangulum in ſpecie, cùm hæ poſitiones, ob numeri indeterminationem, applicari poſſint lateribus cuiuſlibet trianguli huius ſpeciei.

Aduerte ſecundò. Cum per primam operationem reperiatur 6 Q. + 5. æqualis quadrato, æquandum eum eſſe cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 6. puta 9 Q. 16 Q. &c. Quare oportet talem deligi quadratorum numerum vt ab eo auferendo 6. reſiduum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Proinde cùm 6. ſit numerus areæ expoſiti trianguli, patet quærendum aliud triangulum, cuius area ſi auferatur ab aliquo quadrato, reſiduum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Vnde apparet neceſſitas ſecundæ operationis, qua Diophantus huiuſmodi triangulum & quadratum inueſtigat.

Aduerte tertiò ſubtiliter ſingi triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{N}$. vnde fit hypotenuſa 1 Q. + $\frac{1}{Q}$. perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{Q}$. Baſis verò 2. Quare ducto dimidio baſis in perpendiculum fit area 1 Q. − $\frac{1}{Q}$. Quadrati vero latus fingitur 1 N. + $\frac{10}{N}$. Et primò pars illius ponitur 1 N. vt eius quadratus puta 1 Q. elidatur ab 1 Q. qui eſt in area, cùm area ſubtrahetur à quadrato. Deinde pars altera ponitur $\frac{10}{N}$ vt eius quadratus $\frac{100}{Q}$. ſit eiuſdem denominationis cum − $\frac{1}{Q}$. qui repetitur in area, vnde commodiſſimè hic ab illo ſubtrahetur per ſolam additionem 1. ad 100. ob ſigni diuerſitatem, communi retento denominatore, & relinquetur $\frac{101}{Q}$. Quod ſi diuerſi eſſent harum fractionum denominatores facta ſubtractione, relinquerentur vtique cubi, vel quadratoquadrati, vel aliæ poteſtates, à quibus ſeſe expedire difficillimum eſſet. Tertio in hac ſecunda lateris parte ponuntur vnitates 10. duplum ſcilicet dati numeri 5. vt in quadrato reperiantur 20. vnitates duplum ſcilicet ipſius 10. ac proinde quadruplum ad 5. Quare cùm $\frac{101}{Q}$. + 20. debeat ad 5. habere rationem quadrati ad quadratum, ac proinde vno in alterum ducto oporteat gigni quadratum, patet productum ex 20. in 5. eſſe quadratum quia ob rationem quadruplam 20. & 5. ſunt plani ſimiles. Porrò $\frac{505}{Q}$. + 100. (ſeu omnia ducendo in 1 Q. vt tollatur fractio) 505 + 100 Q. nulla ratione poſſet æquari quadrato niſi 100. eſſet quadratus. Vnde colligas in hac ſecunda lateris parte loco 10. poni poſſe quemlibet numerum qui ſit ſemiſſis alterius qui ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Ac proinde ex hoc capite quæſtionem varias recipere ſolutiones. Verbi gratia ponatur latus quadrati 1 N. + $\frac{40}{N}$. fiet quadratus 1 Q. + $\frac{1600}{Q}$. + 80. vnde auferendo aream puta 1 Q. − $\frac{1}{Q}$. remanet $\frac{1601}{Q}$. + 80. qui ad 5. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altero in alterum ducto fit $\frac{8005}{Q}$. + 400. æqualis quadrato, & omnia in 1 Q fit 8005 + 400 Q. æquandus quadrato. Quod facilè fiet, quia 400. eſt quadratus. Denique omiſſam à Diophanto ſolutionem quæſtionis afferre non pigebit. Cùm ſit 1 N. $\frac{24}{5}$. formatur triangulum à $\frac{24}{5}$. & à $\frac{5}{24}$. fitque hypotenuſa $\frac{332401}{14400}$. perpendiculum $\frac{331151}{14400}$. baſis 2. latus autem quadrati eſt $\frac{413}{60}$. quadratus $\frac{170569}{3600}$. vel in eadem denominatione $\frac{682276}{14400}$. Itaque ponantur latera quæſiti trianguli $\frac{332401}{14400}$ N. $\frac{331151}{14400}$. N. 2 N. area adſumens 5. fit $\frac{331151}{14400}$ Q. + 5. æqualis quadrato $\frac{682276}{14400}$ Q. & auferendo vtrimque æqualia, manent $\frac{14045}{576}$. æqualia 5. fitque 1 Q. $\frac{576}{2809}$. At 1 N. $\frac{24}{53}$. Erunt ergo latera quæſiti trianguli $\frac{332401}{31800}$. $\frac{331151}{31800}$. $\frac{48}{53}$. fitque area $\frac{331151}{70225}$. cui addendo 5. fit quadratus $\frac{682276}{70225}$. cuius latus $\frac{826}{265}$.

Quoniam verò hinc fortè venit in mentem Franciſco Vietæ quæſtionem applicari poſſe ſolis numeris, qui è duobus quadratis componuntur, quia Diophantus in ſua hypotheſi ſumpſerat 5. è duobus quadratis compoſitum; quamuis ex ipſo ductu analyſeos Diophantææ ſatis conſtet, ad quemlibet numerum extendi problema, ne quis tamen ſuperſit dubitandi locus, placet id etiam experientia comprobare. Sit ergo inueniendum triangulum, cuius area adſumens 6. qui minimè

compoſitus eſt è duobus quadratis, faciat quadratum, Itaque prius quærendum eſt triangulum, itemque quadratus, vt area trianguli de quadrato ſublata, ſuperſit numerus qui ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Fingatur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. erit vt prius area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. ſit autem latus quadrati 1 N. + $\frac{12}{1N}$. erit quadratus 1 Q. $\frac{144}{1Q}$. + 24. à quo auferendo aream ſupradictam, ſupereſt $\frac{145}{1Q}$ + 24. quo ducto in 6. & omnia ducendo in 1 Q. fit tandem 144 Q. + 870. æqualis quadrato. Fingatur latus illius 12 N. + 10. fiet 1 N. $\frac{77}{24}$. & latus quadrati $\frac{12841}{1848}$. Formetur igitur triangulum ab $\frac{77}{24}$. & $\frac{24}{77}$ & conſtituatur in Numeris, erunt latera illius $\frac{35484817}{3415104}$ N. $\frac{34821265}{3415104}$. N. 2 N. fiet area adſumens 6. $\frac{34821265}{3415104}$ Q. + 6, æqualis quadrato à latere ſuprapoſito, hoc eſt quadrato $\frac{164891281}{3415104}$ Q. vnde tandem fit valor quadrati $\frac{20490624}{130070016}$. vel in minimis $\frac{5929}{37636}$. ac proinde 1 N. eſt $\frac{77}{194}$. per quam reſoluendo hypoſtaſes, inueniuntur latera quæſiti trianguli, nimirum $\frac{2732330909}{662530176}$. $\frac{2681237405}{662530176}$. $\frac{77}{97}$. ſitque area $\frac{206455280185}{128530854144}$. cui addendo 6. fit quadratus $\frac{977640405049}{128530854144}$. cuius latus $\frac{988757}{358512}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Error Vietæ indè haud dubiè oritur. Suppoſuit vir clariſſimus differentiam duorum quadratoquadratorum vt 1 qq. − 1. æquari areæ cui adjiciendo quintuplum quadrati fiat quadratus, ſi 5. numerus datus diuidatur in duos quadratos poterit inueniri quintuplum quadrati à quo demptâ vnitate ſuperſit quadratus.

Ponatur igitur latus quadrati quintuplicandi eſſe 1. N. + 1. aut alius quiuis numerorum numerus + 1. quintuplum quadrati illius erit 5 Q + 10. N. + 5 cui ſi adjicias aream 1 QQ − 1 fiet 1 QQ + 5 Q + 10. N + 4. quæ ſumma debet æquari quadrato, hoc autem non eſt operoſum. Cum numerus vnitatum ex hypotheſi adjectæ problemati ſit quadratus. Non vidit Vieta quæſtionem perinde reſolui poſſe ſi loco 1 QQ − 1 ſumpſiſſet pro area 1 − 1 QQ. eo enim deducenda ſtatim quæſtio vt datus numerus 5 vel 6. vel alius quilibet in quadratum ductus adjectâ vnitate conficiat quadratum quod generaliter eſt facillimum cum vnitas ſit quadratus.

Nos peculiari methodo quæſtionem hanc & duas proximas reſoluimus, cuius beneficio dum quærimus triangulum cuius area vnâ cum 5 v. g. conficiat quadratum triangulum in minimis exhibemus $\frac{3}{1}$ $\frac{40}{3}$ $\frac{41}{3}$ cuius area 20 addito 5 facit quadratum 25. ſed de ratione & vſu noſtræ huius methodi non eſt huius loci plura addere, non ſufficeret ſanè marginis exiguitas, multa enim habemus huc referenda.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus multatus dato numero faciat quadratum. Datus eſto 6. & ponatur triangulum datum ſpecie 3 N. 4. N. 5 N. & ob hypotheſin 6 Q. − 6. æquantur quadrato. Eſto ipſi 4 Q. Et rurſus res eò deducitur, vt inueniendum ſit triangulum rectangulum, & quadratus numerus, quo de area trianguli ſublato, ſi reliquum ſexies ſumatur, fiat quadratus. Formetur rurſus triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. At latus quadrati ſit 1 N. cum defectu fractionis numericæ tot vnitatum, quantus eſt ſemiſſis dati numeri. Hoc eſt $\frac{3}{1N}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{9}{1Q}$. − 6. Hunc ſi ab area detrahamus, hoc eſt ab 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. relinquitur 6 − $\frac{10}{1Q}$. & omnia ſexies, & in 1 Q. ducantur. Fiunt 36 Q. − 60. æquales

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° ς. καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ςς γ. ςς δ. ςς ε. καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν δυ ς. ἴσαι εἰσὶ τετραγώνῳ. ἔστω δυ δ. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἀρθεὶς τετράγωνος, καὶ τὰ λοιπὰ ἑξάκις γινόμενα ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςς α. καὶ ςς^χ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ςς α. λείψει ἀριθμοστῷ μονάδων τοσούτων ὅσων ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστι γ ςς^χ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ α. θ δυ^χ. ⋔ μ° ς. καὶ ἐὰν αὐτὸν ἀφέλω ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, τουτέστιν ἀπὸ δυ α. λείψει α δυ^χ. λοιπὸς γίνεται μ° ς. λείψει ι δυ^χ. καὶ ταῦτα ἑξάκις, καὶ ἐπὶ δύναμιν γίνεται δυ λς,

λείψει μο ξ. ἴσ. τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ς. λείψει μο β. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μο η γ^ων. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ η γ^ων. καὶ γ η^ων. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ λζ. κδ^ων. καὶ εὑρὼν τὸ τρίγωνον τάσσω ἐν ςς^οις. καὶ ἀκολουθήσας τῇ προτάσει, εὑρήσω τὸν ς ῥητὸν, καὶ μένει.

quadrato. Eſto latus eius 6 N. − 2. inuenietur 1 N. $\frac{8}{3}$ Formabitur ergo triangulum à $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$. Eritque quadrati latus $\frac{37}{24}$. & cùm inuenero triangulum, ſtatuam illud in numeris, ſecutuſque propoſitionem, inueniam numerum rationalem. Et conſtat.

IN QVAESTIONEM IV.

EX dictis ad præcedentem, omnia quæ hîc peraguntur fiunt perſpicua. Apparet ſanè fingi quadratum à latere 1 N. − $\frac{3}{N}$. Vt in quadrato reperiantur vnitates − 6. vnde omnia per 6. multiplicando, fiat quadratus 36. Alioquin enim numerus 36 Q. − 60. quadrato æquari non poſſet, ſi 36. non eſſet quadratus. Quamobrem etiam patet, loco ipſius 3. in latere poni potuiſſe quemlibet alium vnitatum numerum, cuius duplum ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Verbi gratia 12. fieretque latus 1 N. − $\frac{6}{N}$. & ſic de alijs.

Porrò non in pigebit tyronum gratiam integram apponere quæſtionis ſolutionem quam prætermiſit Diophantus. Cùm fiat 1 N. $\frac{8}{3}$ & latus quadrati $\frac{37}{24}$. formetur triangulum ab $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$ & latera ſtatuantur in numeris, fient $\frac{4177}{576}$ N. $\frac{4015}{576}$ N. 2 N. Eſt ergo area multata numero 6. $\frac{4015}{576}$ Q. − 6. æqualis quadrato à latere $\frac{37}{24}$ N. puta quadrato $\frac{1369}{576}$ Q. Vnde fit valor quadrati $\frac{64}{49}$. ac proinde valor numeri $\frac{8}{7}$ per quem reſoluendo hypoſtaſes, fiunt quæſiti trianguli latera $\frac{4177}{504}$. $\frac{4015}{504}$. $\frac{16}{7}$. Eſtque area $\frac{4015}{441}$. vnde anferendo datum numerum 6. ſupereſt quadratus $\frac{1369}{441}$. à latere $\frac{37}{21}$.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ἀριθμὸς ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ι. καὶ πάλιν τετάχθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςς γ. ςς δ. ςς ε. γίνεται μο ι. ⋔ δυ ς ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν ποιῶμεν ἴσας δυνάμει τετραγωνικαῖς. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ὅπως ὁ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ δέκατον τετραγώνου. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ α ς^{ου}. καὶ ς α. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ α ς^{ου}. καὶ ςς ε. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου δυ κς. μο ι. ταῦτα δεκάκις, γίνεται δυ σξ. μο ρ. ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ τὰ τέταρτα, γίνονται δυ ξε. μο κε. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μο ε. ςς η. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μο π. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ ὁμοίως τοῖς πρὸ τούτου εὑρήσομεν.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ detractus à dato numero faciat quadratum. Eſto datus 10. & rurſum ſtatuatur triangulum abs 3 N. 4 N. 5 N. fiunt 10 − 6 Q. æquales quadrato, & ſi æquales faciamus numero quadratorum quadrato, eò rurſus deuentum eſt, vt inueniatur triangulum rectangulum & quadratus numerus, ita vt quadratus adſumpto areæ numero faciat decimam partem quadrati. Formetur triangulum abs $\frac{1}{N}$. & 1 N. At quadrati latus eſto $\frac{1}{N}$. + 5 N. & fit compoſitus ex area, & ex quadrato 26 Q. + 10. Hæc decies, fiunt 260 Q. + 100. æqualia quadrato, & quadrans horum 65 Q. + 25. æquatur quadrato. Cujus latus eſto 5 + 8 N. vnde inuenitur 1 N. 80. Ad poſitiones. Et inueniemus vt in præcedentibus.

IN QVAESTIONEM V.

HIC fingens triangulum Diophantus ab 1 N. & $\frac{1}{N}$. ponit hypotenuſam 1 Q. + $\frac{1}{Q}$. At perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{Q}$. baſim 2. vnde fit area 1 Q. − $\frac{1}{Q}$. tum fingit quadratum à latere $\frac{1}{N}$. + 5 N. fitque quadratus $\frac{1}{Q}$ + 25 Q. + 10. cui addendo aream, fit 26 Q. + 10. quo ducto in 10. fit 260 Q. + 100. æquandus quadrato. Vnde patet cur in quadrati latere poſuerit 5. vt ſcilicet in quadrato reperiatur 10. qui ad datum numerum 10. ſit in ratione quadrati ad quadratum. Fecit autem idem latus $\frac{1}{N}$. + 5 N. non ſicut in præcedentibus 1 N. + $\frac{1}{N}$. vt latera & aream trianguli retineret eadem quæ prius. Nam ſi poſuiſſet latus quadrati 1 N. + $\frac{5}{N}$. ponendum fuiſſet

perpendiculum

perpendiculum trianguli [illegible] — 1 Q. vt etiam area fieret [illegible] — 1 Q. res tamen æquè benè ſuccederet, & inueniretur 1 N. [illegible] alter ſcilicet numerorum, à quo formari debet triangulum, cùm per operationem Diophanti alter reperiatur puta 80. Omiſit autem hîc etiam Diophantus integram quæſtionis ſolutionem labori ſe ſubtrahens, ob moleſtas fractiones; ſed hunc laborem ſuſcipere non grauabimur. Cùm 1 N. ſit 80. & latus quadrati [illegible]. formetur triangulum abs 80. & $\frac{1}{80}$ & ſtatuantur latera in numeris, fient [illegible] N. [illegible] N. 2 N. fitque area [illegible] Q. qua detracta de numero 10 fit 10 — [illegible] Q. æqualis quadrato, eſto quadrato à latere [illegible] N. puta quadrato [illegible] Q. fient tandem 10. æquales [illegible] Q. vnde fit valor quadrati [illegible] ſeu in minimis [illegible] vnde 1 N. eſt [illegible]. Ad poſitiones erunt latera quæſiti trianguli. [illegible], [illegible]. [illegible] eſt area [illegible] qua detracta de 10. remanet quadratus [illegible] à latere. [illegible]

Non adeo moleſtos numeros habebimus ſi numeri 65 Q. + 25. latus ſtatuamus 5 + 5 N. Nam fiet 1. N. $\frac{5}{4}$. latus quadrati $\frac{45}{4}$. Quare formabitur triangulum à [illegible] & [illegible] eruntque latera in Numeris [illegible] N. [illegible] N. 2 N. & area detracta de 10. fit 10. — [illegible] Q. æqualis quadrato [illegible] Q. vnde fit tandem 1 Q. [illegible] At 1 N. [illegible] per quem reſoluendo hypoſtaſes, fiunt latera trianguli quæſiti [illegible], [illegible], [illegible] Area eſt in minimis [illegible] quam auferendo à 10. remanet quadratus [illegible] à latere [illegible].

QVÆSTIO VI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſumens vnum laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 7. ſtatuatur rurſus triangulum datum ſpecie 3 N. 4 N. 5 N. & fiunt 6 Q. + 3 N. æquales 7. & oportet ſemiſſem numerorum in ſe ductum adſumere quadratos per 7. multiplicatos, & facere quadratum. Non facit autem. Oportet igitur inuenire triangulum rectangulum, vt quadratus ſemiſſis vnius laterum circa rectum adſumens ſeptuplum areæ, faciat quadratum. Eſto vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fiunt $3\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quater, fiunt 14 N. + 1. æqualia quadrato. Vt autem etiam triangulum rectangulum rationale conſtituamus, oportet, & 1 Q. + 1. æquari quadrato. Horum interuallum eſt 1 Q. — 14 N. menſuratio 1 N. ſecundum 1 N. — 14. Iſtorum interualli ſemiſſis in ſe facit 49. quod æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{24}{7}$. Ad poſitiones. Pono igitur vnum laterum circa rectum trianguli $\frac{24}{7}$. alterum 1. & omnia ſepties & in numeris, fiet illud 24 N. hoc verò 7 N. At hypotenuſa 25 N. & fit area adſumens latus ſecundum 84 Q. + 7 N. Hoc æquatur 7. vnde 1 N. inuenitur $\frac{1}{4}$. ſuntque latera trianguli 6. $\frac{7}{4}$. & $\frac{25}{4}$. & conſtat.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ προσλαβὼν τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ζ̄. τετάχθω πάλιν ὁ τρίγωνος δεδομένος τῷ εἴδει ςς γ̄. ςς δ̄. ςς ε̄. καὶ γίνονται δυ ς̄. ςςοὶ γ̄. ἴσοι μο ζ̄. καὶ δεῖ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἡμίσεος ἐφ' ἑαυτὸν προστεθῆναι ταῖς δυνάμεσιν ἑπτάκις γενομέναις καὶ ποιεῖν τετράγωνον. οὐ ποιεῖται δέ, ὥστε δεῖ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, προσλαβὼν τὸν ἑπταπλάσιον τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ μο ᾱ. καὶ γίνονται ἀριθμοὶ γ̄ L'. μο ᾱ δ^x. καὶ πάντα τετράκις γίνονται ςςοὶ ιδ̄ μο ᾱ· ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὸν κατασκευάσωμεν δεῖ καὶ δύναμιν ᾱ μονάδα ᾱ. ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ γίνεται δυ ᾱ λείψει ςς ιδ̄. ἡ μέτρησις ἀριθμοῦ ᾱ καὶ ςς ᾱ λείψει μο ιδ̄. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μο μθ̄. ἴσαι τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κδ̄ ζ^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. τάσσω οὖν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ τριγώνου κδ̄ ζ^x. τὴν δὲ ἑτέραν μο ᾱ. καὶ πάντα ἑπτάκις καὶ ἐν ἀριθμοῖς γίνεται ἡ μὲν ἀριθμῶν κδ̄. ἡ δὲ ἀριθμῶν ζ̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἀριθμῶν κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυ πδ̄ ςςοὶ ζ̄. ταῦτα ἴσα μο ζ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκεται α δ^x. αἱ γ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μο ς̄. μο ζ δ^x μο κε̄ δ^x. καὶ μένει.

OBSERVATIO D. P. F.

Haec propoſitio & ſequentes aliter fieri poſſunt fingatur triangulum in hac propoſitione abs dato numero & vnitate & plana lateribus ſimilia applicentur ad ſummam vnitatis & numeri dati, orietur quæſitus triangulus.

IN QVAESTIONEM VI.

HIc deuenitur ad regulas compoſitas, vt liquet tum ex prima operatione, in qua 6 Q. + 3 N. æquantur 7. tum ex ſecunda, in qua 84 Q. + 7 N. æquantur 7. has autem æquationes reſoluit Diophantus modo ſibi familiari quem explicauimus ad trigeſimam tertiam primi, ſumendo ſcilicet quadratum ſemiſſis numeri Numerorum, (qui numerus eſt vnum laterum circa rectum ſumpti trianguli) & huic quadrato addendo productum ex dato numero 7. in numerum quadratorum, qui eſt numerus areæ. Quamobrem rectè infert. Inueniendum eſſe triangulum, vt quadratus ſemiſſis vnius laterum circa rectum, adſumens ſeptuplum areæ; faciat quadratum. Huius trianguli latera circa rectum ingenioſè ponuntur 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cuius ſeptuplum 3 $\frac{1}{2}$ N. cui addendo quadratum ſemiſſis ſecundi lateris, fit 3 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato, & omnia in 4. ad tollendas fractiones, fit 14 N. + 1. æqualis quadrato. Porrò vt tria latera trianguli ſint rationalia, cum latera circa rectum poſita ſint 1 N. & 1 oportet vt eorum quadrati ſimul faciant quadratum hypotenuſæ. Quare oportet vt 1 Q. + 1. ſit æqualis quadrato. Iam ergo duplicata occurrit æqualitas, cùm æquandi ſint quadrato tum 14 N. + 1. tum 1 Q. + 1. Reliqua ſunt manifeſta. Cur in lemmatis ſolutione adiiciantur denominatores, ratio eſt quia inuento triangulo ſoluente lemma propoſitum, ſi ſumatur quodlibet aliud ſimile, id æquè benè propoſito ſatisfaciet, vt demonſtrare in promptu eſt. Sint A B latera circa rectum trianguli rectanguli, & ſit D. quadratus ſemiſſis ipſius A. ſitque E area trianguli, & datus numerus C. quo ducto in E fiat F. additiſque ſimul F D. fiat G. quadratus. Tum ſumantur H K latera circa rectum alterius trianguli ſimilis priori, cuius area ſit M. qua ducta in C. fiat N. & ſit L. quadratus ſemiſſis ipſius H. additiſque L N. fiat P. dico P. eſſe quadratum. Quia enim vt A ad H. ſic eſt ſemiſſis ipſius A. ad ſemiſſem ipſius H. [1] At quadrati D L. ſunt in duplicata ratione laterum, patet D ad L. duplicatam eſſe rationem rationis A ad H. [2] ſed & ob ſimilitudinem triangulorum area E ad aream M. eſt in duplicata ratione lateris A ad latus H. eſt ergo D ad L. vt E ad M. Quia verò idem C ductus in E & in M. producit F & N. [3] eſt F ad N. vt E ad M. ergo eſt etiam F ad N. vt D ad L. Quamobrem [4] & antecedentium ſumma puta G. eſt ad ſummam conſequentium P. ſicut vnus antecedentium D ad vnum conſequentium L. ſed D L ſunt quadrati. Ergo G ad P. habet rationem quadrati ad quadratum, [5] ac proinde cùm G ſit quadratus ex hypotheſi, erit & P. quadratus. Quod erat demonſtrandum.

F 2352. G 2401.
D 49. E 336.
A 14. B 48.
C 7
H 28. K 96.
L 196. M 1344.
N 9408. P 9604.

11. octaui.
2. 3. Porif.
17. ſeptimi.
12. ſeptimi
24. octaui.

Facile quoque eſt examinare an numeri à Diophanto inuenti ſoluant quæſtionem ſunt enim latera trianguli 6. $\frac{7}{4}$. $\frac{25}{4}$. eſt autem area $\frac{21}{4}$. cui ſi addas alterum latus, puta $\frac{7}{4}$. fit vtique præſcriptus numerus 7.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ζ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ προσλαβὸν τὸν ἑπταπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εὕρηται, ὁ ἐν ζ. κε. τάσσω οὖν ἐν ςςοῖς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν λείψας τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γίνονται δυνάμεις πδ. λείψει ἀριθμῶν ζ. ταῦτα ἴσα μο ζ. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ ζ^{ον}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus vno laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 7. Et rurſum ſi ſtatuamus triangulum datum ſpecie, res eò deducitur vt inueniendum ſit triangulum rectangulum, vt vnius laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſeptuplum areæ faciat quadratum. Et inuentum eſt, nempe 7. 24. 25. ſtatuo ergo in numeris, & area multata vno laterum circa rectum facit 84 Q − 7 N. Hæc æquantur 7. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$ Ad poſitiones.

OBSERVATIO D. P. F.

Fingatur triangulum abs dato numero & vnitate & plana lateribus ſimilia applicentur ad differentiam dati numeri & vnitatis, hac quæſtio per viam quâ hujuſmodi duplicatas æqualitates infinitis modis reſoluimus infinitas recipit ſolutiones. Modum autem quo vtimur tetigimus & explicauimus infra ad quæſtionem 24.

Imò & ſolutiones illæ infinitæ aptantur 4. Sequentibus quæſtionibus, quod nec Diophantus nec Bachetus animaduertit. Cur autem neque Diophantus neque Bachetus ſequentem quæſtionem addiderunt? Inuenire triang. rectang. vt vnum ex lateribus areâ multatum faciat datum numerum. Certè hanc videntur ignoraſſe quia non ſtatim ſe prodit in reſolutione duplicatæ æqualitatis. Verum ex noſtrâ methodo facilè poteſt inueniri, ſimiliter in ſequentibus quæſtionibus tertius hic caſus ſuppleri poteſt.

IN QVAESTIONEM VII.

EX dictis ad præcedentem hîc omnia fiunt manifeſta, cùm ab eodem lemmate pendeat ſolutio quæſtionis. Fit autem 1 N. $\frac{1}{3}$. ac proinde quæſiti trianguli latera ſunt $\frac{7}{3}$. 8. $\frac{25}{3}$. Area eſt $\frac{28}{3}$. vnde ſi auferas alterum latus, puta $\frac{7}{3}$. remanet vtique datus numerus 7.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt area adſumens vtrumque laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſum ſtatuatur triangulum datum ſpecie. Et rurſum eo res deducitur vt inueniatur triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum. Ponamus denuo vnum laterum circa rectum 1 N, alterum 1. & fit vt quæramus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualia quadrato, & omnia quater. Fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquale quadrato. Sed & 1 Q. + 1. æquari debet quadrato. Horum interuallum eſt 14 N. menſuratio 2 N. ſecundum 7. Iſtorum interualli ſemiſſis in ſe facit 1 Q. + 12 $\frac{1}{4}$ − 7 N. æquale 1 Q. + 1. & fit 1 N. $\frac{45}{28}$. eſt ergo triangulum $\frac{45}{28}$. 1. & $\frac{53}{28}$. & omnia per 28. fit igitur triangulum 45 N. 28 N. 53 N. & fit area adſumens vtrumque latus circa rectum 630 Q. + 73 N. quod æquatur 6. & fit 1 N. rationalis. Ad poſitiones.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέραις τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ϛ. καὶ πάλιν τετάχθω δεδομένος τῷ εἴδει, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ μετὰ τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. καὶ πάλιν ὑποκείσθω μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς α. ἡ δὲ ἑτέρα μο α. καὶ γίνεται ζητεῖν δυ α δ^x. ςς ζ ς^x. μο α δ^x. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις, γίνεται δύναμις α. ςς ιδ. μο α. ἴση τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ ςς ιδ. ἡ μέτρησις ςς β. καὶ μο ζ. τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται δύναμις α. μο ιβ. α δ^x. λείψει ἀριθμῶν ζ. ἴσοι δυνάμει α. μο α. καὶ γίνεται ὁ ς μο με κη^x. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον μο με κη^x. μο α. μο νγ κη^x. καὶ πάντα εἰς κη. γίνεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀριθμῶν με. ἀριθμῶν κη. ἀριθμῶν νγ. καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν μετὰ συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυνάμεων χλ. ἀριθμῶν ογ. ἴσα μο ϛ. καὶ γίνεται ὁ ς ῥητός. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM VIII.

RVRSVS ex adnotatis ad ſextam, operationis Diophanti ratio ſatis innoteſcit, ne tamen illius breuitas, tyronibus pariat obſcuritatem, age paulò fuſius eam explicemus. Quærentes triangulum, vt quadratus ſemiſſis ſummæ laterum adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum poſuimus latera circa rectum 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cujus ſextuplum 3 N. At ſemiſſis ſummæ ſuprapoſitorum laterum eſt $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. cuius quadratus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo 3 N. fit $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quadruplicando fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquandus quadrato. Sed etiam vt hypotenuſa ſit rationalis oportet 1 Q. + 1. æquari quadrato. Ergo duplicata occurrit æqualitas. Interuallum itaque numerorum eſt 14. N. & numeri quorum mutuo ductu id fit ſumuntur 2 N. & 7. cautè, qualia multa fieri animaduertimus paſſim libro tertio. vnde tandem fit 1 N. $\frac{45}{28}$. alterum laterum circa rectum, nam alterum poſitum eſt 1. Quare hypotenuſa erit $\frac{53}{28}$. & abiectis denominatoribus conſtituitur triangulum ſpecie, 45 N. 28 N. 53 N.

fitque area 630 Q. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit 630 Q. + 73 N. æqualis 6. vnde fit 1 N. $\frac{1}{18}$. ſunt ergo latera circa rectum quæſiti trianguli $\frac{14}{9}$. & $\frac{15}{6}$. hypotenuſa $\frac{53}{18}$. vnde fit area $\frac{105}{54}$. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit $\frac{324}{54}$. ſeu 6. vt requirebatur.

QVAESTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς ϛ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει, γίνεται ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὼν τὸν ἑξαπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ ἔστιν κη. μα. νγ. τάσσω οὖν αὐτὰ ἐν ἀριθμοῖς. καὶ πάλιν γίνεται δυνάμεις χλ. λείψει ϛϛ ογ. ἴσαι μο ϛ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μο ϛ. λε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus ſumma laterum circa rectum faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſus ſi ſtatuamus quæſitum triangulum datum ſpecie, fit vt quærendum ſit triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ, faciat quadratum. Hoc autem iam antè eſt demonſtratum, & eſt 28. 45. 53. Pono itaque hæc in numeris, & fit tandem 630 Q. − 73 N. æquale 6. vnde inuenitur 1 N. $\frac{6}{35}$. Ad poſitiones.

OBSERVATIO D. P. F.

Addi poteſt ex noſtra methodo ſequens quæſtio; Inuenire triangulum rectangulum vt ſumma laterum multata areâ conficiat datum numerum.

IN QVAESTIONEM IX.

EX præcedentium explicatione, ſatis hæc fit dilucida. Integram ſolutionem omiſit Diophantus, quæ talis eſt. ſit 1 N. $\frac{6}{35}$. Quare latera quæſiti trianguli reperiuntur $\frac{24}{5}$ $\frac{54}{7}$ & $\frac{318}{35}$. Area verò eſt $\frac{648}{35}$. vnde ſi detrahas ſummam laterum circa rectum, remanet $\frac{210}{35}$. ſeu 6. vt poſtulabatur.

QVAESTIO X.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ, τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο δ. καὶ πάλιν τάξομεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὼν τὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλασίονα, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ϛ α. καὶ ἀπὸ ϛ α. μο α. καὶ ποιεῖ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ δδ α κυ δ. δυ ϛ. ϛϛ δ. μο α. ὁ δὲ τετραπλασίων τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ κυ η. δυ ιβ. ϛϛ δ. ὥστε δεῖ ζητεῖν δδ α. κυ ιβ. δυ ιη. ϛϛ η. μο α. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δυ α. ϛϛ ϛ. λείψει μο α. καὶ γίνεται ὁ ϛ ε δ. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ε δ. καὶ θ δ. καὶ ἅπαντα τετράκις πλα-

INVENIRE triangulum rectangulum vt areæ numerus adſumens ſummam hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 4. Rurſus ſtatuemus triangulum datum ſpecie, & eo reducimur, vt inueniamus triangulum rectangulum, vt numerorum hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum ſummæ ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. & ſummæ hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum ſemiſſis in ſe, fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. Quadruplum autem areæ eſt 8 C. + 12 Q. + 4 N. Itaque oportet quærere 1 QQ. + 12 C. + 18 Q. + 8 N. + 1 æqualia quadrato. Eſto latus eius 1 Q. + 6 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. formabitur ergo trian-

gulum abs $\frac{5}{4}$. & $\frac{9}{4}$. & omnia quater. Formabitur rurſum triangulum a 9. & 5. & ſumens minima ſimilium, ſtatuo ipſum in numeris, fit 28 N. 45 N. 53 N. Et eſt numerus areæ adſumens ſummam hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum 630. Q. + 81 N. æqualis 4. & fit 1 N. $\frac{4}{105}$. Ad poſitiones.

διάσσεται πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ θ. καὶ ε. καὶ λαβὼν τὰ ἐλάσσονα τῶν ὁμοίων τάσσω αὐτὸ ἐν ςς^{οῖς}. γίνεται ςς κη. ςς με. ςς νγ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυ χλ ςς πα. ἴσος μο δ. καὶ γίνεται ὁ ς δ ρε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM X.

IMPRIMIS monendus eſt lector, hanc & ſequentem propoſitionem in codice Xilandri malè ordinem immutare, cùm ſequens ſtatuatur ibi decima, & hæc vndecima. Rectius in codice regio ſuum quemque obtinet locum, in quo vno codex ille nobis hucuſque fuit auxilio, in reliquis omnibus nimis infeliciter cum codice Xilandri conſentiens. Sed & euidens eſt Diophantum in ſequente quæſtione vndecima, ſupponere totam fere decimæ huius conſtructionem, vt de harum propoſitionum ordine nullus ſuperſit dubitandi locus. Hic porro cùm inueniendum ſit triangulum, vt quadratus ſemiſſis compoſiti ex hypotenuſa, & ex altero laterum circa rectum, adſumens quadruplum areæ faciat quadratum, formatur triangulum ab 1 N. & ab 1 N. + 1. fitque hypotenuſa 2 Q. + 2 N. + 1. baſis 2 N. + 1. perpendiculum 2 Q. + 2 N. Area verò eſt 2 C. + 3 Q. + 1 N. cuius quadruplum 8 C. + 12 Q. + 4 N. ſumma autem hypotenuſæ & baſeos eſt 2 Q. + 4 N. + 2. cuius ſemiſſis 1 Q. + 2 N. + 1. cuius quadratus fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. cui addendo quadruplum areæ, fit 1 QQ. + 12 C. + 18 Q. + 8 N. + 1. æquandus quadrato. Huius autem latus cur ponatur à Diophanto 1 Q. + 6 N. − 1. ſatis ſuperque docuimus ad vigeſimam nonam quarti, nimirum hac ratione tolluntur quadratoquadrati, cubi & vnitates, manetque æquatio inter duas proximas ſpecies quadratos & numeros. Nam fiunt 16 Q. æquales 20. N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Quare formandum eſt triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{9}{4}$ & omnia per 4. multiplicando, fingitur triangulum à 5. & 9. ſuntque latera 106. 56. 90. quæ diuidendo per 2. vt habeatur nimirum triangulum eiuſdem ſpeciei in integris, fiunt 53. 28. 45. cuius rei ratio ex demonſtratis ad ſextam ſatis liquet. Ponuntur ergo latera quæſiti trianguli 53 N. 28. N. 45 N. & eſt area 630 Q. cui addendo ſummam hypotenuſæ 53 N. & lateris 28 N. fit 630 Q. + 81 N. æqualis 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{105}$, per quem reſoluendo hypoſtaſes, fiunt latera quæſiti trianguli $\frac{212}{105}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{12}{7}$. Area eſt $\frac{96}{105}$. cui ſi addas ſummam hypotenuſæ & primi lateris fit $\frac{420}{105}$. ſeu 4. vt requirebatur.

Cæterùm eodem prorſus artificio ſoluetur quæſtio quæ à Diophanto prætermiſſa eſt, cùm tamen ad hanc tractationem pertineat nimirum.

Inuenire triangulum rectangulum, vt areæ numerus adſumens hypotenuſam datum faciat numerum. Eſto datus 4.

Patet quærendum prius triangulum, vt quadrato ſemiſſis hypotenuſæ addendo quadruplum areæ, fiat quadratus. Fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. erit ſemiſſis hypotenuſæ 1 Q. + 1 N. + $\frac{1}{2}$. cujus quadratus 1 QQ. + 2 C. + 2 Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo quadruplum areæ, puta 8 C. + 12 Q. + 4 N. fit 1 QQ. + 10 C. + 14. Q. + 5 N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato. Ponatur latus illius 1 Q. + 5 N. − $\frac{1}{2}$. fient tandem 10 N. æquales 10. Q. Quare 1 N. eſt 1. & fingendum eſt triangulum ab 1. & à 2. fiuntque latera 5. 3. 4. quæ ſi ſtatuantur in numeris, fiet area cum hypotenuſa 6 Q. + 5 N. æqualis 4. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. ſunt ergo quæſiti trianguli latera 2 $\frac{1}{2}$. 2. 1 $\frac{1}{2}$. fitque area 1 $\frac{1}{2}$. cui ſi addas hypotenuſam fit numerus 4. vt poſtulabatur.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus ſumma hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 4. Rurſum ſi ſtatuamus triangulum datum ſpecie, eò ducimur vt inueniamus triangulum rectangulum, vt quadruplum areæ additum quadrato ſemiſſis

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐκ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μονάδες δ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τετράκις γενόμενος πρὸς συναμ-

φοτέρων τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιῇ τετράγωνον. καὶ δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν κη. με. νγ. τάσσω αὐτὸν ἐν ἀριθμοῖς καὶ γίνονται δυνάμεις χλ. λείψει ἀριθμῶν πα. ἴσαι μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ϛ'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

ſummæ ex hypotenuſa, & altero laterum circa rectum, faciat quadratum, & demonſtratum eſt eſſe 28. 45. 53. Pono illud in numeris, & fiunt 630 Q. − 81 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{6}$. Ad poſitiones.

IN QVAESTIONEM XI.

HVIVS quæſtionis ſolutio pendet omnino à lemmate ad præcedentem aſſumpto. Nam Inuento triangulo vt quadruplum areæ additum quadrato ſemiſſis compoſiti ex hypotenuſa & altero laterum, faciat quadratum, conſtituitur in Numeris, puta 53 N. 28 N. 45 N. & fiunt tandem 630 Q. − 81 N. æquales 4. vnde 1 N. fit $\frac{1}{6}$. Quare quæſiti trianguli latera reperiuntur $\frac{53}{6}$ $\frac{14}{3}$. $\frac{45}{6}$. Area eſt $\frac{105}{6}$ vnde auferendo ſummam hypotenuſæ & baſeos, puta $\frac{81}{6}$. remanet $\frac{24}{6}$. ſeu 4. vt poſtulabatur.

Eodem etiam artificio ſoluetur hæc quæſtio.

Inuenire triangulum rectangulum, vt area, detracta hypotenuſa, faciat datum numerum.

Datus eſto 4. Quæretur triangulum, vt prius, vt quadruplum areæ additum quadrato ſemiſſis hypotenuſæ, faciat quadratum, quale inuentum eſt ad præcedentem 5. 4. 3. ſtatuatur ergo in Numeris, & ſint quæſiti trianguli latera 5 N. 4 N. 3 N. fient ergo 6 Q. − 5 N. æquales 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Ad hypoſtaſes. Sunt quæſiti latera trianguli $\frac{20}{3}$. 4. $\frac{16}{3}$. Eſtque area $\frac{32}{3}$. vnde ſi auferas hypotenuſam, remanet $\frac{12}{3}$ ſeu 4. vt poſtulabatur.

OBSERVATIO D. P. F.

Addi poteſt ex noſtra methodo ſequens quæſtio; Inuenire triangulum rectangulum vt ſumma hypotenuſæ & alterius lateris circa rectum multata areâ faciat datum numerum imo & ſequens addi poteſt Bacheti commentarijs; Inuenire triangulum vt hypotenuſa detractâ areâ faciat datum numerum.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ ὁ ἐν τῇ μείζονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ τῆς ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τρίγωνος ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, καὶ ὑποκείσθω ἡ μείζων τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γινομένη ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν. δεῖ οὖν εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. καὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἐν πᾶσι δυσὶν ἀριθμοῖς, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ᾖ διπλασίων. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ α. καὶ ἀριθμῶν β. καὶ λύεται δύο τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν ζητοῦμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μετὰ τῆς ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυναμοδυνάμεις ϛ. δυνάμεις γ. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν, γίνεται δυνάμεις ϛ. μονάδες γ. ἴσαι τετραγώνῳ. ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἓξ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι μετὰ μονάδων γ. ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὲ ἡ μονὰς α. καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. ὥστε τὸ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt & interuallum laterum circa rectum, & ipſum maius latus, ſit quadratum. Et præterea area cum minore laterum circa rectum, faciat quadratum. Formetur triangulum à duobus numeris, & ſupponatur maius laterum circa rectum fieri ex duplo producti multiplicationis ipſorum. Oportet ergo inuenire duos numeros, vt duplum multiplicationis eorum ſit quadratus, & exceſſus dupli multiplicationis eorum ſuper interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, faciat quadratum. Hoc autem accidit duobus quibuſuis numeris, quando maior minoris eſt duplus. Formetur ergo triangulum abs 1 N. & 2 N. & ſatisfit duabus propoſiti partibus. Supereſt vt videamus an area trianguli cum minore laterum circa rectum faciat quadratum fit autem 6 QQ. + 3 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur. Fiunt 6 Q. + 3. æqualia

quadrato. Quæremus igitur aliquem numerum, cuius ſex quadrati adſumpto ternario faciant quadratum. Hujuſmodi autem eſt 1. & alij infiniti numeri. Ergo quæſitum triangulum rectangulum formabitur ab 1. & 2.

ζητούμενον ὀρθογώνιον ἔσται πλασμένον ἀπὸ μο α. καὶ μο β.

Lemma.

Duobus datis numeris, quorum ſumma ſit quadratus. Inuenientur infiniti quadrati, quorum quilibet ductus in vnum datorum & adſumens alterum, faciet quadratum. Sint duo dati numeri 3. & 6. & oporteat inuenire quadratum, qui ductus in 3. & adſumens 6. faciat quadratum. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. & fiunt 3 Q. + 6 N. + 9. æqualia quadrato, & ſolui poteſt infinitis modis, quia vnitates ſunt quadratæ. Eſto igitur latus quadrati 3 − 3 N. & fit 1 N. 4. erit igitur quadrati latus 5. & alij infiniti inuenientur.

Λῆμμα.

Δύο δοθέντων ἀριθμῶν ὧν τὸ σύνθεμα ποιῇ τετράγωνον. εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι, ὧν ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο ὅ τε γ. καὶ ὁ ϛ. καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν τετράγωνον. ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν γ. καὶ προσλαβὼν τὸν ϛ. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος. δυ α. ϛϛ β. μο α. καὶ γίνονται δυ γ. ϛϛοι ϛ. μο θ. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ δυνατόν ἐστι ἀπειραχῶς εὑρεῖν διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικάς. ἔστω οὖν τὸ ἀπὸ πλευρᾶς μο γ. λεῖψει ϛϛ γ. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο δ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μο δ. καὶ ἕτεροι ἄπειροι εὑρίσκονται.

IN QVAESTIONEM XII.

SVPPONIT inprimis Diophantus huiuſmodi Theorema.

Si fuerint duo numeri in proportione dupla, tam duplum producti eorum multiplicatione, quam exceſſus eiuſdem dupli producti ſuper interuallum quadratorum, quadratus eſt.

Quod ita demonſtratur. Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum G. dico tum duplum producti ex A in B. tum exceſſum eiuſdem dupli producti ſuper G. eſſe quadratum, etenim quia B eſt duplus ad A patet D eſſe quadruplum ipſius C. eo quod quadrati ſunt in duplicata ratione laterum. Sed productum ex A in ſuum duplum B æquatur duplo quadrati ipſius A. ac proinde duplum producti ex A in B. æquatur quadruplo quadrati ipſius A. hoc eſt quadruplo ipſius C. Igitur quadratus D. eſt duplum producti ex A in B. Quod erat primo probandum. Deinde patet ex hypotheſi exceſſum D ſuper G eſſe ipſum quadratum C. Quare ex omni parte conſtat propoſitum. Idcirco Diophantus fingit triangulum ab 1 N. & 2 N. vt duabus propoſiti partibus ſatisfiat; nam latera circa rectum ſunt 4 Q. & 3 Q. quorum maius eſt quadratus vt patet; exceſſus verò illius ſuper minus, eſt etiã quadratus puta 1 Q. Reſtat ergo vt area minore latere adſumpto faciat quadratum, facit autem 6 QQ. + 3. Q. æquale quadrato, & omnia per 1 Q. diuidendo, fit 6. Q. + 3. æquandus quadrato.

A 3. B 6.
C 9. D 36.
G 27.

Hìc ſanè Diophantus non vſitata prius ratione, quadrato æquat numerum ex duabus ſpeciebus non proximis compoſitum, quales ſunt quadrati & vnitates, quamuis neutra ipſarum numero exprimatur quadrato. Vt autem hoc fieri poſſit, quærendus eſt quadratus quo per 6. multiplicato, & producto addendo 3. fiat quadratus. Quod quidem poſſibile eſt, quia 6. & 3. ſimul conficiunt quadratum, & res abſoluitur per aſſumptum lemma. Quia verò vnitas quadratus eſt, & non mutat numerum quem multiplicat, ſequitur ex eo quod 6. & 3. conficiunt quadratum 9. vnitatem ſumi poſſe loco quadrati quæſiti. Vnde fit etiam 1 N. 1. Quamobrem fingitur triangulum ab 1. & 2. & fiunt latera 5. 4. 3. quæ ſoluunt quæſtionem.

Porrò facilè eſt auxilio lemmatis aſſumpti alias reperire ſolutiones. Ponamus enim quadratum quæſitum 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 6. & producto addendo 3. fit vtique 6 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus cùm infinitis modis fingi poſſit, quia vnitatum numerus quadratus eſt, patet infinitas reperiri poſſe ſolutiones. Verbi gratia ponatur latus hoc 3 − 3 N. fiet 1 N. 10. Quamobrem quæſitus quadratus eſt 121. quo ducto in 6. fit 726. cui addendo 3. fit 729. quadratus

à latere 27. Quare ſi 6 Q. + 3. æquemus quadrato 729. fiet 1 N. 11. Ac proinde fingatur triangulum ab 11. & 22. eruntque latera 605. 484. 363. quæ ſoluunt quæſtionem, nam maius laterum circa rectum puta 484. eſt quadratus à latere 22. & illius exceſſus ſuper 363. eſt 121. quadratus à latere 11. Area verò addito minore latere facit 88209. quadratum à latere 297. Itaque notandus eſt modus iſte, quo æquabimus quadrato quemlibet quadratorum & vnitatum numerum, quamuis neuter ſit quadratus, dummodo vterque ſimul conficiat quadratum.

Et vt aliquid addamus Diophanto, aio æquationem quoque explicari poſſe quamuis quadratorum, & vnitatum numeri ſimul non conficiant quadratum, dum reperiatur quadratus aliquis qui ducto in numerum quadratorum, & producto addendo numerum vnitatum fiat quadratus, quod ſanè perficiemus per huiuſmodi lemma.

Datis duobus numeris, ſi altero per quadratum multiplicato, altero ad productum addito fiat quadratus, inuenientur alij quadrati idem præſtantes.

Sint dati 5. & 16. Nam ducto quadrato 4. in 5. & producto addendo 16. fit quadratus 36. Quærendus ergo eſt alius quadratus quàm 4. qui hoc idem præſtet. Eſto latus illius 2 + 1 N. fiet quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 36 + 20 N. + 5 Q. æqualis quadrato. Hic autem infinitæ dari poſſunt ſolutiones, quia vnitatum numerus eſt quadratus. Fingatur verbi gratia latus huius quadrati 6 − 3 N. fiet 1 N. 14. eritque quæſiti quadrati latus 16. ipſe quadratus 256. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 1296. quadratus à latere 36.

Immò quod de multiplicatione dictum eſt, intelligendum quoque de diuiſione, & ſcias eadem arte ſolui huiuſmodi lemma.

Datis duobus numeris, ſi altero per quadratum diuiſo, & altero ad quotientem addito fiat quadratus, inuenientur alij infiniti quadrati idem præſtantes.

Sint dati numeri 96. & 12. Nam diuiſo 96. per quadratum 4. fit quotiens 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quærendus ergo alius quadratus quàm 4. qui præſtet idem ponatur eius latus vt prius 2 + 1 N. erit quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{96}{4 + 4 N + 1 Q}$. & huic addendo 12. fit $\frac{144 + 48 N + 12 Q}{4 + 4 N + 1 Q}$. æqualis quadrato. Eſt autem denominator quadratus. Quare ſupereſt vt numerator 144. + 48 N. + 12 Q. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia 144 eſt quadratus, & fingetur latus illius 12 − 6 N. & fiet 1 N. 8. Quare latus quæſiti quadrati eſt 10. ipſe quadratus 100. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{24}{25}$. cui addendo 12. fit $\frac{324}{25}$. quadratus à latere $\frac{18}{5}$. Quòd autem 144. neceſſariò ſit quadratus, patet, ex eo quòd 144. fit addendo ad 96. productum ex 4 in 12. Quare cùm ex hypotheſi 24. & 12. ſimul faciant quadratum 36. ſi vterque per aliquem quadratum multiplicetur, erit & ſumma productorum quadratus. Atqui ducto 4. in 24. fit 96. & ducto eodem 4. in 12. fit 48. Igitur ſumma ipſorum 96. & 48. puta 144. quadratus eſt, ille ſcilicet qui fit ducto 4. in 36.

Hoc autem lemmate mirificè iuuatur operatio Diophanti, quæ aliter fortuita videatur. Nam ſi finxiſſet triangulum ab aliquibus alijs numeris in ratione dupla conſtitutis, puta à 2 N. & 4 N. fuiſſent latera 20 Q. 16 Q. 12 Q. vbi laterum quidem circa rectum interuallum, itemque maius ipſorum, quadratus eſt, ſed area minore aſſumpto. Fit 96. QQ + 12 Q. & omnia diuidendo per 1 Q. fit 96 Q. + 12. æqualis quadrato. Atqui 96. & 12. ſimul non conficiunt quadratum. Quare per ea quæ tradit author, non conſtat quomodo 96 Q. + 12. poſſit æquari quadrato, & eius lemma hîc vſui eſſe non poteſt. Per noſtrum autem lemma facilè res expedietur, nam ſi diuidas 96. per quadratum 4. fit 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quare per allatum lemma inuenientur infiniti quadrati ab ipſo 4. diuerſi qui præſtabunt idem, & infinitas exhibebunt ſolutiones. Nam inuento verbi gratia quadrato 100. per quem diuidendo 96. fit $\frac{24}{25}$. quo addito ad 12. fit quadratus $\frac{324}{25}$. æquabimus 96 Q. + 12. quadrato $\frac{324}{25}$. vnde fiet 1 N. $\frac{1}{10}$. Quare formabitur triangulum ab $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{5}$. & erunt latera circa rectum $\frac{3}{25}$. $\frac{4}{25}$. quorum maius, itemque interuallum ipſorum quadratus eſt. Area verò eſt $\frac{6}{625}$. cui addendo minus latus $\frac{3}{25}$. fit quadratus $\frac{81}{625}$. à latere $\frac{9}{25}$.

Tota tamen hæc operatio, adhuc labare videtur, niſi probetur aream trianguli ſic diuidi poſſe per aliquem quadratum, vt quotienti addendo, minus laterum circa rectum, fiat quadratus. Quamobrem ne hîc ſcrupulus hæreat, ſic pronuncio.

Si à datis duobus numeris in proportione dupla formetur triangulum rectangulum, eius area per quadratum minoris datorum diuiſa, fit quotiens, quo addito minori laterum circa rectum, conflatur quadratus noncuplus ad priorem quadratum.

A 2. B 4.
C 4. D 16.
E 96. F 12.
G 24.

Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum F. ergo cum vt probatum eſt in adnotatis ad initio D ſit duplum producti ex A in B. ſunt D F latera circa rectum trianguli. Quare ducto ſemiſſe ipſius D in F fiat area E. qua diuiſa per C. ſit quotiens G. dico ſummam duorum F G eſſe quadratum noncuplum ad ipſum C. Etenim quia vt probatum eſt ab initio D quadruplus eſt ad C. ſequitur ſubtracto C ab ipſo D. reſiduum F eſſe triplum ad C. Quare cùm ſemiſſis ipſius D ducitur in

F. ducitur

F. ducitur duplum ipſius C in triplum eiuſdem. Igitur E continet ſexies quadratum ipſius C. itaque diuidendo E per C. quotiens G eſt ſextuplus ad C. cui ſi addatur F. triplus ad eundem C. fiet vtique ſumma ipſorum F G noncupla ad C. ac proinde quadratus, cùm ſit noneuplum quadrati C. Quod demonſtrandum erat.

Supereſt vt moneam, verba illa poſtrema quæ virgulis incluſimus, γίνεταί δὲ δυ δυ &c. à nobis ſuffecta eſſe in locum iſtorum quæ in codice manu exarato corruptiſſima leguntur. γίνεται δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δ. ϛ. τῆς ἀπὸ τοῦ ς δυ δυ. ὅτι τῇ τὸν τ ἐκ τετρ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον, καὶ πάντα παρὰ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον. A quibus tamen ſi quis commodum ſenſum elicere potuerit, per me licet, vt noſtra deleat, & meliora reponat.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſumens alterutrum laterum circa rectum, faciat quadratum. Statuatur triangulum datum ſpecie 5 N. 12 N. 13 N. & fit 30 Q. + 12 N. æquandus quadrato, eſto quadrato 36 Q. & fit 1 N. 2. & cùm 1 N. ſit 2. oportebit vt etiam 30 Q. + 5 N. ſit quadratus. At non eſt. Itaque eo compellimur, vt inueniamus quadratum aliquem quo multato numero 30. & per reſiduum diuiſo 12. & quotientis quadrato per 30. multiplicato, & adſumente quintuplum ſui lateris fiat quadratus. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. & ſi inde auferatur 30. & per reſiduũ diuidatur 12. fit 12. denominatione partis 1 Q. − 30. cuius quadratus eſt 144. denominatione partis 1 QQ. + 900 − 60 Q. Hoc tricies cum quintuplo ſui lateris, facit 60 Q + 2520. ſub denominatione partis 1 QQ. + 900 − 60 Q. æquale quadrato, & eſt pars quadratus. Oportet igitur & 60 Q. + 2520. quadratum eſſe, hoc eſt oportet quadratum aliquem ductum in 60. & adſumentem 2520. facere quadratum. Si ergo formantes rectangulum, curauiſſemus vt 60. adſcito 2520. faceret quadratum, ſoluta eſſet quæſtio. Fit autem 60. ex mutuo ductu laterum circa rectum. At 2520. eſt ſolidus contentus ſub majore laterum circa rectum, & ſub interuallo laterum circa rectum, & ſub area. Eoque res rediit, vt inueniendum ſit triangulum rectangulum, vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adſcito ſolido ſub maiore laterum circa rectum, interuallo eorundem, & area contento, faciat quadratum. Et ſi conſtituamus maius laterum circa rectum, quadratum numerum, & omnia per ipſum diuida-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ςς ε. ςς ιβ. ςς ιγ. καὶ γίνεται δυ λ. ςς ιβ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ἔστω δυ λϛ. καὶ γίνεται ὁ ς β. καὶ τοῦ ς ὄντος μο β. δεήσει καὶ δυ λ. ςς ε. εἶναι τετράγωνον. οὐκ ἔστι δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνόν τινα ὃς λείψας τὸν λ. ἀριθμὸν, παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ιβ. καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν τριακοντάκις καὶ προσλαβὼν τὸν πενταπλασίονα τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος δυ α. καὶ ἐὰν λείψῃ τὸν λ. καὶ παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ιβ. γίνεται μο ιβ. ἐν μορίῳ δυνάμεως α. λείψει μο λ. ὁ τετράγωνος γίνεται ρμδ. ἐν μορίῳ δυδυ α. μο ϡ. λείψει δυνάμεων ξ. ταῦτα τριακοντάκις μετὰ τοῦ πενταπλασίονος τῆς ἑαυτοῦ πλευρᾶς γίνεται δυ ξ. μο ͵βφκ. ἐν μορίῳ δυδυ α. μο ϡ. λείψει δυ ξ. ἴσον τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. καὶ δεήσει ἄρα δυνάμεις ξ. μο ͵βφκ. εἶναι τετράγωνον. τουτέστιν δεῖ τετράγωνόν τινα ἑξακοντάκις γενόμενον, καὶ προσλαβόντα μο ͵βφκ. ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν πλάσσοντες τὸ ὀρθογώνιον κατασκευάσωμεν τὸν ξ. μετὰ τοῦ ͵βφκ. ποιεῖν τετράγωνον, λύσομεν τὸ ζητούμενον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ξ. ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. ὁ δὲ ͵βφκ. ἐκ τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἐκ τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως, ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν στερεὸν, τὸν περιεχόμενον ἔκ τε τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν μείζονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἅπαντα παραβάλωμεν παρ' αὐτὴν, ζητήσομεν τὸν ἐν τῇ ἐλάσσονι τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν, μετὰ τοῦ

ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τετράγωνον. * ἀπάγεται εἰς τὸ δύο ἀριθμῶν δοθέντων τοῦτ᾽ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, * αὐτοῖς ζητεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιῇ τετράγωνον. ταῦτα δὲ λήμματα προδέδεικται. καὶ ἔστι τὸ ὀρθογώνιον γ. δ. ε. τάσσω αὐτὸ ἐν ςς^οις, καὶ γίνεται ζητεῖν Δ^Υ ϛ. ςς^οὺς δ. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ Δ^Υ ϛ. ςς^οὺς γ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ πάλιν ἐὰν ἀπολύσωμεν τὴν μείζονα ἰσότητα γίνεται ὁ ςὸ μ^ο δ. ἐν μορίῳ Δ^Υ α ⋔ μ^ο ϛ. ἡ ἄρα δύναμις γίνεται μ^ο ιϛ. ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ^Υ α μ^ο λϛ λεῖψει Δ^Υ ιβ. ἔσται ἄρα δυνάμεως ἑξαπλασίων μετὰ ςς^ῶν τριῶν Δ^Υ ιβ. μ^ο κδ. ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ^Υ α. μ^ο λϛ ⋔ Δ^Υ ιβ. δυνάμεις ἄρα ιβ μ^ο κδ. ὀφείλουσιν ἴσαι εἶναι τετραγώνῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνον, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐλάσσονα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ κε. ὥστε ἡ δύναμις γίνεται μ^ο κε. ὁ ἄρα ςὸ ἔσται μ^ο ε. ζητοῦντες οὖν Δ^Υ ϛ ςς^οὺς δ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ποιοῦμεν ἴσον Δ^Υ κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ^{ιθ}. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον ιβ^{ιθ}. ιϛ^{ιθ}. κ^{ιθ}. καὶ μένει.

mus, quæremus minus laterum circa rectum additum plano ſub area & interuallo laterum circa rectum contento, eſſe quadratum. Oportet igitur datis duobus numeris, areæ ſcilicet, & minoris laterum circa rectum, ipſis adinuenire quadratum aliquem, qui ductus in vnum datorum, & adſumens alterum, faciat quadratum. Hæc autem lemmata ſuprà ſunt demonſtrata. Et eſt rectangulum 3. 4. 5. ſtatuo id in numeris, ſitque vt quæram 6 Q. + 4 N. æquales quadrato, & 6 Q. + 3 N. æquales quadrato. Et rurſum ſi abſoluamus maiorem æqualitatem, fit 1 N. 4. denominatione partis 1 Q. − 6. ergo quadratus erit 16. denominatione partis 1 Q.Q. + 36 − 12 Q. Quamobrem ſextuplum quadrati adſcitis 3. N. erit 12 Q. + 24. denominatione partis 1 Q.Q. + 36 − 12 Q. Proinde 12. Q. + 24. æquari oportet quadrato. Et res eò rediit vt inueniatur quadratus, qui ductus in minorem datorum, & adſumens maiorem faciat quadratum. Eſt autem 25. Quare 1 Q. eſt 25. & 1 N. 5. Igitur quærentes æquare quadrato 6 Q. + 4 N. æquabimus quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. Eſt ergo triangulum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. & conſtat.

OBSERVATIO D. P. F.

Vnius tantum ſpeciei triangula Diophantus exhibet propoſitum adimplentia, Sed ex noſtrâ methodò ſuppetunt infinita diuerſa ſpeciei triangula quæ ex Diophantæo per ordinem deriuantur.

Sit igitur inuentum triangulum 3. 4. 5. cuius hæc eſt proprietas vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adſcito ſolido ſub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem, & areâ contento faciat quadratum. Ab eo deducendum aliud eiuſdem proprietatis, ſit maius ex lateribus circa rectum trianguli quæſiti 4. minus vero 3 + 1 N. Rectangulum ſub lateribus circa rectum adſcito ſolido ſub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem & areâ contento, facit 36 − 12 N. − 8 Q. quæ ideo debent æquari quadrato. Cum autem latera 4 & 3 + 1 N. ſint latera circa rectum trianguli rectanguli, debent etiam eorum quadrata iuncta æquari quadrato. Quadrata illa iuncta faciunt 25 + 6 N + 1 Q. quæ idcircò etiam æquanda quadrato. Et oritur duplicata æqualitas, nam 36 − 12. N − 8 Q. & etiam 25 + 6 N + 1 Q. debent æquari quadrato. Eius æquationis duplicata ſolutio eſt in promptu.

IN QVAESTIONEM XIII.

MVLTA ſunt hic obſeruatu digniſſima. Sed cùm tres operationes inſtituat Diophantus, eas ſigillatim percurrendo, omnia dilucidabimus.

In prima operatione ſumit quemlibet triangulum datum ſpecie, puta 5 N. 12 N. 13 N. ſitque area 30 Q. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt 30 Q. + 12 N. & 30 Q. + 5 N. ſimul æquandi quadrato. Non eſt autem locus duplicatæ æqualitati, quoniam quadratorum numerus 30,

non eſt quadratus. Quamobrem alio, & ſanè mirabili artificio vtitur Diophantus. Sumit enim alterum numerorum quadrato æquandorum, puta 30 Q. + 12 N. quem facit quadrato æqualem. Id autem faciliimum eſt ſumendo quemlibet quadratorum numerum quadratum, maiorem quàm 30. vt 36 Q. vnde fit 1 N. 2. & ſanè per hunc Numeri valorem reſoluendo 30 Q. + 12 N. fit quadratus. Sed vt valida ſit æquatio, oportet vt per eundem valorem Numeri reſoluendo quoque 30 Q. + 5 N. fiat quadratus. Quod non accidit, nam cum 1 N. ſit 2. quadratus eſt 4. atque adeo 30 Q. ſunt 120. cui addendo 5 N. ſeu 10. fit 130. qui neutiquam quadratus eſt.

Neceſſitas ergo ſecundæ operationis hinc innoteſcit. Nam vt æquemus quadrato 30 Q. + 12 N. ſumimus aliquem quadratum maiorem quàm 30. à quo auferendo 30. & per reſiduum diuidendo 12. fit valor Numeri. Quare vt alter numerus 30 Q. + 5 N. ſit æqualis quadrato, oportet vt quotientis illius quadratus tricies ſumptus, adſcito quincuplo eiuſdem quotientis, fiat quadratus. Ponit itaque quæſitum quadratum 1 Q vnde auferendo 30. fit 1 Q. − 30. per quem diuidendo 12. fit quotiens $\frac{12}{1 Q. - 30}$. huius quadratus eſt $\frac{144}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. cuius trigecuplum eſt $\frac{4320}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. cui addendo quincuplum ipſius lateris $\frac{60}{1 Q. - 30}$. puta $\frac{60}{1 Q. - 30}$. fit $\frac{60 Q. + 2520}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. fit autem hæc additio reducendo $\frac{60}{1 Q. - 30}$. ad denominationem alterius numeri cui additur, nempe ducendo 60. in 1 Q. − 30. vnde fit 60 Q − 1800. quo addito ad 4320. fit numerator fractionis quæ eſt ſumma numerorum additorum, puta 60 Q. + 2520. manetque idem denominator, puta 1 Q Q. − 60 Q. + 900. Igitur vt conſequamur quod hac ſecunda operatione intenditur, oportet vt $\frac{60 Q. + 2520}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. æquetur quadrato, & quidem denominatorem ſatis conſtat eſſe quadratum, cùm factus ſit à latere 1 Q. − 30. Numerator autem reſtat æquandus quadrato, quod quidem optimè fieret per lemmata ad præcedentem tradita, ſi ſumma ipſorum 60. & 2520. eſſet quadratus, vel ſi repeteretur quadratus per quem multiplicando vel diuidendo 60. & producto, quotientiue addendo 2520. fieret quadratus. Quod cùm fieri non poſſit, apparet neceſſitas tertiæ operationis. Sed prius conſiderandum eſt vnde proueniant 60. & 2520. & quidem manifeſtum eſt 60. produci ex mutua multiplicatione laterum circa rectum, nempe ex 12. in 5. At 2520. ait Diophantus eſſe ſolidum ſub maiore laterum circa rectum, ſub ipſorum interuallo laterum, & ſub area contentum, quod quidem ita ſe habere non ſtatim apparet. Quare id demonſtrandum eſt. Hoc autem nil aliud eſt, quàm huiuſmodi Theorema.

Datis duobus numeris inæqualibus, & tertio quocunque, ſi tertius ducatur in quadratum maioris duorum datorum, fit numerus æqualis ſolido ſub tribus datis contento, & ſolido ſub maiore duorum datorum, interuallo eorundem, & tertio dato.

F 4320. E 144. D 7.
C 30. A 12. B 5.
G 1800. H 360. K 60.
L 2520.

Sint dati numeri A maior & B minor, & tertius quicunque C. ipſorum autem A B. interuallum eſto D. & ipſius A quadratus ſit E. Quo ducto in C fiat F. Tum ducatur A in B & fiat K. quo ducto in C. fiat G. ſolidus ſub tribus C A B. Ducto autem C in A fiat H. quo ducto in D. fiat L. ſolidus ſub tribus C A D. dico F æqualem eſſe duobus ſolidis G L. Nam ſumptis tribus numeris A bis, & C ſemel idem fiet numerus, quouis ordine ij inter ſe ducantur. At ex A in A fit E. 3. 1. poriſm. quo ducto in C fit F. ergo idem F fiet ducendo A in C. & productum H in A. Quare ex H in A fit F. ſolidus item G. ſub tribus C A B contentus, fiet ducendo C in A & productum H in B. Quare G fit ex H in B. At ex conſtructione ex eodem H in D fit ſolidus L. Cùm ergo B D. ſimul æquentur ipſi A. numeri G L. producti ex H in ipſos B D. æquabuntur producto ex H in ipſum A. 1. ſecundi. At ex H in A producitur F. vt oſtenſum eſt. Igitur ſolidi G L ſimul æquantur ipſi F. quod erat demonſtrandum.

Hinc porrò ſequi quod ait Diophantus manifeſtum eſt, ſi operatio illius diligenter conſideretur & A B ſtatuantur latera circa rectum trianguli, & C ponatur area. Itaque in tertia operatione quærendum eſt triangulum rectangulum, vt planus contentus ſub lateribus circa rectum, adiecto ſolido ſub maiore laterum, interuallo eorundem laterum, & area contento, ſit quadratus. Sic autem ratiocinatur Diophantus. Si concipiamus tam planum, quàm ſolidum ſupradictum diuidi per maius latus, orietur inde minus latus, hinc verò planus ſub area & interuallo laterum contentus. quare ſi maius latus ponatur quadratus, ſufficiet vt ſumma minoris lateris, & plani ſub interuallo & area contenti, ſit quadratus, ſic enim ex quadrato in quadratum, fiet quadratus. Igitur oportet conſtituere triangulum rectangulum, ita vt maius laterum circa rectum ſit quadratus, & præterea planus ſub interuallo laterum & area contentus, adſcito minore latere faciat quadratum, vel certè (quod omiſit Diophantus) idem planus per aliquem quadratum diuiſus, det quotientem cui adiiciendo minus latus, fiat quadratus. Id autem præſtabit, quoduis triangulum per præcedentem inuentum, nam & maius laterum, circa rectum erit quadratus, & ipſum interuallum laterum, quadratus erit; & area adſcito minore latere faciet quadratum. Quare cùm planus ſub area & interuallo laterum contentus, diuidetur per quadratum illum qui eſt interuallum laterum, quotiens fiet ipſa

area quæ adſciſcens minus latus faciet quadratum ex hypotheſi; ac proinde per lemma quod vltimum attulimus ad præcedentem, planus ſub area & interuallo laterum contentus, adſciſcens minus latus, infinitis modis æquari poterit quadrato.

Hæc ad integram quæſtionis huius intelligentiam dicta ſufficerent. Sed libet præterea in tyronum gratiam, tertiam Diophanti operationem, quam ille breuiter perſtrinxit, fuſius explicare. Sumo triangulum per præcedentem inuentum, & conſtituo illud in Numeris, puta 5 N. 4 N. 3 N. fitque area 6 Q. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt 6 Q. + 4 N. & 6 Q + 3 N. æquandi quadrato. Quare per ea quæ diximus de neceſſitate ſecundæ operationis, oportet inuenire quadratum, à quo auferendo 6. & per reſiduum diuidendo 4. fiat quotiens, cuius quadratus ſexies ſumptus, & adſumens triplum ſui lateris faciat quadratum. Quadratus ille eſto 1 Q. hic dempto 6. & per reſiduum diuidendo 4. fit $\frac{4}{1 Q. - 6}$. cuius quadratus $\frac{16}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. cuius ſextuplum $\frac{96}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. cui addendo triplum lateris, puta $\frac{12}{1 Q. - 6}$. vel ſub eadem denominatione $\frac{12 Q. - 72}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. fit vtique ſumma $\frac{12 Q. + 24}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. quam æquare oportet quadrato, & cùm denominator ſit quadratus, ſupereſt vt æquemus quadrato numeratorem 12 Q. + 24. Quod facilè fit quia 12. & 24. ſimul efficiunt quadratum 36. & vtendum lemmate quod ad precedentem attulit Diophantus. Quia enim quadratus quæſitus debet eſſe maior quàm 6. (vt æquari poſſit 6. Q. + 4 N.) oportet quærere quadratum maiorem quàm 6. qui ductus in 12. & adſumens 24. faciat quadratum ſit eius latus 1 N. + 1. fiet quadratus ductus in 12. & adſumens 24. 12 Q. + 24 N. + 36. cuius cuius latus eſto 6 + 3 N. fit 1 N 4. Ergo latus quadrati eſt 5. ipſe quadratus 25. Quare 6 Q. + 4 N. æquantur 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. eſtque triangulum quæſitum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. fitque area $\frac{96}{361}$. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{324}{361}$. & $\frac{400}{361}$. à lateribus $\frac{18}{19}$. & $\frac{20}{19}$. Poſſunt autem infinitæ dari ſolutiones, vtendo eodem triangulo 3. 4. 5. Quia per lemma præcedentis loco 25. inueniri poſſunt alij infiniti quadrati, verbi gratia ſi numeri 12 Q. + 24 N. + 361. ponas latus 6 – 4 N. fiet 1 N. 18. eritque latus quadrati 19. ipſe quadratus 361. Quare 6 Q. + 4 N. æquabitur 361 Q. & fiet 1 N. $\frac{4}{355}$. erunt igitur latera trianguli $\frac{12}{355}$. $\frac{16}{355}$. $\frac{20}{355}$. Area $\frac{96}{126025}$. cui addendo latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{4356}{126025}$. & $\frac{5776}{126025}$. à lateribus $\frac{66}{355}$. & $\frac{76}{355}$.

Ceterùm moneo, caſu accidere in hypotheſi Diophanti, vt planus ſub lateribus, puta 12. adſumens 24. ſolidum ſub maiore laterum, interuallo laterum & area contentum, faciat quadratum, quod accidit quia interuallum laterum 3. & 4. eſt vnitas; ſed ſi aliud ſumatur triangulum præcedenti ſatisfaciens, id non continget. Quare vt vniuerſalis reddatur operatio Diophanti, in alio triangulo libet rem experiri. Sumatur triangulum per præcedentem inuentum 363 N. 484 N. 605 N. fiet area adſumens ſigillatim latera circa rectum 87846 Q. 484 N. & 87846 Q. + 363 N. & vtrumque oportet æquare quadrato. Quare inueniendus eſt quadratus à quo detrahendo 87846. & per reſiduum diuidendo 484. fiat quotiens, cuius quadratum ducendo in 87846. & producto addendo quod fit ex eodem quotiente in 363. fiat quadratus. Et vt rem compendio abſoluam, eò redactus ero vt æquem quadrato 175692 Q. + 5144613144. & numerus quadratorum eſt planus ſub lateribus circa rectum 484. & 363. contentus. At numerus vnitatum eſt ſolidus ſub maiore latere 484. ſub interuallo laterum 121. & ſub area 87846. contentus. Porro vtriuſque numeri ſumma minimè quadratum facit. Sed quia quadrato per quadratum diuiſo fit quadratus, diuido vtrumque numerum per maius laterum circa rectum, puta per 484. qui quadratus eſt ex lege præcedentis, & fit 363 Q. + 10629366. æquandus quadrato. Vbi quoque quadratorum & vnitatum numeri ſimul additi non conficiunt quadratum. Sed quia quadratorum numerus 363. eſt minus laterum circa rectum, at vnitates 10629366. conficiunt planum ſub area 87846. & ſub interuallo laterum 121. (qui quadratus eſt ex lege præcedentis) & ſumma areæ & minoris lateris, conficit etiam quadratum, ex eiuſdem præcedentis lege. Patet cùm 363. & 87846. ſimul faciant quadratum, ſi quadratus 121. ducatur in vtrumque, & productorum ſummam fore quadratum, at ex 121. in 87846. fit 10629366. vt dictum eſt. Igitur ſi & 121. ducatur in 363. & producto adiiciatur 10629366. fit quadratus. Quare per lemma præcedentis à nobis ampliatum 363 Q. + 10629366. infinitis modis æquari poterit quadrato, ſic autem æquari debet quadrato, vt valor quadrati excedat 87846. quia quadratus ille æquari debet 87846 Q. + 484 N. Ponatur ergo quadrati latus 1 N. + 11. fiet ipſe 121 + 22 N. + 1 Q. Quo ducto in 363. & producto addendo 10629366. fit 10673289 + 7986 N. + 363. Q. æquandus quadrato, & facilè fit, quia vnitates ſunt quadratæ. Ponatur ergo latus illius 3267 + 19 N. fiet 1 N. 58080. cui addendo 11. fit latus quadrati 58091. ipſe quadratus 3374564281. Igitur 87846 Q. + 484 N. æquabimus 3374564281 Q. & fiet 1 N. $\frac{484}{3374476435}$. per quem reſoluendo latera trianguli quæ poſita erant 363 N. 484 N. 605 N. fiet quæſitum triangulum [illegible]. [illegible]. [illegible]. eius area eſt [illegible]. Quæ adſumens ſigillatim latera circa rectum, facit quadratos [illegible]. & [illegible]. quorum latera [illegible]. & [illegible].

Supereſt vt moneam loco verborum quæ primò aſteriſcis incluſimus, legi in codice manuſcripto; καὶ ἔστιν ὁ ξ ἐκ τετραγώνου πρὸς δυνάμει ἑξακοντάκι γενόμενος, καὶ προσλαβόντα μονάδας μφη. καὶ ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν ἐλάσσω τοῦ ὀρθογωνίου κατασκευάσωμεν, &c. Secundo verò

loco legebatur, ἀπάγεται εἰς τὸ β̄. ἀριθμοὺς ὄντας τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τὸν τῆς αὐτῆς ζητεῖν, &c.

QVÆSTIO XIIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus alterutro laterum circa rectum, faciat quadratum. Rurſum ſi conſtituamus id datum ſpecie ſicut in præcedente, eò res redit vt inueniendum ſit triangulum rectangulum ſimile huic 3.4.5. Ponatur ergo in numeris, & fit 3 N. 4 N. 5 N. Et 6 Q. − 4 N. æquantur quadrato. Et ſi ſtatuamus quadratum minorem quàm 6. fiet 1 N. 4 ſub denominatione partis exceſſus quo 6. ſuperat quadratum aliquem. Et ſi ponamus quadratum 1 Q. opus erit tali exiſtente numero, æquare etiam quadrato 6 Q. − 3 N. & 1 Q. ſexies ſumptus eſt 96. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12. Q. lateris autem triplum eſt 12. ſub denominatione partis 6. − 1 Q. hoc eſt 72 − 12 Q. ſub denominatione partis eiuſdem, & ſi hoc auferamus à 96. ſub denominatione eiuſdem partis, relinquuntur 12 Q. + 24. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. & eſt pars quadratus. Proinde oportet æquare quadrato 12 Q. + 24. & eſt 1 N. 1. Pono igitur 6 Q. − 4 N. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erunt igitur quæſiti rectanguli latera $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. & ſi nolis vti vnitate, ſtatue quadrati latus 1 N. + 1. Itaque triplum quadrati adſcito 6. fit 3 Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato. Hoc autem facile eſt, & inuenietur 1 N. non maior quàm $\frac{11}{5}$. At quadrati latus quod eſt 1 N. + 1. non erit maius quàm $\frac{16}{5}$. Et inde ortus quadratus ſublatus de 6. faciet numerum rationalem.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λήψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει ὁμοίως περὶ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον τῷ γ̄. δ̄. ε̄. τετάχθω οὖν ἐν ἀριθμοῖς, καὶ γίνεται ἀριθμῶν γ̄. ἀριθμῶν δ̄. ἀριθμῶν ε̄. καὶ δυνάμεις ς̄. λείψει ςς δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον, ἐλάττονα δυνάμεων ς̄. ἔρχεται ὁ ς μο δ̄. ἐν μορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ς̄. τετραγώνου τινός. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον δυνάμεως ᾱ γίνεται πηλικότης ὅλος τοῦ ς δυνάμεως ς̄ ⋔ ςς γ̄. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. ἀλλ' ἡ μὲν δύναμις ἑξάκις ἐστὶ μο ϙς̄. ἐν μορίῳ δυνάμεως δυνάμεως ᾱ μονάδες λς̄ λείψει δυνάμεως ιβ̄. τῆς δὲ πλευρᾶς τριπλασίων μο ιβ̄. ἐν μορίῳ μο ς̄. λείψει δυνάμεως ᾱ. τουτέστι μο οβ̄. λείψει δυνάμεως ιβ̄ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ. καὶ ἐὰν ταῦτα αἴρωμεν ἀπὸ μο ϙς̄. ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ λοιπαί εἰσι δυνάμεις ιβ̄. μο κδ̄. ἐν μορίῳ δυνάμεως δυνάμεως ᾱ. μο λς̄. λείψει δυνάμεως ιβ̄. καὶ ἐστὶ τὸ μόριον τετράγωνος. ὥστε καὶ δεῖ δυνάμεις ιβ̄. μο κδ̄. ἰσῶσαι τετραγώνῳ καὶ ἐστὶν ὁ ς μο ᾱ. τάσσω οὖν δυνάμεις ς̄. λείψει ςς δ̄. ἴσον δυνάμει ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς μο δ̄ ε. ἔσονται οὖν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου πλευραὶ ιβ̄ ε. ιϛ̄ ε. δ̄. καὶ ἐὰν μὴ θέλῃς χρήσασθαι μονάδι. τάξον τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ς ᾱ. μο ᾱ. ὥστε ὁ τετράγωνος δυνάμεως, καὶ μονάδες ς̄. ποιεῖ δυνάμεις γ̄. ςς ς̄. μο θ̄. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς οὐ μείζων ιγ ε. ἡ δὲ τετραγώνου πλευρά, ἥ ἐστι ς ᾱ. μο ᾱ ἔσται οὐ μείζων κβ̄ ε. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος ἀρθεὶς ἀπὸ μο ς̄. ποιεῖ ς ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XIV.

EX adnotatis ad præcedentem, omnium quæ hîc aguntur rationem reddere facillimum eſt. Mirum fortaſſe alicui videre poſſit, cùm in hac quæſtione vtendum ſit ſubtractione loco additionis qua vtendum erat in præcedente, cur tamen ad extremum maneat idem numerus 12. Q. + 24. æquandus quadrato. Huius autem ſymptomatis cauſa eſt, contrarietas additionis & ſubtractionis vnà cum admixtione contrariorum ſignorum pluris & minoris. Nam in præcedente oportebat addere 12 Q. − 72. ad 96. in hac autem oportet de 96. ſubtrahere 72 − 12 Q. Quare euidens eſt, & ſummam illam, & hoc reſiduum, eundem efficere numerum, puta 12 Q. + 24. vnde ſatis apparet demonſtrationes ad præcedentem allatas, & hîc locum habere.

Cæterùm cùm ad æquandum quadrato 12 Q. + 24. oporteat quærere quadratum qui ductus in 12. & adſumens 24. faciat quadratum, ſumit Diophantus pro huiuſmodi quadrato vnitatem, quod

fieri poſſe docuimus ad duodecimam, quia 12. & 24. ſimul conficiant quadratum, & quia talis quadratus ſumeodus eſt minor quàm 6. vt æquari poſſit 6 Q. − 4 N. ſic poſito quod 6 Q. − 4 N. æquentur 1 Q. fit 1 N. $\frac{4}{5}$. & ſunt latera quæſiti trianguli $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. eſtque area $\frac{96}{25}$. vnde auferendo ſigillatim latera circa rectum, ſuperſunt quadrati $\frac{16}{25}$. & $\frac{36}{25}$.

Quod autem ad extremum, ait Diophantus, loco vnitatis, ſumi poſſe alium quadratum, verum eſt implorando auxilium lemmatis ad duodecimam allati. Id tamen cautè agendum, quia quadratus ille debet eſſe minor quam 6. Quare ſic ratiocinatur Diophantus. Imprimis loco 12 Q. + 24. ſumit 3 Q. + 6. cuius rei duplex aſſignari poteſt cauſa. Prima eſt quod ipſius 12 Q. + 24. ſumit quadrantem 3 Q. + 6. ſuo more, vt rem in minimis conficiat, & euidens eſt ſi 3 Q. + 9. æquetur quadrato, fore vt & eius quadruplum 12 Q. + 24. fit quadratus. Secunda cauſa, quæ mihi magis arridet pendet ex dictis ad duodecimam. Quia enim 12. eſt planus ſub lateribus trianguli per duodecimam inuenti, at 24. eſt ſolidus ſub maiore laterum, ſub interuallo eorundem, & ſub area contentus, diuidendo vtrumque per maius laterum circa rectum, puta 4. (qui eſt quadratus ex lege duodecimæ) fiunt numeri 3. & 9. Quorum prior eſt minus laterum circa rectum, poſterior eſt planus ſub area & interuallo laterum, quare hoc diuiſo per interuallum laterum (quod etiam æquatur quadrato ex lege duodecimæ) oritur ipſa area, quæ rurſus per duodecimam adſcito minore latere facit quadratum. Quamobrem ex vltimo lemmate quod ibidem attulimus, conſtat 3 Q. + 6. æquari poſſe infinitis modis quadrato. Ponatur eius latus 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 3. & producto addendo 6. fit 3. Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus fingetur 3 − certo Numerorum numero, ſed quia quæſitus quadratus debet eſſe minor quàm 6. cùm latus proximum ipſius 6. ſit $\frac{22}{9}$. oportet latus quadrati quæſiti eſſe minus quàm $\frac{22}{9}$. Quare cùm ponatur hoc latus 1 N. + 1. ſi à $\frac{22}{9}$. auferas vnitatem, remanet $\frac{13}{9}$. quo patet minorem eſſe debere 1 N. Proinde cùm æquando quadrato 3 Q. + 6 N. + 9. debeat fieri valor Numeri, à quodam quadrato multato ternario, diuidente ſextuplum ſui lateris auctum ſenario, ſi ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. fiet $\frac{6 N. + 6}{1 Q. - 3}$. minor quàm $\frac{13}{9}$. & tandem fit 54 N. + 54 minor quàm 13 Q. Qua æquatione, vt par eſt, per approximationem reſoluta, fit 1 N. maior quàm 5 $\frac{1}{13}$. Quare numerus Numerorum in latere fictitio ponendus excedere debet 5 $\frac{1}{13}$. Ponatur verbi gratia latus illud 3. − 6 N. fiet 1 N. $\frac{14}{11}$. Quare latus quadrati quæſiti, quod poſitum erat 1 N. + 1. erit $\frac{25}{11}$. ipſe quadratus $\frac{625}{121}$. Proinde 6. Q. − 4 N. ſtatuemus æqualem $\frac{625}{121}$ Q. & fiet 1 N. $\frac{484}{101}$. Quamobrem erit quęſitum triangulum $\frac{1452}{101}$. $\frac{1936}{101}$. $\frac{2420}{101}$. fit area $\frac{1405536}{10201}$. vnde auferendo ſigillatim latera circa rectum, manent $\frac{1258884}{10201}$. & $\frac{1210000}{10201}$. quadrati à lateribus $\frac{1122}{101}$. & $\frac{1100}{101}$.

Quod ſi lubeat vti triangulo 363 N. 484 N. 605 N. fient æquales quadrato 87846 Q. − 484 N. & 87846 Q. − 363 N. & ductum Diophanti ſequentes, tandem inueniemus 175692 Q. + 5144613144. æqualem quadrato, & omnia diuidendo per 484. maius laterum circa rectum, quod eſt quadratum, fiet 363 Q. + 10629366. æqualis quadrato. Quod fieri poteſt infinitis modis, quia ducendo in 363. quadratum 121 (interuallum ſcilicet laterum circa rectum) & producto addendo 10629366. fit quadratus. Quia verò oportet quadratum quæſitum minorem eſſe quàm 87846. ſumemus ipſum 121. vel inueniemus alium eodem quo ſuprà artificio. Quod ſi ſumamus 121. fiet 87846 Q. − 484 N. æqualis 121 Q. vnde fit 1 N. $\frac{4}{725}$. Sunt ergo quæſiti trianguli latera $\frac{1452}{725}$. $\frac{1936}{725}$. $\frac{2420}{725}$. eſtque area $\frac{1405536}{525625}$. à qua detrahendo ſigillatim latera circa rectum, manent quadrati $\frac{352836}{525625}$. & $\frac{1936}{525625}$. quorum latera $\frac{594}{725}$. & $\frac{44}{725}$.

OBSERVATIO D. P. F.

EX noſtrâ Methodo ſoluetur ſequens quæſtio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt alterutrum laterum circa rectum multatum areâ faciat quadratum.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ςς ε. καὶ πάλιν γίνεται ζητεῖν δ^υ ς̄ ⋔ ςς ε. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ δ^υ ς̄ λείψει ςς γ̄. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν ποιήσω δ^υ ς̄ ⋔ ςς γ̄ ἴσα τετραγώνῳ. γίνεται ὁ ς^ο μ^ο γ̄. ἐν μορίῳ μ^ο ς̄ ⋔ δ^υ α̅. καὶ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenuſa quàm altero laterum circa rectum detracto, faciat quadratum. Eſto triangulum datum ſpecie 3 N. 4 N. 5 N. & rurſus oportet quærere 6 Q. − 5 N. æqualia quadrato, & 6 Q. − 3 N. æqualia quadrato. Et ſi fecero 6 Q. − 3 N. æqualia quadrato, fit 1 N. 3. ſub denominatione partis 6 − 1 Q. & tali

inuento numero, 6 Q. fiunt 54. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. & oportet à 54. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. auferre 90 − 15 Q. ſub denominatione eiuſdem partis, & reliqua æqualia facere quadrato. Et pars quidem quadratus eſt. Ergo etiam 15 Q. − 36. æquanda ſunt quadrato. Atque hæc quidem impoſſibilis eſt æquatio, quia 15. in duos non diuiditur quadratos. Non autem omninò impoſſibile eſt quod initiò erat propoſitum. Oportet ergo determinare de triangulo. Facti ſunt enim 15 Q. ex quodam quadrato minore quàm areæ numerus, ducto in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum. At quæ deſunt vnitates 36. fiunt ex ſolido contento ſub area, & vno laterum circa rectum, & interuallo quo hypotenuſa ſuperat idem latus. Eò itaque res deducta eſt, vt prius oporteat inueniri triangulum rectangulum, & quadratum numerum minorem area, vt quadratus ductus in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum, detracto ſolido contento ſub area, prædicto latere, & interuallo quo hypotenuſa ſuperat idem latus, faciat quadratum. * Factum eſſe ex duplo producti eorum, & omnia diuidamus per productum ex hypotenuſa in prædictum latus, quæremus rurſus alium quendam quadratum, quo ducto in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum in primum latus interualli quadratum. * Et ſi ſtatuamus eos à quibus triangulum effingetur, planos ſimiles, diſſoluemus quæſtionem. Formetur triangulum abs 4. & 1. At quadratus, vt minor ſit numero areæ, eſto 36. & formans triangulum ſtatuo illud in numeris 8 N. 15 N. 17 N. & fit numerus areæ detracto vno laterum circa rectum 60 Q. − 8 N. Hæc æquantur 36 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad poſitiones. Erit triangulum $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. & manet.

πλεύρου εὑρεθέντος αἱ δυνάμεις ιε γίνονται μο νδ ἐν μορίῳ δυν. δυν. α μο λϛ ⋔ δυν. ιβ. καὶ δεῖ ἀπὸ μο νδ ἐν μορίῳ δυν. δυν. α μο λϛ ⋔ δυν. ιβ ἀφελεῖν μο ϙ ⋔ δυν. ιε ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. ὥστε καὶ δυν. ιε λείψει μο λϛ ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ αὕτη μὲν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ἐστι διὰ τὸ τὸν ιε μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους. οὐ πάντως δὲ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἀδύνατόν ἐστι. δέον οὖν διορίζεσθαι περὶ τοῦ τριγώνου. γεγόνασι γὰρ αἱ μὲν δυνάμεις ιε ἔκ τινος τετραγώνου ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. αἱ δὲ ἐν λείψει μο λϛ, ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς εἰρημένης τῶν ὀρθῶν. καὶ ἀπῆκται εἰς τὸ πρότερον εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν λείψει τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου, ὑπό τε τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς εἰρημένης τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τὴν εἰρημένην τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ τετράγωνον. * γεγενῆσθαι ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, καὶ πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν ..., ζητήσομεν πάλιν ἄλλον τινὰ τετράγωνον πολλῶν ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν τοῦ ἐμβαδοῦ, ἐπὶ τῆς πρώτης τῆς ὑπεροχῆς τετράγωνον. * καὶ ἐὰν τάξωμεν τοὺς πλάσσοντας τὸ ὀρθογώνιον ὁμοίους ἐπιπέδῳ διαλύσομεν τὸ ζητούμενον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ μο δ καὶ μο α. ὁ δὲ τετράγωνος ἔστω, ἵνα ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἐμβαδοῦ, μο λϛ. καὶ πλάσσων τὸ τρίγωνον, πλάσσω αὐτὸ ἐν ϛϛ οις. ἔσται ϛϛ η, ϛϛ ιε, ϛϛ ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ λείψας τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυν. ξ λείψει ϛϛ η. ταῦτα ἴσα δυν. λϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο α γχ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον η γχ, ιε γχ, ιζ γχ. καὶ μένει.

IN QVÆSTIONEM XV.

Hic quod attinet ad primam operationem, cùm ea ſimilis ſit omnino operationi duarum præcedentium, nihil eſt quod nos moretur. Quod autem ait Diophantus 36. eſſe ſolidum contentum ſub area, vno laterum circa rectum, & interuallo inter hoc & hypotenuſam, idem eſt prorſus cum theoremate ad decimam tertiam demonſtrato. Denique quod ait 15 Q. − 36. æquari non poſſe quadrato quia 15. non diuiditur in duos quadratos, pendet ab iis quæ mox oſtenſuri ſu-

mus. Neceſſitas autem ſecundæ operationis euidenter colligitur ex defectu prioris. Nam ad hoc vt 15 Q. − 36. poſſit æquari quadrato, oportet inuenire quadratum quo ducto in 15. & à producto auferendo 36. maneat quadratus. Et cùm quadratus inueniendus æquari debeat 6 Q. − 4 N. curandum eſt, vt ſit minor numero areæ 6. Quia ergo 15. eſt planus ſub hypotenuſa & altero laterum, at 36. eſt ſolidus ſub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenuſam, euidens eſt quærendum eſſe triangulum, & quadratum minorem area trianguli, vt quadrato ducto in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum, fiat numerus à quo detrahendo ſolidum ſub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenuſam, relinquatur quadratus.

Equidem triangulum fingendum eſſe ait Diophantus à duobus numeris qui ſint plani ſimiles; ſed qua ratione id colligat, & vnde ſumendus ſit quadratus, non conſtat ex corruptiſſimis illius verbis quæ idcirco aſteriſcis incluſimus more noſtro. Quorum tamen defectum vt ego ſuppleam, pronuncio, quadratum illum, eum eſſe qui fit ex quadrato interualli dictorum planorum ſimilium, in quadratum qui fit ex mutua eorundem multiplicatione. Quod vt demonſtrem, & ſimul rei obſcuriſſimæ lucem afferam, aliqua prius ſuppono.

Primùm ſuppono, in quolibet triangulo efficto per methodum à Diophanto traditam, quamque demonſtrauimus propoſitione quinta lib. tertij poriſm. hypotenuſam ſuperare quadrato numero, latus illud quod fit bis ex mutua multiplicatione numerorum à quibus effictum eſt triangulum. Quod euidens eſt, quia hypotenuſa eſt ſumma quadratorum, à qua ſi auferatur duplum multiplicationis laterum, ſupereſt quadratus interualli laterum per quartam ſecundi poriſmatum.

Secundo ſuppono, interuallum duorum quadratorum eſſe maius quadrato interualli laterum, quod ipſum iam demonſtrauimus ad ſextam ſecundi.

Tertiò ſuppono, in triangulo efficto à duobus planis ſimilibus, ſi exceſſus hypotenuſæ ſuper latus illud quod æquatur interuallo laterum, ducatur in alterum latus, fieri quadratum. Sint enim plani ſimiles A B. quorum quadrati C D. quorum ſumma E, interuallum F. tum ex A in B fiat H. cuius duplum G. eritque E F G. triangulum rectangulum. Sit ergo K exceſſus E ſuper F. & ducto K in G. fiat L. dico L eſſe quadratum. Quia enim A B ſunt plani ſimiles, erit H quadratus. Et quia E eſt ſumma duorum C D. At F. eſt eorundem interuallum, detracto F ex E. reliquus K erit duplus ipſius D. Cùm ergo G. K. ſint dupli quadratorum H D. ſequitur G ad K habere rationem quadrati ad quadratum, ac proinde G K ſunt plani ſimiles, & productus ex eorum mutuo ductu, puta L. quadratus eſt. Quod demonſtrandum erat.

H 16.
A 8. B 2.
5. 3. poriſm. C 64. D 4.
E 68. F 60. G 32.
1. noni. K 8. L 256.

23. 5. poriſm.
26. octaui.
3. noni.

His poſitis, totum quod ſupponitur à Diophanto, ſic demonſtrabitur. Sint plani ſimiles A B. à quibus fingatur triangulum C D E. ita vt E ſit duplum quadrati K. qui fit ex A in B. At D ſit interuallum quadratorum ab ipſis A B. Ductoque K in D. fiat area M. Rurſus interuallum ipſorum C E. ſit G. quadratus per primum ſuppoſitum. quo. ducto in quadratum K fiat quadratus H. Item ducto C in E fiat L. quo ducto in H fiat P. & rurſus ducto E in M. fiat R. quo ducto in G. fiat Q. Dico ſi Q. ſolidus ſub area M. altero laterum circa rectum E, & ſub G interuallo inter idem latus & hypotenuſam, auferatur ab ipſo P. qui fit ex quadrato H in L planum ſub hypotenuſa C & prædicto latere E contentum, reſiduum eſſe quadratum, & ipſum quadratum H eſſe minorem area M. ac denique ipſum L componi ex duobus quadratis. Primùm ſic oſtendo. Ex E in D producatur N. & ex interuallo ipſorum C D in E. fiat F quadratus per tertium ſuppoſitum. Tum conſideratis tribus numeris D E K. Quia ex D in K fit M. quo ducto in E fit R. fiet idem R. ſi E ducatur in D. & productus N in K. Igitur R fit ex N in K. Rurſus eadem de cauſa conſideratis tribus G K N. Quia ex K in N. fit R vt oſtenſum eſt, & ex R in G fit ſolidus Q. idem Q. fiet ducto K in G. & producto H in N. Igitur Q. producitur ex H in N. At per conſtructionem ex eodem H in L. fit P. Ergo P. ſuperat Q. numero qui fit ex H in interuallum ipſorum L N. Atqui cùm ex eodem E in ipſos C D. fiant L N. patet etiam L ſuperare N. numero qui fit ex E. in interuallum ipſorum C D. hoc eſt quadrato F. Igitur P. ſuperat Q. producto ex H in F. ſed hic productus eſt quadratus, cùm vterque H F quadratus ſit. Ergo P. ſuperat Q. quadrato numero; quod erat intentum. Deinde quadratum H minorem eſſe area M. probatur. Etenim cùm ex eodem K in ipſos G D. producantur H M, & D ſit maior quàm G per ſecundum ſuppoſitum, conſtat & ipſum M maiorem eſſe quàm H. Quod erat propoſitum.

A 4. B 1.
F 16.
C 17. D 15. E 8.
G 9. H 36. K 4.
L 136. M 60. N 120.
P 4896. Q 4320. R 480.

6. 1. poriſ.

Denique L componi ex duobus quadratis conſtat ex ſeptima tertij poriſmatum, quia ſcilicet producitur ex C in E quorum vterque componitur ex duobus quadratis, puta C ex quadratis ipſorum A B. At E ex duplo quadrati K. vnde etiam per Scholium propoſitionis citatæ apparet ipſum L. componi tantum ſemel ex duobus quadratis, quia E non componitur ex quadratis inæqualibus. Sunt autem quadrati ex quibus L componitur, ipſe H qui fit ex K in G. & quadratus qui fit ex eodem K in quadratum ſummæ amborum A B.

Ex

Ex his ſanè quæ cum incredibili labore commenti ſumus, cauſa omnium quæ peragit Diophantus fit manifeſta. Reliqua operatio nil habet difficultatis, cùm ſit penitus ſimilis operationi duarum præcedentium. Eam tamen in ſtudioſorum gratiam non pigebit adiicere. Formatur triangulum à 4. & 1. & conſtituitur ſpecie, puta 17 N. 15 N. 8 N. fit area multata tum hypotenuſa, tum latere tertio 60 Q. − 17 N. & 60 Q. − 8 N. Quare vtrumque æquare oportet quadrato, quod ſi 60 Q. − 8 N. æquemus quadrato, quærendus erit quadratus quem auferendo à 60. & per reſiduum diuidendo 8. fiat quotiens cuius quadratum ducendo in 60. & à producto auferendo quod fit ex 17. in ſupradictum quotientem, remaneat quadratus. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. hunc auferendo à 60. & per reſiduum diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{60-1Q}$ cuius quadratus $\frac{64}{3600-120Q+1QQ}$ quo ducto in 60. fit $\frac{3840}{3600-120Q+1QQ}$ vnde ſi auferas productum ex 17. in $\frac{8}{60-1Q}$ puta $\frac{136}{60-1Q}$ ſeu ſub eadem denominatione $\frac{8160-136Q}{3600-120Q+1QQ}$ remanet $\frac{136Q-4320}{3600-120Q+1QQ}$ æquandus quadrato. Quare cum denominator ſit quadratus, ſupereſt vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia ex ſupra demonſtratis quadrato 36. ducto in 136. & à producto auferendo 4320. remanet quadratus. Eſt ergo 1 Q. 36. Quamobrem 60 Q. − 8 N. æqualis erit 36 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$. erunt igitur trianguli latera $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. fit area $\frac{60}{9}$. vnde auferendo tum $\frac{8}{3}$. tum $\frac{17}{3}$. remanent quadrati $\frac{36}{9}$. ſeu 4. & $\frac{9}{9}$. ſeu 1.

Cæterum quæſtio infinitas recipit ſolutiones, tum quia loco ipſorum 4. & 1. ſumi poſſunt quilibet alij plani ſimiles à quibus effingatur triangulum. Tum quia ſumptis iiſdem 4 & 1. inueniri poſſunt infiniti quadrati loco ipſius 36. vel minores ipſo 36. vel etiam maiores, qui tamen non excedant aream 60. quibus ductis in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus, vt docebimus ad ſequentem.

QVÆSTIO XVI.

DATIS duobus numeris, ſi aliquo quadrato in vnum eorum ducto, & altero de producto ſubtracto, fiat quadratus; inuenietur & alius quadratus maior quadrato prius ſumpto, qui hoc idem præſtet. Dentur duo numeri 3. & 11. & quadrato aliquo, puta à latere 5. ducto in 3. & à producto detracto 11. fiat quadratus à latere 8. Oporteat inuenire alium quadratum maiorem quàm 25. qui hoc ipſum præſtet. Eſto latus quadrati 1 N. + 5. fit quadratus 1 Q. + 10 N. + 25. Huius triplum dempto 11. fit 3 Q. + 30 N. + 64. æquale quadrato; ſit eius latus 8 − 2 N. & fit 1 N. 62. Eſt ergo latus 67. quadratus 4489. qui præſtat imperata.

ΔΥΟ ἀριθμῶν δοθέντων, ἐὰν τετράγωνός τις πολλαπλασιάσῃ ἐπὶ ἕνα αὐτῶν καὶ λείψας τὸν ἕτερον, ποιῇ τετράγωνον. εὑρίσκεται καὶ ἕτερος τετράγωνος μείζων τοῦ προειρημένου τετραγώνου, ὃς τὸ αὐτὸ ποιεῖ. Δεδόσθωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅ τε γ. καὶ ὁ ια. καὶ τετράγωνός τις ὁ ἀπὸ τοῦ ε. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν γ. καὶ λείψας τὸν ια. ποιείτω τετράγωνον, τὸν ὄντα ἀπὸ πλευρᾶς μο η. δέον ἔστω ζητεῖν ἕτερον τετράγωνον μείζονα τοῦ κε. τὸ αὐτὸ ποιοῦντα. ἔστω ἡ τετραγώνου πλευρὰ ς α μο ε. ὁ τετράγωνος γίνεται Δυ α ς ι μο κε. ταῦτα τρὶς ⋔ μο ια. γίνονται Δυ γ ς λ μο ξδ. ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μο η ⋔ ς β. καὶ γίνεται ὁ ς μο ξβ. ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ μο ξζ. ὁ τετράγωνος ͵δυπθ. καὶ οὗτος ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν.

IN QVAESTIONEM XVI.

HIc omnia ſunt perſpicua. Cæterùm quod vult Diophantus quadratum quæſitum maiorem eſſe quadrato expoſito, id agit ob ſequentem quæſtionem, in qua tale quid poſtulatur, & ad quem hæc eſt veluti lemma. Sed hoc non eſt ſic accipiendum, quaſi verò ſimili fere operatione, non poſſimus etiam inuenire quadratum minorem. Sint enim iidem 3. & 11. dati numeri, & quadratus 25. ductus in 3. faciat 75. vnde auferendo 11. ſuperſit quadratus 64. volo reperire alium quadratum minorem ipſo 25. qui hoc idem præſtet. Pono latus eius 5 − 1 N. erit quadratus 25 − 10 N. + 1 Q. quo ducto in 3. & ex producto auferendo 11. ſupereſt 64 − 30 N. + 3 Q. æqualis quadrato. cuius latus ita fingendum eſt, vt fiat 1 N. minor quàm 5. fiet autem 1 N. ponendo latus fictitium 8 − tot Numeris, de quorum quadrato auferendo 3. per reſiduum diuidetur ſedecuplum ipſorum Numerorum multatum numero 30. Quare ſi ponatur quæſitus Numerorum numerus 1 N. fiet $\frac{16N-30}{1Q-3}$. minor quàm 5. & tandem 16 N. minores quàm 5 Q. + 15. quod per ſe manifeſtum eſt, quia quadratus ſemiſſis numeri numerorum puta 64. minor eſt quàm productus ex quadratis in vnitates, puta quàm 75. vnde patet nulla hìc opus eſſe Numeri determinatione, ſed poni poteſt latus fictitium 8 − quotlibet Numeris, quorum quadratus excedat 3. Ponatur 8 − 2 N. fiet 1 N. 2. Quare latus quadrati quæſiti quod poſitum erat 5 − 1 N. erit 3. & ſatisfacit propoſito. nam eius quadrato 9. ducto in 3. fit 27. vnde ſi auferatur 11. remanet quadratus 16.

Hac ratione, vt iam monui, applicabis hoc lemma præcedenti quæſtioni. Nam primo expoſitis numeris 136. & 4320. quorum altero ducto in quadratum 36. altero de producto ſublato, relinquitur quadratus 576. inuenies alium quadratum minorem quàm 36. qui præſtet idem. Eſto latus illius 6 − 1 N. huius quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fit 576 − 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Verùm latus quæſiti quadrati non ſolùm debet eſſe minus quàm 6. ſed etiam quia quadratus talis eſſe debet vt eo ducto in 136. à producto poſſit auferri 4320. cùm diuiſo 4320. per 136. fiat 31. $\frac{13}{17}$. cuius latus ferè eſt 5 $\frac{5}{8}$. oportet vtique latus quadrati non eſſe minus quàm 5 $\frac{5}{8}$. at illud poſitum eſt 6 − 1 N. quare cùm auferendo 5 $\frac{5}{8}$ à 6 − 1 N. ſuperſit $\frac{3}{8}$ − 1 N. curandum eſt vtique vt 1 N. ſit minor quàm $\frac{3}{8}$. Igitur numeri 576 − 1632 N. + 136 Q. latus ita fingendum eſt vt prodeat 1 N. minor quàm $\frac{3}{8}$. Quamobrem ſi modo ſæpè alias à nobis vſitato, determinationem quæras numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus fingi debere 24 − tot numeris qui ſint plus quàm 34. Ponatur ergo 24 − 62 N. fiet 1 N. $\frac{112}{309}$. quo detracto à 6. manet latus quæſiti quadrati $\frac{1742}{309}$. Ipſe ergo quadratus eſt $\frac{3034564}{95481}$. quo ducto in 136. fit $\frac{412700704}{95481}$. vnde ſi auferas 4320. vel ſub eadem denominatione $\frac{412477920}{95481}$. manet quadratus $\frac{222784}{95481}$. à latere $\frac{472}{309}$.

Deinde ſi velis adhuc quadratum maiorem quàm 36. ſed minorem quàm 60. pone latus illius 6 + 1 N. quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fiet 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Sed quia valor quadrati debet eſſe minus quàm 60. cùm latus proximum ipſius 60. ſit 7 $\frac{11}{15}$. & ab hoc auferendo latus quadrati quæſiti quod poſitum eſt 6 + 1 N. ſuperſit 1 $\frac{11}{15}$ − 1 N. patet 1 N. minorem eſſe debere quàm $\frac{26}{15}$. Quare ſi quæras determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus illud fingi debere 24 − tot Numeris qui excedant 49 $\frac{1}{2}$. Ponatur ergo 24 − 56 N. fiet 1 N. $\frac{36}{25}$. Quare latus quadrati quod poſitum eſt 6 + 1 N. erit $\frac{186}{25}$. ipſe quadratus $\frac{34596}{625}$ qui vtique minor eſt quàm 60. eoque ducto in 139. & de producto auferendo 4320. remanet quadratus $\frac{2005056}{625}$. à latere $\frac{1416}{25}$.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, πάλιν ἔρχεται ἡμῖν, διορίζεσθαι καὶ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα ὄντα τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, λείψει τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἔκ τε τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω οὖν τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ° δ. καὶ μ° α. ὁ δὲ τετράγωνος μ° λϛ. καὶ οὐκ ἔστι μείζων τοῦ ἐμβαδοῦ. ἔχομεν οὖν δύο ἀριθμοὺς, τὸν μὲν ἕνα, τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τουτέστι μ° ρλϛ. τὸν δὲ λοιπὸν, τὸν στερεὸν τὸν περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν ͵δτκ. ἐπεὶ οὖν τετράγωνός τις ὁ ὢν μ° λϛ. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ρλϛ. καὶ λείψας τὸν ͵δτκ. ποιεῖ τετράγωνον. ζητοῦμεν δὲ τὸν τετράγωνον μείζονα ὄντα τοῦ λϛ. ἐὰν οὖν τάξωμεν αὐτὸν Δ^{Y} α ϛϛ^{οἱ} ιβ μ° λϛ καὶ ἀκολουθήσομεν τῇ προδεδειγμένῃ ἀποδείξει εὑρήσομεν ἀπείρους ποιοῦντας

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenuſæ quàm alterius laterum circa rectum numero adſcito, faciat quadratum. Si ſtatuamus illud datum ſpecie, rurſum cogimur determinare, & quærere triangulum rectangulum, & quadratum numerum maiorem areæ numero, vt quadratus ductus in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum, detracto ſolido contento ſub area, & prædicto latere circa rectum, & interuallo hypotenuſæ ſuprà prædictum latus, faciat quadratum. Formetur ergo triangulum à 4. & 1. & ſit quadratus 36. Sed is non eſt maior areæ numero. Habemus igitur duos numeros, alterum quidem qui fit ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum; nempe 136. alterum verò, ſolidum contentum ſub area, vno laterum circa rectum, & exceſſu hypotenuſæ ſuprà prædictum latus, nempe 4320. Quoniam igitur quadratus aliquis, puta 36. multiplicatus in 136. & detracto 4320. facit quadratum, quærimus autem quadratum maiorem eſſe quàm 36. ſi ſtatuamus ipſum 1 Q. + 12 N. + 36. & ſuperiorem ſequamur demonſtrationem, inueniemus infinitos quadratos quæſtionem ſoluentes. Quorum vnus erit

676. Statuamus ergo triangulum rectangulum 8 N. 15 N. 17 N. & fiunt 60 Q. + 8 N. æquales 676 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{77}$. Ad poſitiones.

τὸ πρόβλημα. ὧν εἰς ἴσαι ὁ ἂν μ° χος. τάξομεν τὸ ὀρθογώνιον ςς η̅. ςς ιε̅. ςς ιζ̅. καὶ γίνονται δυ ξ̅ μ° η̅. ἴσαι δυ χος. καὶ γίνεται ὁ ς α̅ οζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

Tentetur beneficio noſtræ methodi ſequens quæſtio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt tam hypotenuſa quam vnum ex lateribus detractâ areâ faciant quadratum.

IN QVAESTIONEM XVII.

EX adnotatis ad duas præcedentes, omnium quæ hîc aguntur cauſa ſit manifeſta. Quare ſufficiet integram ſubiicere operationem. Ponatur triangulum datum ſpecie 8 N. 15 N. 17 N. fiet area 60. Q. cui adiiciendo tum hypotenuſam 17 N. tum latus 8 N. fiunt 60 Q. + 17 N & 60 Q + 8 N. æquandi quadrato. Quod ſi inſtituamus æquationem reſpectu 60. Q. + 8 N. vt etiam valor Numeri alteri numero ritè applicari poſſit, opportebit inuenire quadratum à quo auferendo 60. & per reſiduum diuidendo 8. fiat quotiens, cuius quadratus ſexageſies ſumptus, adſcito latere ſuo decies & ſepties, faciat quadratum. Eſto quadratus quæſitus 1 Q. detracto 60. fit 1 Q. − 60. per quem diuidendo 8. fit $\frac{8}{1Q - 60}$. cuius quadratus $\frac{64}{1QQ - 120Q + 3600}$. qui ſi ducatur in 60 fit $\frac{3840}{1QQ - 120Q + 3600}$. cui ſi addatur decies & ſepties $\frac{136}{1Q - 60}$. hoc eſt ſub eadem denominatione $\frac{136Q - 8160}{1QQ - 120Q + 3600}$. fiet vtique $\frac{136Q - 4320}{1QQ - 120Q + 3600}$ æquandus quadrato. Quare cùm denominator ſit quadratus, reſtat, vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato. Quod facilè fit cùm ex demonſtratis ad decimam quintam quadrato 36. ducto in 136. & de producto auferendo 4320. ſuperſit quadratus. Verùm quadratus 36. hîc vſui eſſe non poteſt, quia non eſt maior quàm 60. quod neceſſe eſt, cùm quæramus quadratum æquandum cum 60 Q. + 8 N. Igitur implorandum eſt auxilium præcedentis lemmatis, & inueniendus quadratus maior quàm 36. immò quàm 60. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus. Ponatur latus quæſiti quadrati 6 + 1 N. fiet quadratus 36 + 12 N. + 1 Q. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. fit 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Quia autem quadratus quæſitus debet eſſe maior quàm 60. ſumpto quadrato proximè maiore quàm 60. puta 64. cuius latus 8. à quo auferendo 6. remanet 2. patet ita fingendum latus quadrati; vt 1 N. non ſit minor quàm 2. Quare ſi quæras Numeri determinationem inuenies latus fictitium poni debere 24 + tot numeris, qui non excedant 21. ita tamen vt eorum quadratus excedat 136. quales ſunt omnes numeri à 12. vſque ad 21. incluſiuè. Ponatur ergo 24 + 16 N. fiet 1 N. 20. Quare latus quadrati eſt 26. Ipſe quadratus 676. æquemus ergo 676 Q. cum 60 Q. + 8 N. fiet 1 N. $\frac{1}{77}$. & latera quæſiti trianguli erunt $\frac{8}{77}$. $\frac{15}{77}$. $\frac{17}{77}$. Area fit $\frac{60}{5929}$. cui ſi adiiciatur tum hypotenuſa, tum primum latus, fiunt quadrati $\frac{1369}{5929}$. & $\frac{676}{5929}$. quorum latera $\frac{37}{77}$. & $\frac{26}{77}$.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt acutis eius angulis bifariam ſciſſis. numerus angulum ſecantis ſit rationalis. Ponatur ſecans angulum bifariam 5 N. vnum verò ſegmentum baſis 3 N. ergo cathetus erit 4 N. Statuatur itaque ab initio baſis vnitatum quotcunque quæ trientem habeant. Ac ſit 3. erit igitur reliquum baſis ſegmentum 3 − 3 N. ſed quoniam angulus bifariam ſectus eſt, & cathetus ad abſciſſam partem eſt ſeſquitertia, erit & hypotenuſa ad reliquum baſis ſegmentum, ſeſquitertia. At poſitum eſt reliquum baſis ſegmentum 3 −

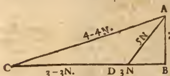
ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ τῆς ὀξείας αὐτοῦ γωνίας τμηθείσης διχῶς. ὁ τῆς τεμνούσης τὴν γωνίαν ἀριθμὸς ᾖ ῥητός. τετάχθω ἡ μὲν τέμνουσα γωνίαν διχῶς ςς ε̅. ἡ δὲ μία τομὴ τῆς βάσεως ἀριθμῶν γ̅. ἡ ἄρα κάθετος ἔσται ςς δ̅. τετάχθω δὴ καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς βάσις μονάδων ὅσων δήποτε ἐχουσῶν τρίτον. ἔστω δὴ μ° γ̅. ἔσται δὴ τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μ° γ̅ λείψει ςς γ̅. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ἡ γωνία διχῶς ἐτμήθη, καὶ ἔστιν ἡ κάθετος ἀποτομῆς ἐπίτριτος, ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ λοιποῦ τῆς βάσεώς ἐστιν ἐπίτριτος. καὶ τέτακται τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μ° γ̅ ⋔ ςς γ̅. ἡ ἄρα ὑποτείνουσά ἐστι μ° δ̅. λείψει ςς δ̅. λοιπόν ἐστι

τὸν ἀπὸ ταύτης τετράγωνον. τουτέστι Δ^{Y} ις̅ μ° ις̅ ⋔ ςς̅ λβ̅. ἰσώσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις. τουτέστι Δ^{Y} ις̅ μ° θ̅. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° ζ^{λβ}. τὰ λοιπὰ δῆλα. καὶ ἐπὶ πάντα λβ̅. ποίησον, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος μ° κη̅. ἡ δὲ βάσις μ° ϟς̅. ἡ δὲ ὑποτείνουσα μ° ρ̅. ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν μ° λε̅.

3 N. Igitur hypotenuſa erit 4—4 N. Reſtat vt huius quadratus, nempe 16 Q. + 16 — 32 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc eſt 16 Q. + 9. & fit N. $\frac{7}{32}$. & reliqua ſunt manifeſta. Et ſi omnia ducam in 32. erit vtique cathetus 28 Baſis 96. Hypotenuſa 100. At ſecans angulum 35.

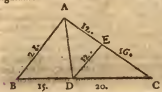
IN QVAESTIONEM XVIII.

Hic nulla ferè eſt difficultas. Nam quod ait Diophantus Cathetum ad alterum baſeos ſegmentum eandem habere rationem, quam habet hypotenuſa ad alterum eiuſdem baſeos ſegmentum, id manifeſtè infertur ex tertia ſexti Euclidis. Sit enim triangulum rectangulum A B C. & ducatur A D ſecans angulum acutum A bifariam. Quia ergo, vt oſtendit Euclides loco citato, ſe habet A B ad A C. vt B D ad D C. erit & permutando A B ad B D, ſicut A C ad C D. Quod eſt propoſitum. Itaque ſumit Diophantus latera trianguli rectanguli 5. 4. 3. & conſtituens illud datum ſpecie, applicat lateribus trianguli A D B. fitque A D 5 N. A B 4 N. B D 3 N. Neceſſe eſt autem A B ſtatui maiorem quàm B D. quia enim eſt A B ad B D. vt A C ad C D. ſed A C maior eſt quàm C D. immò quàm tota C B. erit & A B maior quàm B D. Tum verò tota baſis C B ponitur quilibet vnitatum numerus qui habeat trientem ad vitandas fractiones, puta 3. Quare fit reliquum ſegmentum C D. 3 — 3 N. At hypotenuſa A C 4 — 4 N. cuius quadratum æquando quadratis laterum circa rectum fit 1 N. $\frac{7}{32}$. Quare A B eſt $\frac{28}{32}$. B C $\frac{96}{32}$. A C $\frac{100}{32}$. ſecans verò A D $\frac{35}{32}$. & ſi omnia multiplices per 32. fient 28. 96. 100. 35. hoc enim licere conſtat ex prima tertij poriſmatum. Quod ſi loco trianguli 5. 4. 3. ſumas aliud non ſimile, aliam reperies ſolutionem, & in altera proportione inuenies latera triangulorum A C B. A D B. vt manifeſtum eſt.



Cæterùm non docet Diophantus quomodo inueniri poſſit triangulum rectangulum, vt numerus angulum rectum ſecantis bifariam ſit rationalis, quia id eſt impoſſibile. Quod ſic demonſtratur. Eſto triangulum rectangulum A B C. rationale, & ducatur A D diuidens angulum rectum A bifariam. Dico A D non eſſe rationalem. Ducatur enim ab angulo D linea D E. perpendicularis ad latus A C hæc ſanè cadet intra triangulum A D C quoniam anguli D A C. D C A

3. ſexti. ſunt acuti. Itaque [a] quoniam eſt B A ad A C. ſicut B D ad D C erunt & componendo B A. A C. ſimul ad A C. ſicut tota B C ad D C. ſed A B. A C ſunt rationales, & tota B C rationalis ex hypotheſi, ergo &



4. ſexti. quarta proportionalis D C rationalis eſt. Quoniam verò triangula A B C. D E C ſunt æquangula, cùm in vtroque ſit angulus rectus, & angulus C communis, [b] erit B C ad C A. ſicut D C ad C E. Quare cùm B C. C A. D C. ſint rationales, erit & quarta C E rationalis, ac per conſequens & reliqua E A. Quia verò ex hypotheſi angulus D A E eſt ſemirectus, & angulus E rectus, [c] eſt & reliquus A D E ſemirectus. Quare cùm anguli D A E. A D E ſint æquales, [d] ſunt & æquales lineæ A E. E D. Ac proinde quadratus ipſius A D [e] duplus eſt quadrati ipſius A E quare cùm A E oſtenſa ſit rationalis, non erit A D rationalis, alioquin dabitur in numeris quadratus quadrati duplus. Quod eſt impoſſibile. Vel cùm A D ſit diameter quadrati à latere A E, & A E ſit rationalis, non erit A D rationalis per vltimam decimi. Quod erat demonſtrandum.

32. primi. 5. primi. 47. primi.

Si libet in numeris rem experiri, ponatur A C 28. A B 21. B C 35. reperietur per regulam trium B D 15. D C 20. & rurſus C E 16. A E 12. Quamobrem & D E erit 12. Quadratus ergo angulum ſecantis A D. erit 288. & ipſe A D. ℞ 288.

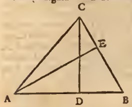
Quoniam verò pleraque non iniucunda problemata proponi poſſunt ad inueniendum quotlibet triangulum in rationalibus, ita vt vel perpendicularis à quolibet angulo in latus oppoſitum ducta, vel etiam linea diuidens baſim vel angulum bifariam, ſit rationalis, opere pretium fore duxi, ea hoc loco explicare. Equidem aliqua horum iam tentauit vir doctiſſimus Chriſtophorus Clauius ad duodecimam, & ad decimam tertiam ſecundi Elementorum, ſed præterquàm de ſola egit perpendiculari, in vnica tantum proportione propoſitum abſoluit, nec vllam profert demonſtrationem. Nos autem & vniuerſaliorem methodum proferemus, & omnia demonſtrando perſequemur, & non ſolùm de perpendiculari, ſed & de linea baſim vel angulum ſecante bifariam nondum vulgata pro

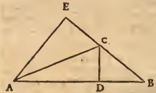
blemata ſubiiciemus. Sed quoniam, vt profeſſi ſumus, nihil quod ab Euclide demonſtratum non ſit ſupponere nobis propoſitum eſt, ne aliò lectorem amandemus, demonſtranda ſunt in primis lemmata quæ ſequuntur.

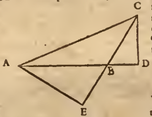
LEMMA PRIMVM.

In omni triangulo ſi duæ perpendiculares à quibuſlibet angulis ducantur ad oppoſita latera, erit vt latus ad latus, ita reciprocè perpendicularis ad perpendicularem.

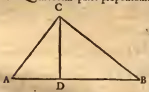
Eſto triangulum A B C. & ab angulis C A ducantur in latera oppoſita A B. C B. perpendiculares C D. A E. dico eſſe vt latus A B ad latus B C ita reciprocè perpendicularem A E ad perpendicularem C D. Nam vel vtraque perpendicularis cadit intra triangulum vt in prima figura; vel altera cadit intra, altera extra, vt in ſecunda figura. Vel vtraque cadit extra vt in tertia figura. Vel ſecunda perpendicularis cadit in ipſum angulum, vnde demittitur prima, vt in quarta figura, & in duobus prioribus caſibus vnica eſt demonſtratio. Quia enim triangula C D B A E B ſunt æquangula, cùm in vtroque ſit angulus rectus, & angulus B communis, ª erit A B ad A E. ſicut C B ad C D. & permutando, erit A B latus, ad latus C B. ſicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quod erat propoſitum. At in tertio caſu, quoniam etiā triangula C D B. A E B. ſunt æquiangula, eo quod in vtroque ſit angulus rectus, ª & anguli ad verticem C B D. A B E. ſint æquales, ſequitur vt prius eſſe A B ad A E. ſicut C B ad C D. Quare & permutando erit A B latus ad latus C B. ſicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quamobrem patet propoſitum. 4. *ſexti.* 15. *primi.*







Denique ſi perpendicularis A C. cadat in ipſum angulum C. vnde demiſſa eſt perpendicularis C D. vt accidit in triangulo rectangulo; erit ob ſimilitudinem triangulorum C A B. C A D. vt latus C B ad latus B A, ſic perpendicularis C D. ad perpendicularem C A. & Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum C A B. C D B. erit vt latus C A ad latus A B. ſic perpendicularis C D ad perpendicularem C B. Quod ipſum etiam demonſtratum eſt ab Euclide octaua ſexti. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.



COROLLARIVM.

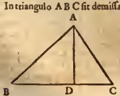
Hinc ſequitur ſi omnia trianguli latera ſint rationalia, & vna perpendicularium rationalis, & reliquas perpendiculares à reliquis angulis demiſſas, fore rationales.

Quia cùm quatuor proportionalium, tres ſint rationales, neceſſe eſt & quartam eſſe rationalem.

LEMMA SECVNDVM.

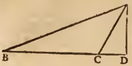
Si à quouis angulo trianguli demittatur in baſim perpendicularis, interuallum quadratorum à lateribus angulum comprehendentibus, æquale eſt rectangulo ſub tota baſi & interuallo ſegmentorum baſis; vel ſub tota baſi & aggregato ſegmentorum baſis contento.

In triangulo A B C ſit demiſſa in baſim B C. perpendicularis A D. quæ primò cadat intra triangulum, dico interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. æquale eſſe rectangulo ſub tota B C. & interuallo ſegmentorum B D. D C. comprehenſo. Quia enim ª quadratus ipſius A B. æquatur quadratis ipſarum A D. D B. & quadratus ipſius A C. æquatur quadratis ipſarum A D. D B. erit exceſſus quadrati A B ſuper quadratum A C. æqualis exceſſui quadratorum ab ipſis A D. D B. ſuper quadratos ab ipſis A D. D C. & auferendo vtrimque communem quadratum ipſius A D. 47. *primi.*



erit interuallum quadratorum ab ipſis B D. D C. æquale interuallo quadratorum ab ipſis A B. A C.
3. 2. poriſ. Porro interuallum quadratorum ab ipſis B D. C D. [1] æquatur rectangulo ſub tota B C. & interuallo ipſorum B D. C D. Igitur & interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquatur rectangulo ſub tota B C. & ſub interuallo ipſarum B D. C D. Quod erat propoſitum.

Deinde cadat perpendicularis A D. extra triangulum. Dico interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquari rectangulo ſub baſi B C. & ſub aggregato ſegmentorum B D. C D. Nam vt prius,
47. primi. quia [2] quadratus A B. æquatur quadratis ipſarum B D. A D. & quadratus A C. æquatur quadratis



ipſarum A D. C D. ablato vtrimque communi quadrato ipſius A D. interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquale eſt
3. 2. poriſ. interuallo quadratorum ab ipſis B D. C D. At interuallum quadratorum ab ipſis B D. C D. [3] æquatur rectangulo ſub B C. interuallo ipſarum B D. C D. & ſub aggregato earundem B D. C D. Igitur interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquatur rectangulo ſub baſi B C. & aggregato ſegmentorum B D. C D. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Neminem moueat quod in huius propoſitionis demonſtratione citetur tertia ſecundi poriſmatum, quam in ſolis numeris, non autem in lineis propoſuimus. Nam vt euidens eſt, propoſitio illa æquè benè lineis competit; atque ipſis numeris; cùm illius demonſtratio ſolis propoſitionibus libri ſecundi Euclidis innitatur.

Sane ex hoc lemmate pulchra elicitur regula ad inuenienda ſegmenta baſis à perpendiculari facta, ſi omnia trianguli latera data ſint. Sit enim in primo caſu A B 30. & A C 26. B C 28. Sumo interuallum quadratorum ab ipſis 30. & 26. puta 224. quem diuido per baſim 28. fit quotiens 8. interuallum ſegmentorum B D. D C. Quare cùm eorundem aggregatum ſit 28. Per Canonem prima primi Diophanti facilè inuenientur ſingula ſegmenta. Nam addendo & adimendo 8. ipſi 28. fient 36. & 20. quorum ſemiſſes 18. & 10. ſunt ipſa ſegmenta B D. D C.

Sit autem in ſecundo caſu A B 30. A C 15. B C 25. ſumo interuallum quadratorum ab ipſis 30. & 15. puta 675. quod diuido per 25. prouenit 27. aggregatum ſegmentorum B D. C D. Quare cum eorum interuallum ſit 25. addendo & adimendo 52. ipſi 27. fiunt 52. & 2. quorum ſemiſſes 26. & 1. ſunt ſegmenta B D. C D. Ipſa autem operatio pulchrè docet an perpendicularis cadat intra triangulum vel extra. Nam ſi diuidendo interuallum quadratorum per baſim, fiat quotiens minor baſi, perpendicularis cadit intra triangulum. Sed ſi fiat quotiens maior baſi, perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIVM.

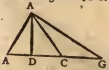
Hinc manifeſtè ſequitur ſi omnia latera trianguli ſint rationalia, & ſegmenta quoque baſis à perpendiculari facta, eſſe rationalia.

Nam cùm latera angulum comprehendentia erunt rationalia, erit & interuallum quadratorum ab ipſis, rationalis numerus, quo diuiſo per baſim rationalem, prodibit vel interuallum, vel aggregatum ſegmentorum baſis rationale. Quare & ipſa ſegmenta rationalia erunt.

LEMMA TERTIVM.

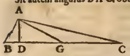
Si ab angulo acuto demittatur intra triangulum perpendicularis in baſim, erit minor proportio cujuſlibet ſegmenti baſeos ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud ſegmentum. Sed ſi ab angulo obtuſo demittatur perpendicularis, erit maior proportio cujuſlibet ſegmenti ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud ſegmentum.

Eſto triangulum A B C. & angulo acuto B A C. demittatur intra triangulum perpendicularis



A D. dico minorem eſſe proportionem B D. ad D A. quàm D A. ad D C. & è conuerſo minorem quoque eſſe proportionem D C. ad D A. quàm D A ad DB. Ducatur enim ad B A. perpendicularis A G. quæ ſanè cadet extra triangulum, quia angulus B A C. ponitur acutus.
8. ſexti. Tum ob triangulum rectangulum, [4] erit B D. ad D A. ſicut D A. ad
8. quinti. D G. ſed eadem DA. ad [5] maiorem D G. habet minorem proportionem, quàm ad minorem D C. Igitur & B D. ad D A. minorem habet rationem quàm D A. ad D C. ſimiliter quia eſt D G. ad D A. vt D A. ad D B. & D C. minoris, ad D A. minor eſt proportio, quàm D G. maioris ad eandem D A. erit & minor proportio D C. ad D A quam DA ad D B. Quod eſt propoſitum.

Sit autem angulus B A C. obtuſus, dico maiorem eſſe rationem B D. ad D A. quàm D. A ad D C.

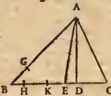


& è conuerſo. Nam ducta ad B A. perpendiculari A G. ea quidem cadet intra triangulum ob angulum rectum B A G. minorem obtuſo B A C. ſed tamen cadet inter D. & C. quia ſcilicet angulus B A D. acutus eſt, ac proinde minor recto B A G. Hoc autem poſito eadem eſt protſus demonſtrandi ratio. Quia enim eſt [1] B D. ad D A. vt D A. ad D G. ſed D A. ad D G. [2] maior eſt proportio, quàm D A. ad D C. erit & B D. ad D A. maior proportio quam D A. ad D C. ſimiliter quia eſt & D G. ad D A. ſic D A. ad D B. ſed D C. ad D A. maior eſt proportio, quàm D G. ad D A. erit quoque D C. ad D A. maior proportio, quàm D A. ad B D. Quod demonſtrandum erat. 8. ſexti. 8. quinti.

LEMMA QVARTVM.

Si ab angulo acuto vel obtuſo demittatur intra triangulum perpendicularis in baſim, itemque linea ſecans angulum biſariam; interuallum laterum angulum comprehendentium, eſt medium proportionale, inter interuallum ſegmentorum baſis à perpendiculari factorum, & inter interuallum ſegmentorum quæ fiunt ab angulum ſecante linea.

Sit triangulum A B C. & in eo angulus B A C. acutus vel obtuſus, à quo demittatur perpendicularis A D. itemque linea A E. ſecans angulum biſariam. Et in maiore latere A B. ſumatur A G. æqualis minori lateri A C. ita vt B G. ſit interuallum laterum, ſumatur etiam in ſegmento B D, linea K D. æqualis ipſi D C, ita vt B K. ſit interuallum ſegmentorum à perpendiculari factorum. Denique ſumatur in B E. linea H E. æqualis ipſi E C. ita vt B H ſit interuallum ſegmentorum à ſecante angulum factorum, dico B G eſſe mediam proportionalem inter K B. H B. hoc eſt eſſe K B ad B G vt B G ad B H. Quia enim in-



teruallum quadratorum à lateribus A B. A C. [3] æquatur rectangulo ſub B C. B K. At idem interuallum quadratorum [4] æquatur rectangulo ſub aggregato laterum A B. A C. & interuallo eorundem B G. erit rectangulum ſub aggregato A B. A C. & ſub B G. æquale rectangulo ſub B C. & B K. [5] Igitur eſt aggregatum ipſarum A B. A C. ad B C. ſicut B K. ad B G. [6] Quoniam verò eſt A B. ad B E. ſicut A C. ad C E, [7] erunt & antecedentes ſimul ad conſequentes, hoc eſt aggregatum ipſarum A B. A C. ad totam B C. ſicut A B. ad B E. vel ſicut A C. ad C E. Igitur vt A B ad B E. vel A C. ad C E. ſic eſt B K. ad B G. Cùm ergo A G. ſit æqualis ipſi A C. & H E. ipſi E C. erit & A G. ad H E. ſicut A B. ad B E. & ſicut B K. ad B G. Cùm igitur ſit vt tota A B. ad totam B E, ſic ablata A G. ad ablatam H E. [8] erit & reliqua B G. ad reliquam B H, ſicut A B. ad B E. vel B K. ad B G. Quamobrem eſt B K. ad B G. ſicut B G ad B H. Quod demonſtrandum erat. Lemma ſecundi. 3. 2. periſ. 16. ſexti. 1. ſexti. 12. quinti. 19. quinti.

COROLLARIVM.

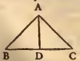
Hinc ſequitur primo interuallum ſegmentorum à perpendiculari factorum, maius eſſe interuallo eorum quæ fiunt à linea ſecante angulum, nempe B K maiorem eſſe quàm B H. Quia eſt B K ad B G vt A B. A C ſimul ad B C [9] ſed A B. A C. ſimul ſunt maiores quàm B C. ergo & B K maior eſt quàm B G. ac proinde & B G maior eſt quàm B H. Quamobrem multo magis B K maior eſt quàm B H. 20. primi.

Secundò ſequitur maius ſegmentum eorum quæ fiunt à linea ſecante angulum, puta B E, minus eſſe maiore eorum quæ fiunt à perpendiculari, puta ipſo B D. & contra E C maius eſſe quàm D C. Quia enim B K maior eſt quàm B H. erit reliqua K C. minor quàm reliqua H C. quare & horum ſemiſſes ſumendo, erit D C. minor quàm E C. Igitur E cadit inter B & D. ac proinde B E minor eſt quàm B D.

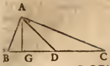
Tertiò, ſequitur interuallum E D (quo B D. ſuperat B E. vel quo E C. ſuperat D C) eſſe dimidium ipſius H K interualli interuallorum. Quia enim vt eſt H C. ad E C. ſic ablatus K C. ad ablatum D C. nam vtrobique eſt ratio dupla, [10] erit & reliquus H K. ad reliquum E D. in eadem ratione dupla. 19. quinti.

LEMMA QVINTVM.

In triangulo rectangulo, ſi ab angulo recto ducatur linea diuidens hypotenuſam biſariam, erit ducta linea æqualis dimidio hypotenuſæ.



In triangulo rectangulo A B C. ab angulo recto B A C ſit ducta linea A D diuidens B C. biſariam. Dico A D æqualem eſſe ipſi B D vel D C. Nam ſint primo A B. A C æquales. [11] Ergo & anguli A B C. A C B æquales erunt, & [12] quilibet eorum dimidium erit recti, cùm B A C ſit rectus. Sed & angulus B A D. eſt dimidium recti eadem de cauſa. Igitur cùm in triangulo B A D. anguli B A D. A B D. ſint æquales, [13] erunt & latera B D. A D. æqualia. Quod erat propoſitum. 5. primi. 32. primi. 6. primi.



Deinde A B. A C. ſint inæquales, ſit A C. maior quàm A B. Quia ergo
25. primi. latera A D. D C. trianguli A D C. æqualia ſunt lateribus A D. D B
trianguli A B D. & baſis A C. baſi A B maior eſt, , erit angulus A D C.
angulo A D B maior. Quare A D C obtuſus eſt, ac proinde perpendi-
cularis A G. cadit inter B & D. ne in eodem triangulo alter angulus ſit
32. primi. rectus, alter obtuſus [2] & tres anguli trianguli ſint duobus rectis ma-
5. ſecundi. iores. Itaque quia B C Diuiſa eſt bifariam in D. & inæqualiter in G. [3] quadratus ſemiſſis D C.
8. ſexti. æqualis eſt rectangulo ſub B G. G C. & quadrato ipſius G D. At quoniam [4] A G. eſt media propor-
16. ſexti. ſionalis inter B G. G C. rectangulum ſub B G. G C [5] æquatur quadrato ipſius A G. Igitur qua-
47. primi. dratus ipſius D C. æquatur quadratis ipſarum A G. G D. [6] ſed eiſdem quadratis æquatur quadratus
ipſius A D. ergo quadrati ipſorum A D. D C. æquales ſunt inter ſe, ac per conſequens A D. æqua-
tur ipſi D C. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA SEXTVM.

In oxygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo acuto diuidens baſim bifariam maior eſt dimidio baſis.



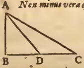
In triangulo oxygonio A B C. ab angulo acuto B A C. ducta ſit A D diuidens
baſim B C. bifariam, dico A D maiorem eſſe ipſa B D. vel D C. Nam primo ſint
A B. A C. æquales, [7] erunt igitur & anguli B C. æquales. Quare cùm A C. C D.
5. primi. æquales ſint ipſis A B. B D. & anguli B C. æquales, [8] erunt & reliqui anguli
4. primi. triangulorum A B D. A D C. æquales, & anguli ad D. recti. Itaque ſi A D. non
eſt maior quàm B D. eſt vtique vel æqualis, vel minor; ſi æqualis, [9] erunt &
5. primi. anguli D B A. D A B. æquales, & eadem ratione angulus D A C. æqualis erit
32. primi. angulo C. Quare totus angulus B A C. æquabitur duobus angulis B C. ac proinde [10] cùm tres anguli
trianguli A B C. æquentur duobus rectis, erit angulus B A C. rectus contra hypotheſim.
18. primi. Si autem A D. ponatur minor quàm B D. [11] erit angulus B minor angulo B A D. & eadem de cauſa
angulus C. minor angulo D A C. Quare totus B A C. maior erit vtroque B. C. ſimul, ac proinde
angulus idem B A C maior erit recto, contrà hypotheſim. Quare A D. non eſt æqualis ipſi B D.
nec minor. Igitur maior eſt. Quod erat propoſitum.

Deinde ſit A C. maior quàm A B. Cùm ergo A D. D C. ſint æquales ipſis A D. D B.



& baſis A C. ſit maior baſi A B. [12] erit angulus A D C. maior
25. primi. angulo A B G. ac per conſequens angulus A D C. obtuſus eſt. Quare
perpendicularis A G. cadit inter B & D. Itaque quoniam B C. ſecta
5. ſecundi. eſt æqualiter in D. & inæqualiter in G. [13] erit quadratus ipſius D C.
æqualis rectangulo ſub B G. G C. & quadrato G D. ſed ob angulum
Lemma tertium. acutum B A C. [14] minor eſt ratio B G. ad A G. quam ipſius A G.
ad G C. ac proinde quadratus ipſius A G. maior eſt rectangulo ſub
B G. G C. vt oſtendit Clauius ad vigeſimam ſeptimi demonſtratione, quæ non minus lineis
competit quàm numeris. Igitur quadrati ipſarum A G. G D. maiores ſunt quadrato ipſius D C. At-
47. primi. qui quadrati ipſarum A G. G D. [15] æquantur quadrato ipſius A D. Ergo quadratus ipſius A D.
maior eſt quadrato ipſius D C. ac proinde A D. maior eſt quàm D C. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

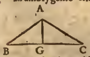


*Non minus vera eſt hæc propoſitio in triangulo rectangulo vel amblygonio, dum linea A D duca-
tur ab vno acutorum angulorum. Sit enim angulus A B C. rectus vel obtuſus,
& ducta ſit A D. diuidens B C bifariam, dico nihilominus A D. maiorem
17. primi. eſſe quàm B D. & quidem manifeſtum eſt, [16] cùm A D. maiorem angulum
B. ſubtendat.*

LEMMA SEPTIMVM.

In amblygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo obtuſo diuidens baſim bifariam, minor eſt dimidio baſis.

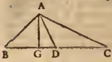
In amblygonio triangulo A B C. ducta ſit ab obtuſo angulo linea A D diuidens B C. bifariam.



Dico A D. minorem eſſe quàm B D. vel D C. Nam primo A B. A C. po-
5. primi. nantur æquales, [17] erunt ergo anguli B. C. æquales, & vt ſuprà oſtendetur
angulos ad D. eſſe rectos. Itaque ſi A D. non eſt minor quàm B D. erit
vtique vel æqualis, vel maior. Quod ſi ponatur, [18] ergo angulus B æqua-
5. primi, & 18. primi. lis erit angulo B A D. vel maior & angulus C. angulo D A C. Quare vter-
que B C ſimul æquabitur toti B A C. vel maior erit quàm B A C. Quare cùm B A C. ſit obtuſus,
erunt tres anguli trianguli A B C. æquales duobus obtuſis, ac proinde maiores duobus rectis. [19]
32. primi. Quod eſt impoſſibile. Igitur A D non eſt æqualis ipſi B D. neque maior. Quamobrem relinqui-
tur vt ſit minor. Quod eſt propoſitum.

Deinde

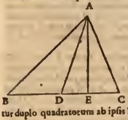
Deinde ſit A C maior quàm A B. Igitur vt prius oſtendetur angulum A D C. obtuſum eſſe, ac



proinde perpendicularis A G. cadet inter B & D. Quoniam itaque B C. ſecta eſt æqualiter in D. & inæqualiter in G. ' erit quadratus ipſius D C æqualis rectangulo ſub B G. G C. & quadrato ipſius G D. 5. ſecundi.
At quia ' maior eſt proportio B G ad A G. quàm A G. ad G C. quadratus ipſius A G minor eſt rectangulo ſub B G. G C. vt oſtendit Lemma tertium.
Clauius ad vigeſimam ſeptimi, demonſtratione cuilibet quantitati conueniente. Igitur quadrati ipſarum A G. G D. minores ſunt quadrato ipſius D C. ſed quadrati ipſarum A G. G D. ' æquantur quadrato ipſius A D. ergo & quadratus ipſius A D. minor eſt quadrato ipſius D C. ac proinde A D. minor eſt quàm D C. Quod demonſtrandum fuit. 47. primi.

LEMMA OCTAVVM.

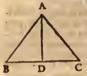
Si à quolibet angulo trianguli ducatur linea diuidens baſim bifariam, erunt quadrati laterum dictum angulum comprehendentium, ſimul dupli quadratorum, tam ex dimidia baſi quam ex ducta linea ortorum.

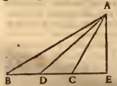


In triangulo A B C. à quolibet angulo A. ducatur A D. diuidens B C. bifariam, dico quadratos ſimul ipſarum A B. A C. duplos eſſe quadratorum ab ipſis A D. B D. Nam ducta perpendiculari A E. erunt quadrati ipſarum A B. A C. æquales quadratis ſegmentorum B E. E C vnà cum duplo quadrati A E. ſed quadrati B E. E C. inæqualium ſegmentorum, ' dupli ſunt quadratorum à dimidia B D. & ab intermedia D E. Igitur quadrati ip- 9. ſecundi.
ſarum A B. A C. dupli ſunt quadratorum ab ipſis B D. D E. A E. Atqui duplum quadratorum ab ipſis D E. A E. ' æquatur duplo quadrati ipſius A D. Igitur quadrati ipſarum A B. A C. æquan- 47. primi.
tur duplo quadratorum ab ipſis B D. A D. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Sic demonſtratur hæc propoſitio à Pappo lib. 7. propo. 122. Duo tamen alij caſus conſiderari poſſunt. Primus, cùm latera A B. A C. ſunt æqualia, ac per conſequens linea A D. eſt perpendicularis ad baſim; & tunc quia quadrati laterum A B. A C. æquantur quadratis ſegmentorum B D. D C. & duplo quadrati ipſius A D. at quadrati ipſarum B D. D C. æquales ſunt, patet quadratos laterum A B. A C. duplos eſſe quadratorum ab ipſis A D. B D. Quod eſt propoſitum.



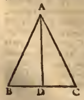


Secundus caſus eſt cùm perpendicularis A E. cadit extra triangulum. Et tunc quia quadrati laterum A B A C. ' æquantur quadratis ipſarum 47. primi.
B E. C E. & duplo quadrati ipſius A E. & quoniam B C. ſecta eſt bifariam in D. & adiecta ei linea C E. ac proinde ' quadrati ipſarum 10. ſecundi.
B E. C E. dupli ſunt quadratorum ab ipſis B D. D E. patet quadratos laterum A B. A C. duplos eſſe quadratorum B D. D E. A E. at duplum quadratorum D E. A E. æquatur duplo quadrati ipſius A D. Igitur quadrati laterum A B. A C. dupli ſunt quadratorum ab ipſis B D. A D. Ac proinde ex omni parte patet propoſitum.

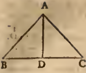
His præmiſſis ſequentia problemata demonſtrabimus, omnes triangulorum ſpecies perſequentes, earum ſcilicet diuiſione tum ſecundum latera, tum ſecundum angulos conſiderata.

PROBLEMA PRIMVM.

Triangulum Iſoſceles conſtituere in rationalibus, ſiue oxygonium, ſiue amblygonium, vt perpendicularis ab angulo à lateribus æqualibus contento ducta in tertium latus inæquale, ſit rationalis.



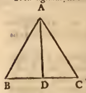
Sit primo conſtituendum triangulum Iſoſceles oxygonium A B C. cuius omnia latera ſint rationalia, & perpendicularis quoque A D. ſit rationalis. Ponatur quodlibet æqualium laterum A B. A C. quilibet numerus, puta 5. & ipſius 5. quadratus 25. diuidatur per octauam ſecundi Diophanti in duos quadratos, puta 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Et quoniam vt conſtat ex prima parte demonſtrationis lemmatis ſexti A D. maior eſt dimidio baſis, ponatur A D. 4. D C. 3. erit ergo tota baſis B C 6. & factum eſt quod proponebatur, vt manifeſtum eſt.



Deinde ſit conſtituendum triangulum amblygonium Iſoſceles A B C. cuius omnia latera ſint rationalia , & perpendicularis A D. ſit rationalis. Ponatur vt prius A B. vel A C. quilibet numerus , puta 5. & ipſius 5. quadratus 25. diuidatur in duos quadratos 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Tunc quia per primam partem demonſtrationis lemmatis ſeptimi A D. minor eſt dimidio baſis , ponetur A D 3. D C 4. & erit tota baſis B C. 8. & factum erit quod requirebatur.

SCHOLIVM.

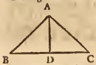
Non agimus de triangulo æquilatero , quia in eo perfici non poteſt problema. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. dico ſi latera illius ponantur rationalia , perpendicularem, A D. eſſe non poſſe rationalem quia enim A D. diuidit B C. bifariam, cùm



20. ſexti. *A C. ſit dupla ipſius D C. [a] & quadrati ſint in ratione duplicata laterum, erit quadratus ipſius A C. quadruplus quadrati ipſius D C. Quare cùm quadrati ipſarum A D. D C. ſiat æquales quadrato ipſius A C. erit quadratus ipſius A D. $\frac{3}{4}$. quadrati ipſius A C. ac proinde quadratus ipſius A C. ad quadratum ipſius A D. ſe habebit vt 4. ad 3. Quare ſi A C. & A D. ponantur rationales*

24. octaui. *4. ad 3. habebit rationem quadrati ad quadratum, [b] ac proinde cùm 4. ſit quadratus erit & 3. quadratus. Quod eſt abſurdum. Quamobrem A C. A D. non poſſunt ſimul eſſe rationales , & longitudine commenſurabiles.*

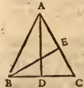
Non agimus etiam de triangulo rectangulo Iſoſcele , ob eandem cauſam. Etenim ſi latera A B. A C. ponantur æqualia , & angulus B A C. rectus , erit perpendicularis A D. æqualis dimidio baſis D C. vt conſtat ex prima parte demonſtrationis lemmatis quinti. Quare cùm quadratus ex A C. ſit quadratis ipſarum A D. D C. æqualis , quadratus ex A C. duplus eſt quadrati ex A D. & quadratus ex A D ad quadratum ex A C. eſt vt 1. ad 2. Quare ſi A D. A C. ponantur rationales habebit 1. ad 2. rationem quadrati ad quadratum,



ac proinde cùm 1. ſit quadratus [c] erit & 2 quadratus. Quod eſt abſurdum. Vel cùm A D. ſit latus

24. octaui. vltima decimi. *quadrati , cuius A C. eſt diameter , [d] latus erit commenſurabile coſtæ. Quod eſt impoſſibile.*

Porro ſic conſtituto triangulo oxygonio vel amblygonio , non ſolùm A D. ducta ab angulo à lateribus æqualibus contento , eſt rationalis , ſed & quælibet alia perpendicularis , ducta ab alio angulo , puta B E. vt conſtat ex Corrollario lemmatis primi. Eſt enim vt A C. ad B C. ſic A D. ad B E. Quare poſita A C. 5. B C. 6. A D. 4. inuenietur per regulam trium B E. 4 $\frac{4}{5}$. in triangulo oxygonio. At in amblygonio poſita A C. 5. B C. 8. A D. 3. inuenietur rurſus per regulam proportionum , B E. 4 $\frac{4}{5}$. Quod ſemel monuiſſe ſufficiat , vt deinceps quotieſcumque conſtituerimus triangulum quodlibet in rationalibus , & oſtenderimus vnam perpendicularium eſſe rationalem , intelligatur & alias perpendiculares eſſe rationales. Quod ſi lubeat & latera omnia trianguli , & perpendiculares exhiberi in numeris integris , oportet omnia multiplicare per communem denominatorem fractionum quæ interueniunt.



Vt in dato exemplo , ſi omnia ducas in 5. fient in oxygonio triangulo A B. A C. 25. B C. 30. A D. 20. B E. 24. At in amblygonio , erit A B. vel A C. 25. B C. 40. A D. 15. B E. 24. Attamen B E. intelligetur cadere extra triangulum.

Poteſt autem quadrupliciter conſtrui hoc problema. Primo ſi præſcribatur numerus vnius æqualium laterum , vt iam docuimus.

Secundò ſi præſcribatur numerus baſeos. Vt ſi ponatur baſis B C. 10. Tunc enim ſumpto ſemiſſe ipſius 10. puta 5. cuius quadratus 25. quæram pro quadrato perpendicularis , quadratum numerum qui ad 25. additus quadratum faciat. Sed ſi oxygonium triangulum eſt conſtituendum , oportebit huiuſmodi quadratum maiorem eſſe quàm 25. & ſi vtaris Canone ad vndecimam ſecundi Diophanti tradito , infinitos tales quadratos reperies. Nam quærendi erunt duo numeri , quorum mutuo ductu fiat 25. ita tamen vt interuallum eorum ſit maius quàm 10. quos ſi arte certa conſequi velis , pone minorem 1 N. erit maior $\frac{25}{1N}$. horum interuallum $\frac{25}{1N}$. − 1. N. maior eſt quàm 10. & omnia ducendo in 1 N. & ſupplendo defectum , fit tandem 25. maior quàm 1 Q. + 10 N. Quæ æquatione per approximationem reſoluta, fit 1 N. non maior quàm 2. ſumet ergo pro minore quemlibet numerum qui non excedat 2. quales ſunt 1. 1 $\frac{1}{3}$. 1 $\frac{1}{2}$. 2. & infiniti alij. Verbi gratia ſume 1. erit maior 25. quorum interuallum 24 cuius ſemiſſis 12. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus 144. additus quadrato ipſius D C. puta ipſi 25. facit 169. quadratum ipſius A C. Quare A C. vel A B. eſt 13. B C. 10. A D. 12. Sed ſi amblygonium triangulum conſtituendum eſt , poſita vt prius B C. 10. quærendus erit quadratus minor quàm 25. qui ad 25. additus quadratum faciat. Sunt ergo inueniendi duo numeri quorum mutuo ductu fiat 25. ita vt eorum interuallum ſit minus quàm 10. quos ſi ponas vt prius 1 N. & $\frac{25}{1N}$. fiet tandem 25. minor quàm

1 Q. + 10 N. vnde fit 1 N. non minor quàm $2\frac{1}{4}$. ſumes ergo pro minore quemlibet numerum maiorem quàm $2\frac{1}{4}$ dum is ſit minor quàm 5. nam ſi poneretur maior quàm 5. non eſſet iam minor duorum quæſitorum, ſed maior vt euidens eſt. Sume igitur verbi gratia $2\frac{1}{2}$. pro minore, erit maior 10. horum interuallum $7\frac{1}{2}$. cuius ſemiſſis $3\frac{3}{4}$ erit perpendicularis A D. nam eius quadratus $\frac{225}{16}$. additus ad 25. quadratum ipſius D C. facit $\frac{625}{16}$ quadratum ipſius A C. Quare A C. vel A B. eſt $6\frac{1}{4}$. B C. 10. A D. $3\frac{3}{4}$. & ducendo omnia in 4. fiet A C vel A B. 25. B C. 40. A D. 15.

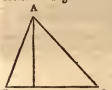
Tertiò, præſcribi poteſt numerus perpendicularis A D. vt ſi ponatur 12. tuncque quærendus erit quadratus, pro quadrato ipſius D C. qui ad 144 additus quadratum faciat; ſed ſi iubeas oxygonium facere triangulum, quæremus quadratum minorem quàm ipſe 144. ſin autem amblygonium conſtituendum ſit triangulum, quæremus quadratum maiorem quàm 144. Quod vtrumque, vt prius, perficietur.

Quartò, denique præſcribi poteſt, numerus perpendicularis B E vt pote 24. & tunc ſumo hypotenuſam cuiuſlibet trianguli rectanguli, puta 5. & ſtatuo in Numeris, ponoque quodlibet æqualium laterum A B. A C. 5 N. & ſi oportet facere triangulum oxygonium pono ſemiſſem baſis puta D C. minus laterum circa rectum, puta 3 N. erit ergo tota baſis 6 N. Quamobrem ' cùm ſit vt B C. 6 N. ad A C. 5 N. ſic B E. 24. ad A D. inuenietur A D. 20. cuius quadratus 400. cui addendo 9 Q. quadratum ipſius D C. fit vtique 400 + 9. Q. æqualis quadrato ipſius A C. at idem quadratus eſt 25. Q. ergo 25. Q. æquantur 400. + 9. Q. & tandem 16 Q. æquantur 400. & fit 1 N. 5. eſt ergo A B. vel A C. 25. B C. 30. A D. 20. Sed ſi conſtituendum eſt triangulum amblygonium, poſita A C. vel A B. 5 N. vt prius, pono D C. maius laterum circa rectum, puta 4 N. ergo tota B C. eſt 8 N. Tunc facio vt 8 N. ad 5. N. ita 24. ad aliud, & fit A D. 15. cuius quadratus 225. cui addendo 16. Q quadratum ipſius D C fit 225 + 16 Q. æqualis 25 Q. quadrato ſcilicet ipſius A C. & tandem 225. æquantur 9 Q. vnde fit 1 N. 5. eſt ergo A C. vel A B. 25. B C. 40. A D. 15. intelligendum tamen B E cadere extra triangulum. *Lemma primum.*

Cæterùm non agimus de ſegmentis baſis à perpendiculari factis, quia cùm triangulum eſt rationale; & ſegmenta illa ſunt rationalia per corollarium ſecundi lemmatis.

PROBLEMA SECVNDVM.

Triangulum oxygonium ſcalenum conſtituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo acuto demiſſa ſit rationalis.



Ponatur latus A C. quilibet numerus, vt pote 10. cuius quadratus 100. diuidatur in duos quadratos, vt pote in 64. & 36. quorum latera 8. & 6. & ponatur A D maius horum laterum, puta 8. & D C. minus puta 6. & eſto B D. 1 N. quadrati ergo ipſarum B D. A D, puta 1 Q. + 64. æquantur quadrato ipſius A B. Quare vt A B. ſit rationalis, oportet 1 Q. + 64. æquari quadrato. Quoniam verò angulus A ponitur acutus ' eſt ratio D C ad A D minor ratione A D. ad B D. ac proinde productus ex B D. in D C. puta 6 N. minor eſt quadrato ipſius A D. qui eſt 64. vt oſtendit Clauius ad vigeſimam ſeptimi. Ergo cùm diuidendo 64. per 6. fiat $10\frac{2}{3}$. patet 1 N. minorem eſſe debere quàm $10\frac{2}{3}$. Aliter reperietur Numeri determinatio, hac arte ſcilicet. Quia vt trianguli omnes anguli ſint acuti, ' oportet quadratum cuiuſlibet lateris minorem eſſe aggregato quadratorum ab alijs lateribus. Hoc autem vt ſit, oportet quadratum cuiuſlibet lateris minorem eſſe ſemiſſe aggregati quadratorum à ſingulis lateribus, ſumo aggregatũ quadratorũ à ſingulis lateribus, eſt autem quadratus A C. 100. quadratus B C. 1 Q. + 36 + 12 N. quadratus A B 1 Q. + 64. quorum ſumma 2 Q. + 200 + 12 N. cuius ſemiſſis 1 Q. + 100. + 6 N. quem euidens eſt maiorem eſſe tum quadrato ipſius A C. 100. tum quadrato ipſius A B 1 Q. + 64. Reſtat vt etiam 1 Q. + 100 + 6 N. ſit maior quam 1 Q. + 36 + 12 N. Quare ablatis vtrimque æqualibus, oportet vt 64. ſit maior quàm 6 N. Quare diuiſo 64. per 6. fit 1 N. minor quàm $10\frac{2}{3}$. vt prius. Itaque quoniam fingentes latus quadrati 1 Q. + 64. ponemus illud 8. − tot numeris, à quorum quadrato auferendo 1. per reſiduum diuidatur ſedecuplum ipſorum numerorum, oportebit hunc quotientem minorem eſſe quàm $10\frac{2}{3}$. Ponatur ergo numerus Numerorum 1 N. fiet $\frac{16 N}{1 Q - 1}$. minor quàm $10\frac{2}{3}$. & omnia ducendo in 1 Q. − 1. & rurſus in 3. fient tandem 48 N. + 32. minores quàm 32 Q. ſeu 3 N. + 2. minores quàm 2 Q. qua æquatione reſoluta cùm fiat 1 N. 2. patet fingendum latus quadrati 8. − tot Numeris qui excedant 2. Ponatur 8. − 5 N. fiet 1 N. $3\frac{1}{3}$. tanta erit B D. Quare A B eſt $8\frac{2}{3}$. A C 10. B C. $9\frac{1}{3}$. A D. 8. *Lemma tertium.* *13. ſecundi.*

SCHOLIVM.

Hìc etiam loco vnius laterum, præſcribi poſſet ipſa perpendicularis A D. vt puta 12. Tunc ergo quæro duos quadratos qui additi ad 144. quadratum ipſius 12. faciant quadratum, hac tamen lege vt vel vtriuſque quæſitorum latus ſit minus quàm 12. vel ſi alterum ſit maius alterum minus, ' maioris ad 12. ſit minor ratio, quàm ipſius 12. ad minus vt videlicet conſtituatur triangulum oxygonium. Quadratis quorum latera minora ſunt quàm 12. ſunto 81. & 25. Poſita ergo A D 12. erit B D. 5. D C. 9. atque adeo tota B C.

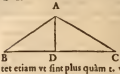
14: At A B. fiet 13. A C. 15. Quadrati verò 256. & 25. ſi ſumantur , quia minor eſt ratio 16. ad 12. quàm 12. ad 5. Rectè ſtatuetur B D. 5. D C. 16. ac proinde tota B C. 21. erit autem A B. 13. A C. 20.

PROBLEMA TERTIVM.

Triangulum amblygonium ſcalenum conſtituere in rationalibus , vt perpendicularis ab angulo obtuſo demiſſa ſit rationalis.

Ponatur A C. vt ſuprà quilibet numerus 10. cuius quadrato in duos quadratos diuiſo , ponatur D C. alterum latus 6. & A D. alterum 8. & ſit B D 1 N. fiet ergo vt prius 1 Q. + 64. æquandus

Lemma tertium.



quadrato. Sed quia ob angulum obtuſum [a] maior eſt ratio B D ad A D. quàm A D. ad D C. productus ex B D. in D C. puta 6 N. maior eſſe debet quadrato ipſius A D. 64. Quare 1 N. debet eſſe maior quàm 10 $\frac{2}{3}$. ſi ergo quæras vt ſuprà determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum , inuenies fingendum eſſe latus illud 8. − tot Numeris qui ſint minus quàm 2. ſed oportet etiam vt ſint plus quàm 1. vt videlicet eorum quadratus excedat 1 Q. Pone ergo 8. − 1 $\frac{3}{5}$ N. fiet 1 N. 19 $\frac{1}{5}$. tanta erit B D. ergo tota B C. 25 $\frac{1}{5}$. A B. 20 $\frac{4}{5}$. A C. 10. A D. 8.

Vel ponatur A D. quilibet numerus vtpote 12. & quærantur duo quadrati , vt quilibet additus ad 144. quadratum ipſius 12. faciat quadratum , ita tamen vt cujuſlibet quæſitorum quadratorum latus ſit maius quàm 12. vel ſi alterum ſit maius , alterum minus , maius ad 12. maiorem habeat rationem , quàm 12. ad minus , ad hoc vt angulus B A C. conſtituatur obtuſus per lemma tertium, ſumi poſſunt maiora latera 35. & 16. nam addito quadrato ex 35. ad quadratum ex 12. fit quadratus ex 37. & eidem addendo quadratum ex 16. fit quadratus ex 20. Poſita ergo A D. 12. erit B D. 16. D C. 35. tota B C. 51. A B. 20. A C. 37. ſi autem ſumantur latera 35. & 9. quia maior eſt ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 9. erit B D. 9. D C. 35. tota B C. 44. A C. 37. A B. 15. Vel denique ſi ſumas latera 35. & 5. quia etiam maior eſt ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 5. fiet B D. 5. D C. 35. tota B C. 40. A C. 37. A B. 13.

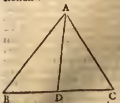
SCHOLIVM.

Animaduerſione dignum eſt, poſita perpendiculari 12. formari poſſe ſex diuerſa triangula in integris, quorum duo ſunt oxygonia quæ in ſcholio præcedentis expoſuimus , nimirum 15. 14. 13. & 21. 20. 13. tria ſunt amblygonia quæ hic attulimus , primum 51. 37. 20. ſecundum 44. 37. 15. tertium 40. 37. 13. Reſtat vnum rectangulum , cuius latera 25. 20. 15. ſi videlicet ſegmenta hypotenuſæ ponantur 9. & 16. inter quæ perpendicularis 12. eſt media proportionalis per octauam ſexti.

Cæterùm non propoſuimus inuenire triangulum rectangulum ſcalenum in rationalibus , vt perpendicularis ab angulo recto demiſſa ſit rationalis. Quia id accidit cuicunque triangulo rectangulo rationali, vt conſtat ex Corollario lemmatis primi , vim ſuam mutuante à quarta parte demonſtrationis ipſius lemmatis.

PROBLEMA QVARTVM.

Triangulum ſcalenum , oxygonium , vel amblygonium conſtituere in rationalibus , vt ab angulo acuto , vel obtuſo ducta linea diuidens baſim bifariam , ſit rationalis.

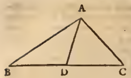


Lemma ſextum.
Lemma octauũ.

Sit triangulum oxygonium A B C. In quo ducta ſit A D. diuidens baſim B C. bifariam. Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compoſitum , vt 13. compoſitum ex 9. & 4. quorum latera 3. & 2. & minus latus 2. tribue dimidio baſis D C. maius verò 3. tribue lineæ A D. [a] quia ſcilicet ob angulum acutum A D. debet eſſe maior quàm D C. [b] Tum verò quia quadrati ipſarum A B. A C. ſunt dupli quadratorum ab ipſis A D. D C. cùm ſumma quadratorum ab ipſis A D. D C. ponatur 13. erit ſumma quadratorum ab ipſis A B. A C. 26. Porrò quia 13. componitur ex duobus quadratis, quorum latera 3. & 2. duplum ipſius 13. puta 26. [c] componetur etiam

7. 2. poriſ. ex duobus quadratis , quorum latera 5. & 1. æqualia ſcilicet tum ſummæ , tum interuallo laterum quadratorum ex quibus 13. componitur. Sed ſi tribuas 5. ipſi A B. & 1. ipſi A C. manifeſtum ſequetur abſurdum. Quia enim A B. ponitur ſumma ipſorum 3. & 2. & A C. eorundem interuallum. At B C ponitur duplum minoris 2. puta 4. patet addendo duplo minoris interuallum numerorum,

10. primi. fieri ſummam numerorum , ac proinde latera A C. B C. ſimul æqualia fore reliquo A B. [d] Quod eſt abſurdum. Supereſt ergo vt numerum 26. compoſitum ex duobus quadratis 25. & 1. rurſus diuidamus in duos alios quadratos per decimam ſecundi Diophanti. Ponatur alterum latus 5 − 1 N. alterum 1 + 2 N. fiet ſumma quadratorum 26 + 5 Q. − 6 N. æqualis 26. vnde fiet 1 N. $\frac{6}{5}$. ſunt ergo quæſita latera 3 $\frac{4}{5}$. & 3 $\frac{2}{5}$. Poſita igitur A D. 3. erit A B. 3 $\frac{4}{5}$. A C. 3 $\frac{2}{5}$. & B C. 4. vel omnia ducendo in 5. fiet A B. 19. A C. 17. B C. 20. ipſa A D. 15.



Contraria ratione in triangulo amblygonio A B C. ſtatuemus D C. 3 & A D. 2. [6] quia A D. minor eſt quàm D C. Tum vt prius quia quadrati ipſarum A D. D C. ponuntur 13. [8] erunt quadrati ipſarum A B. A C. 26. qui cùm ſit duplus numeri ex duobus quadratis compoſiti, [7] componetur & ipſe ex duobus quadratis, ſed maius latus 5. eſt ſumma ipſarum A D. B C. & minus latus eſt interuallum earundem, puta 1. Quare ſi A B ponas 5. A C. 1. cùm maioris duarum A D. D C. dupla ſit B C. ſi aggregato earundem A D. D C. puta ipſi A B. addas earundem interuallum A C. fiet aggregatum ipſarum A B. A C. [2] æquale ipſi B D. [9] Quod eſt abſurdum. Quare rurſus 26. diuidendus eſt in duos alios quadratos, vt factum eſt ſuprà, ſint ergo eorum latera $\frac{19}{5}$. & $\frac{17}{5}$. Poſita ergo A D. 2. fiet B C. 6. A B. $\frac{19}{5}$. A C $\frac{17}{5}$. vel omnia ducendo in 5. erit A B. 19. A C. 17. B C. 30. A D. 12.

Lemma ſeptimū. *Lemma octauum.* *7. 2. poriſ.* *23. 1. poriſ.* *20. primi.*

SCHOLIVM.

Euidens eſt tam in oxygonio, quàm in amblygonio ipſas A D. D C. poni poſſe in qualibet proportione, dum ſemper habeatur ratio lemmatum 6. & 7.

Deinde ſicut prius præſcribuntur ipſæ A D. D C. ita poſſunt prius ipſæ A B. A C. præſcribi, vt ex ipſis indagentur A D. D C. verbi gratia ponatur A B. 3. A C. 1. erit ſumma quadratorum 10. cuius ſemiſſis 5. [6] æquatur quadratis ipſarum A D. D C. ſed & ipſe 5. componitur ex duobus quadratis, [7] quia eſt ſemiſſis numeri ex duobus quadratis compoſiti, ſed latera ipſorum non poſſunt applicari ipſis A D. D C. ob cauſas ſuprà allatas. Quare oportet rurſus diuidere 5. in duos alios quadratos, ponantur eorum latera 1 + 7 N. & 2 − 5 N. fiet ſumma quadratorum 5 + 74 Q. − 6 N. æqualis 5. vnde erit 1 N. $\frac{3}{37}$. Sunt ergo latera quadratorum 1 $\frac{21}{37}$. & 1 $\frac{22}{37}$. Quare poſita A B. 3. A C. 1. ſi libet facere triangulum oxygonium, pones A D. 1 $\frac{22}{37}$. B D. 1. $\frac{21}{37}$. vnde tota B C. fiet 3. $\frac{6}{37}$. At ſi velis conſtituere amblygonium, pones A D. 1 $\frac{21}{37}$. B D. 1 $\frac{22}{37}$. totam B C. 3 $\frac{6}{37}$.

Lemma octauū. *6. 2. poriſ.*

☞ Moneo tamen ſi abſque vlla cautione numeri ex duobus quadratis compoſiti, rurſus diuidantur in alios duos quadratos per ſolum artificium decimæ ſecundi Diophanti, accidere poſſe vt in idem abſurdum incidatur, ad quod vitandum huiuſmodi ſubdiuiſio inſtituitur, vt ſcilicet inueniantur latera quadratorum quæ minimè poſſint applicari lateribus trianguli. Quare tutius erit huiuſmodi numeros diuidere per artificium duodecimæ quinti, in duos quadratos, quorum exiguum ſit interuallum, ſic enim in tale incommodum nunquam incurretur.

Cæterùm propoſui triangulum ſcalenum, non autem Iſoſceles inuenire, quia cùm in triangulo Iſoſcele linea diuidens baſim bifariam, ſit perpendicularis ad baſim, non differret huiuſmodi problema à primo.

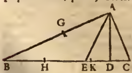
Non propoſui etiam de triangulo rectangulo ſcaleno, quia in omni triangulo rectangulo rationali problema perficitur, cùm linea diuidens hypotenuſam bifariam ſit ſemper æqualis dimidio hypotenuſæ per lemma quintum.

Superſunt elegantiſſima duo problemata quibus quæritur triangulum tum oxygonium, tum amblygonium, vt acuto vel obtuſo angulo bifariam ſciſſo, numerus angulum ſecantis ſit rationalis; quæ ſanè magis accedunt ad quæſtionem Diophanti, quamuis ſint longè ſubtiliora.

PROBLEMA QVINTVM.

Triangulum oxygonium inuenire in rationalibus, vt numerus angulum acutum bifariam ſecantis ſit rationalis.

Eſto triangulum oxygonium A B C. & ducta perpendicularis A D. & linea A E. ſecans angulum B A C. bifariam, oportet facere omnia latera trianguli rationalia, & lineam A E. rationalem. Sumatur ſegmento C D. æquale D K. vt K B. ſit interuallum ſegmentorum à perpendiculari factorum. Item ſegmento C E. ſumatur æquale E H. vt H B. ſit interuallum ſegmentorum à ſecante angulum factorum. Denique ſumatur A G. æqualis ipſi A C. vt B G. ſit interuallum laterum A B. A C. Quoniam ergo [4] vt eſt B K ad B G. ſic eſt B G. ad B H. ſumantur tres quicunque numeri proportionales, puta 25. 20. 16. & ponatur B K. 25. B G. 20. B H. 16. & ſtatuatur A C. ſeu A G. 1 N. erit ergo tota A B 1 N. + 20. ac proinde interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. eſt 40 N. + 400. quo diuiſo per interuallum ſegmentorum baſis à perpendiculari factorum, puta per 25. [2] prodit tota baſis B C. $\frac{8}{5}$ N. + 16. cui ſi addatur & adimatur interuallum ſegmentorum, puta 25. ſemiſſis ſummæ & reſidui oſtendet ipſa ſegmenta. Fiet ergo minus ſegmentum D C. $\frac{4}{5}$ N. − $\frac{9}{2}$. cuius quadratus $\frac{16}{25}$ Q. + $\frac{81}{4}$. − $\frac{36}{5}$ N. qui ſi auferatur à quadrato lateris A C. puta ab 1 Q. remanet quadratus ipſius perpendicularis. A D. nimirum $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$ N. − $\frac{81}{4}$. cui ſi addatur quadratus ipſius E D. puta $\frac{81}{4}$. (etenim E D eſt ſemiſſis ipſius H K.



Lemma quartū. *Lemma ſecundū.*

interualli interuallorum BK. BH. vt conſtat ex Corollario lemmatis quarti. Quare cùm interuallum ipſorum 25. & 16. ſit 9. cuius ſemiſſis eſt $\frac{9}{2}$. tanta erit E D. & eius quadratus $\frac{81}{4}$.) fiet quadratus lineæ A E. nimirum $\frac{9}{25}$. Q. + $\frac{36}{5}$. N. Quamobrem vt A E. ſit rationalis oportet $\frac{9}{25}$. Q. + $\frac{36}{5}$. æquari quadrato, & omnia in 25. ducantur, tum diuidantur per 9. ſit 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato, & facilis quidem eſt æquationis ratio, ſed oportet prius determinare de Numero.

13. ſecundi. Quia enim volumus triangulum A B C. eſſe oxygonium, * neceſſe eſt quadratum cuiuſlibet lateris, minorem eſſe aggregato quadratorum à reliquis duobus lateribus, ſeu quod idem eſt, oportet ſemiſſem aggregati quadratorum à ſingulis lateribus, maiorem eſſe quadrato cuiuſlibet lateris. Cùm ergo ſint tria latera 1 N. 1 N. + 20. $\frac{9}{5}$ N. + 16. erit aggregatum quadratorum à ſingulis $\frac{131}{25}$ Q. + $\frac{488}{5}$ N. + 656. cuius ſemiſſis eſt $\frac{131}{50}$ Q. + $\frac{244}{5}$ N.



+ 328. qui quidem vt apparet maior eſt quadrato primi lateris, ſed de aliis duobus non ſtatim apparet. Oportet ergo vt $\frac{131}{50}$ Q. + $\frac{244}{5}$ + 328. ſit maior quàm 1 Q. + 40 N. + 400. quâ æquatione reſoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. Rurſus oportet vt $\frac{131}{50}$ Q. + $\frac{244}{5}$ N. + 328. ſit maior quàm $\frac{81}{25}$ Q. + $\frac{288}{5}$ N. + 256. qua æquatione reſoluta, fit 1 N. minor quàm $\frac{61}{7}$. Oportet ergo ita fingere latus quadrati 1 Q. + 20 N. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{61}{7}$ Porrò fiet valor Numeri ſi à quodam quadrato auferatur 1. & per reſiduum diuidatur 20. Ponatur ergo quadratus quæſitus quo cum inſtituenda eſt æquatio 1 Q. fiet $\frac{20}{1 Q. - 1}$. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{61}{7}$. Quare vtraque æquatione reſoluta conſtat quadratum quæſitum maiorem eſſe debere quàm 3 $\frac{8}{61}$. minorem quàm 4 $\frac{5}{9}$. Ponatur verbi gratia 4. & ſint 1 Q. + 20 N. æquales 4 Q. fiet 1 N. $\frac{20}{3}$. latus ſcilicet A C. erit autem A B $\frac{80}{3}$. B C item $\frac{80}{3}$. ſegmenta B D. D C. fient $\frac{544}{21}$. & $\frac{44}{21}$. ſegmenta verò B E. E C. erunt $\frac{112}{5}$ & $\frac{28}{5}$. Ipſa E D $\frac{368}{105}$. Quamobrem à quadrato ipſius A C. hoc eſt à $\frac{400}{9}$. auferendo quadratum ipſius D C. puta $\frac{1936}{441}$. remanet $\frac{17664}{441}$. quadratus perpendicularis A D. cui ſi addas quadratum ipſius E D. puta ſub eadem denominatione $\frac{135424}{11025}$. fit $\frac{705600}{11025}$. ſeu 64. quadratus lineæ A E. Ac proinde ipſa linea A E. eſt 8. & rationalis vt requirebatur. Quod ſi omnia latera per 3. multiplices, habebis omnia in integris, eritque A B. 80. A C. 20. B C. 80. A E. 24.

SCHOLIVM.

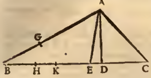
Non curamus vtrum perpendicularis A D. ſit rationalis, an non; cum ſufficiat latera trianguli vnà cum linea A E. facere rationalia.

Porrò infinita reperiri poſſunt hac arte triangula, & quorum latera diuerſas ſeruent rationes, tum quia pro interuallis B K. B G. B H. ſumi poſſunt tres proportionales diuerſi ab ipſis 25. 20. 16. & in diuerſa ratione, vnde diuerſa contingent ſolutiones, tum etiam quia quadratus 1 Q. + 20. N diuerſis quadratis æquari poteſt, cùm inter 3 $\frac{8}{61}$. & 4 $\frac{5}{9}$. infiniti ſumi poſſint quadrati. Verbi gratia ſi æques 1 Q. + 20. N. cum $\frac{361}{100}$. Q. fiet 1 N. $\frac{2000}{261}$. & ſi ſumas minima ſimilium fiet A B 1805. A C. 500. B C. 1844. A E. 570. ſegmentum B E. 1444. ſegmentum E C. 400. & ſic de alijs.

PROBLEMA SEXTVM.

Triangulum amblygonium conſtituere in rationalibus, vt obtuſo angulo bifariam ſciſſo, numerus angulum ſecantis ſit rationalis.

Eſto triangulum amblygonium A B C. perpendicularis A D. angulum ſecans A E. interuallum ſegmentorum B D. D C. à perpendiculari factorum ſit B K. interuallum autem ſegmentorum B E. E C. à ſecante angulum factorum eſto B H. ac denique interuallum laterum A B. A C. ſit B G. igitur ob demonſtrata lemmate quarto ſumemus, vt ſuprà tres numeros proportionales, vt 25. 20. 16. & ſtatuemus B K. 25. B G. 20. B H. 16. tum poſito A C. 1 N. fiet vt

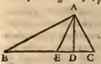


prius A B. 1 N. + 20. & B C. $\frac{9}{5}$ N. + 16. Quare tandem inuenietur quadratus ipſius A E $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$. N. Quare omnia ducendo in 25. tum diuidendo per 9. fiet 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato. Quoniam verò volumus angulum B A C. eſſe obtuſum, oportet vt quadrati ſimul, laterum A B. A C. ſint minores quadrato baſeos B C. Quare 2 Q. + 40 N. + 400. minus eſſe debet quàm $\frac{81}{25}$ Q. + $\frac{288}{5}$ N. + 256. vnde tandem 144. minor eſſe debet quàm $\frac{31}{25}$ Q. + $\frac{88}{5}$ N. & re in integris ad minimos deducta fit 1800. minor quàm 7 Q. + 140 N. Qua æquatione vt decet, reſoluta, fit 1 N maior quàm 9. Oportet igitur æquantes quadrato 1 Q. + 20 N. efficere 1 N. maiorem quàm 9. Quamobrem cùm fiat 1 N. quodam quadrato vnitate multato, & per reſiduum diuidendo 20. ſi ponatur quæſitus quadratus 1 Q. fiet $\frac{20}{1 Q. - 1}$. maior quàm 9. & tandem 29. maior quàm 9 Q. Quare oportet quæſitum quadratum, minorem eſſe quàm 3 $\frac{2}{9}$ Ponatur $\frac{25}{16}$. ergo 1 Q. + 20 N. æquatur $\frac{25}{16}$. Q. & fit 1 N. $\frac{320}{9}$. latus ſcilicet A C. Quare A B. eſt $\frac{500}{9}$. B C. $\frac{720}{9}$. ſegmenta B D. D C. [illegible] & [illegible].

At ſegmenta B E. E C. $\frac{100}{9}$ & $\frac{256}{9}$. denique A E fit $\frac{240}{9}$ & ſi ſumas minimos ſimilium, fiet A B. 125. A C. 80. B C. 164. A E. 60.

SCHOLIVM.

Hic etiam perpendicularis curam non agimus, quæ ferè ſemper irrationalis reperitur. Cæterùm ſolutiones diuerſa totidem modis dari poſſunt, quot in præcedente, & eaſdem prorſus ob cauſas. Sed animaduerſione dignum eſt, plerumque contingere vt linea A E. reperiatur æqualis ipſi lateri minori



A C. cùm ſcilicet E D. D C. ſunt æquales, tunc enim, vt patet, triangulum A E D, eſt æquangulum & æquale triangulo A D C. Verbi gratia ſi ponas 1 Q. + 20. N. æquari $\frac{25}{4}$ Q. fiet 1 N. $\frac{9}{4}$. latus ſcilicet A C. & ſi ſumas minima ſimilium, erit A B 125. A C 45. B C. 136. ſegmenta B D. D C. 118. & 18. At ſegmenta B E. E C. 100. & 36. Ipſa denique A E. 45. æqualis ſcilicet lateri A C. Interdum contingit A E. æquari ipſi E C. vt ſi ponas 1 Q. + 20 N. æquari $\frac{16}{9}$ Q. fiet enim 1 N. $\frac{180}{7}$. latus ſcilicet A C. & ſumendo minima ſimilium erit A B. 640. A C. 360 B C. 800. ſegmenta B D. D C. 575. & 225. At ſegmenta B E. E C. 512. & 288. Ipſa denique A E 288. æqualis ſegmento E C.

Verùm hæc de his dixiſſe ſufficiat, & ſubtilis non minus quàm iucundæ ſpeculationis hic finis eſto. Ad Diophantum redeamus.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus cum hypotenuſæ numero faciat quadratum, at circumferentiæ numerus ſit cubus. Ponatur areæ numerus 1 N. hypotenuſa verò ſtatuatur vnitatum aliquot quadratarum cum defectu 1 N. Eſto 16 − 1 N. cùm ergo poſuerimus aream 1 N. qui fit ex lateribus circa rectum erit 2 N. Atqui 2 N. producuntur ex 1 N. in 2. ſi ergo alterum circa rectum ſtatuamus 2. erit alterum 1 N. & fiet circumferentia 18. qui non eſt cubus. At 18. ortus eſt è quodam quadrato, & vnitatibus 2. Oportet itaque inuenire quadratum aliquem, qui binario adiecto cubum faciat; ita vt cubus quadratum ſuperet binario. Ponatur igitur quadrati latus 1 N. + 1. At cubi latus 1 N. − 1. fit quadratus quidem 1 Q. + 2 N. + 1. At cubus 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. volo ergo cubum ſuperare quadratum binario. Quare quadratus cum binario, puta 1 Q. + 2 N. + 3. æqualis eſt 1 C + 3 N. − 3 Q. − 1. vnde inuenitur 1 N. 4. eſt igitur quadrati latus 5. cubi vero 3. ipſe quadratus 25. cubus 27. Tranſmuto itaque rectangulum, & ponens aream illius 1 N. ſtatuo hypotenuſam 25. − 1 N. Manet autem baſis 2. & cathetus 1 N. Reſtat vt

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος. τετάχθω ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ αὐτοῦ μονάδων ποσῶν τετραγωνικῶν λεῖψει ἀριθμοῦ α. ἔστω μονάδων ις λεῖψει ἀριθμοῦ α. ἀλλ' ἐπεὶ ὑπεθέμεθα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ἀριθμοῦ α. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γίνεται ἀριθμῶν β. ἀλλὰ ἀριθμοὶ β. περιέχονται ὑπὸ ἀριθμοῦ α. μονάδων β, ἐὰν οὖν τάξωμεν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν μονάδων β. ἔσται ἡ ἑτέρα ἀριθμοῦ α. καὶ γίνεται ἡ περίμετρος μο ιη. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. ὁ δὲ ιη. γέγονεν ἔκ τινος τετραγώνου, καὶ μονάδων β. δεήσει ἄρα εὑρεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς προσλαβὼν μονάδας β. ποιεῖ κύβον ὥστε κύβον τετραγώνου ὑπερέχειν μονάδας β. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ςο α. μο α. ἡ δὲ τοῦ κύβου ἀριθμοῦ α. λεῖψει μο α. γίνεται ὁ μὲν τετράγωνος δυ α ςς β μο α. ὁ δὲ κύβος κυ α ςς γ ↑ δυ γ μο α. θέλω οὖν τὸν κύβον τὸν τετράγωνον ὑπερέχειν δυάδι. ὁ ἄρα τετράγωνος μετὰ δυάδος τουτέστι δυ α. ςς β. μο γ. ἴσος ἐστὶ κυ α. ςς γ. ↑ δυ γ. μο α. ὅθεν ὁ ςος εὑρίσκεται μο δ. ἔσται οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μο ε. ἡ δὲ τοῦ κύβου μο γ. αὐτοὶ ἄρα, ὁ μὲν τετράγωνος μο κε. ὁ δὲ κύβος μο κζ. μεθυφίσταμαι οὖν τὸ ὀρθογώνιον, καὶ τάξας αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν ἀριθμοῦ α. τάσσω τὴν ὑποτείνουσαν μο κε. λεῖψει ἀριθμοῦ α. μένει δὲ καὶ ἡ βάσις μο β. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμοῦ α. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης

ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. γίνεται δὲ δ^υ ᾱ. μ^ο χκε ⋔ ςς ν̄. ἴσαι ἐστὶ δ^υ ᾱ. μ^ο δ̄. ὅθεν γίνεται ὁ ς μ^ο χκα^ν. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

quadratus hypotenuſæ æqualis ſit quadratis laterum circa rectum. Fit ergo 1 Q. + 625 − 50 N. æqualis 1 Q. + 4. vnde fit $\frac{621}{50}$. Ad poſitiones. & conſtat.

OBSERVATIO D. P. F.

AN autem alius in integris quadratus præter ipſum 25. inueniatur qui adſumpto binario cubum faciat. Id ſanè difficilis primo obtutu videtur diſquiſitionis. Certiſſimâ tamen demonſtratione probare poſſum nullum alium quadratum præter 25. in integris adiecto binario facere cubum. In fractis ex methodo Bacheti ſupetunt infiniti, ſed doctrinam de numeris integris quæ ſanè pulcherrima & ſubtiliſſima eſt, nec Bachetus nec alius quiuis cuius ſcripta ad me peruenerint, hactenus calluit.

IN QVAESTIONEM XIX.

TRIA hic poſtulantur. Primò vt exhibeatur triangulum rectangulum in numeris rationalibus. Secundò vt area cum hypotenuſa faciat quadratum. Tertiò vt ambitus trianguli, hoc eſt ſumma trium laterum, ſit numerus cubus. Primùm autem, vltimum eſt quod curat Diophantus, æquando quadratos laterum circa rectum, quadrato hypotenuſæ. Reliqua duo poſtulata præſtat ipſis poſitionibus ingenioſè factis. Nam vt area cum hypotenuſa faciat quadratum, poſita area 1 N. ponit hypotenuſam quadratum aliquem numerum vnitatum cum defectu 1. N. puta 16 − 1 N. Tum vero quia area eſt ſemiſſis plani ſub lateribus circa rectum contenti, ſequitur planum ſub lateribus circa rectum eſſe 2 N. Quare vt habeantur ipſa latera circa rectum, ſumendi duo numeri quorum, mutuo ductu fiant 2 N. Ex infinitis autem huiuſmodi numeris ſeliguntur 1 N. & 2. quia in hypotenuſa poſitus eſt 1 N. cum ſigno defectus, ac proinde addendo ſimul tria latera, eliduntur Numeri, & manet ſumma laterum, ſolus vnitatum Numerus, compoſitus ſcilicet ex quadrato illo qui poſitus eſt in hypotenuſa, & ex binario qui ponitur pro altero laterum circa rectum. Cùm ergo ſumma hæc debeat conficere cubum, apparet neceſſitas ſecundæ poſitionis, qua inueſtigatur quadratus qui adſumpto binario cubum creet.

Hoc ſanè loco deuoluimur in æquationem complexam, in qua duæ ſpecies, duabus ſpeciebus æquales ſunt. Cùm enim 1 Q. + 2 N. + 3. æquentur 1. C. + 3 N. − 3 Q. − 1. fiunt tandem 1 C. + 1 N. æquales 4 Q. + 4. Nec verò ſciri poteſt qua ratione huiuſmodi æquationem reſoluat Diophantus, cùm in libris eius qui extant, nuſquam id docuerit. Certè regula generalis & perfecta hactenus ignoratur. Particularis autem quæ in hoc caſu locum habet, traditur à multis, & eſt huiuſmodi. Si 1 C. + 1 N. æquentur cuilibet Quadratorum & vnitatum numero, quorum tamen multitudo ſit æqualis, fit 1 N. ipſe Quadratorum, vel vnitatum numerus. Quod facilè demonſtratur. Etenim vt ſe habet cubus ad quadratum, ſic Numerus ad vnitatem. Quare & duo antecedentes ſimul nempe 1 C. + 1 N. ſe habebunt, ad conſequentes ſimul, nempe ad 1 Q. + 1 ſicut 1 N. ad 1. Quare ſi quatuor proportionalium ſumantur ſecundi & quarti æquè multiplices, verbi gratia quadruplices, erit & 1 C. + 1 N. ad 4 Q. + 4. ſicut 1 N. ad 4. Ac proinde ſi 1 C. + 1 N. ponantur æquales 4 Q. + 4. erit & 1 N. æqualis 4. Quod erat propoſitum.

Eadem de cauſa ſi 1 C. + 1 Q. æquentur certo Numerorum & vnitatum numero erit 1 Q. æqualis ipſi numero Numerorum vel vnitatum, ac proinde ſi numerus ille ſit quadratus, erit ſolutio rationalis. Vt ſi 1 C. + 1 Q. ponantur æquales 9 N. + 9. fiet 1 Q. 9. & 1 N. 3. & ratio eſt quia 1 C. ad 1 N. ſe habet vt 1 Q. ad 1.

Neceſſe igitur fuit tam aptè fingere latus quadrati, & latus cubi, vt tandem prodirent 1 C. + 1 N. æquales quadratis & vnitatibus multitudine æqualibus, vt pote 4 Q. + 4. ſed qui ratione certa id fecerit Diophantus, ita vt modus ab illo vſurpatus alijs huiuſmodi quæſtionibus applicari poſſit, non conſtat ex eius verbis, & verò perdifficile arbitror id diuinare. Sit enim propoſitum quærere quadratum, cui addendo 4. fiat cubus, quomodo quæſo fingenda ſunt latera quadrati & cubi, vt commoda proueniat æquatio, & ſolutio ſit rationalis? Fateor equidem me ignorare & ei qui tale quid docuerit, non paruam habebo gratiam. Sanè quod propoſitum eſt, non eſt prorſus impoſſibile, nam non vnus, ſed plures quadrati quæſtioni ſatisfacientes poſſunt inueniri, quales ſunt 4. & 121. quorum vtrique ſi adiicias 4. fiunt cubi 8. & 125. fortuita ergo videtur Diophanti operatio, niſi quis firmiora ad eam fulciendam ponat fundamenta. Et hac ratione operando vnica tantum reperitur ſolutio, cùm tamen quæſtio ſit de earum genere quæ plures ſolutiones admittunt.

Huic

Huic autem vltimo incommodo noſtra ſubueniet induſtria, tali expedito lemmate.

Dato quadrato qui adſumpto dato numero, cubum faciat, inuenietur alius quadratus idem præſtans.

Sit datus quadratus 25. qui adſumpto 2. cubum facit, puta 27. Inueniendus eſt alius quadratus, qui præſtet idem. Fingatur eius latus 5 − 1 N. fiet quadratus 25. − 10 N. + 1 Q. cui addendo 2. fit 27. − 10 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingo 3 − tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipſius 3. nempe in 27. efficiant 10. habebo autem talem Numerorum numerum diuidendo 10. per 27. eſtque $\frac{10}{27}$. fingatur ergo latus cubi 3 − $\frac{10}{27}$ N. fiet cubus 27 − 10 N. + $\frac{100}{27}$. Q. − $\frac{1000}{19683}$. C. æqualis 27 − 10 N. + 1 Q. Quare tandem $\frac{73}{27}$. Q. æquantur [illegible]. C. & fit 1 N. [illegible]. eſt ergo latus quæſiti quadrati [illegible]. ipſe quadratus [illegible]. cui adiiciendo binarium fit cubus [illegible]. vel in minimis [illegible]. cuius latus [illegible].

Simili ratione ſi datus ſit quadratus 4. cui adiiciendo 4. fit cubus 8. inuenietur alius quadratus idem præſtans. Etenim pone latus quadrati 2 + 1 N. fiet quadratus auctus quaternario 8 + 4 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingatur 2 + tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipſius 2. puta in 12. faciant 4. erit ergo numerorum numerus $\frac{1}{3}$. & fingatur latus cubi 2 + $\frac{1}{3}$ N. fietque cubus 8 + 4 N. + $\frac{2}{3}$. Q. + $\frac{1}{27}$ C. æqualis 8 + 4 N. + 1 Q. & tandem $\frac{1}{3}$ Q. æquatur $\frac{1}{27}$ C. & fit 1 N. 9. Eſt ergo latus quadrati 11. ipſe quadratus 121. qui adſumpto 4. facit cubum 125.

Hic autem poſui latus quadrati 2 + 1 N. non autem 2 − 1 N. quia ſi poſuiſſem 2 − 1 N. oportuiſſet latus cubi poni 2 − $\frac{1}{3}$ N. Tuncque in cubo tam Numerorum quàm cuborum numeri affecti fuiſſent ſigno minoris. Quare vt in præcedenti exemplo, vnitates quidem & Numeri ſe mutuo eliſiſſent. At $\frac{1}{27}$ C. in alteram æquationis partem conceſſiſſet ob appoſitum ſignum defectus. Quamobrem 1 Q. + $\frac{1}{27}$ C. manſiſſent æquales $\frac{2}{3}$ Q. Quod eſt impoſſibile, quia 1 Q. maior eſt quàm $\frac{2}{3}$ Q. Ad ſimile vitandum incommodum contraria ratione poſitiones inſtitui in ſuperiore exemplo, quia videlicet 1 Q. minor erat quàm $\frac{100}{27}$ Q. vnde etiam ſi dato quadrato 121. alium quæreremus qui adſumpto 4. faceret cubum, poneremus latus quadrati 11 − 1 N. & cubi 5 − $\frac{22}{75}$ N. & inueniremus adhuc alium quadratum diuerſum ab ipſis 4. & 121.

Porrò examen operationis Diophanti tale eſt, fit 1 N. $\frac{621}{50}$. Ergo fit hypotenuſa quæſiti trianguli 12. $\frac{29}{50}$. baſis 2. cathetus 12 $\frac{21}{50}$. Eſtque ſumma laterum cubus 27. At hypotenuſa cum area quæ eſt 12. $\frac{21}{50}$. facit quadratum 25.

QVAESTIO XX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito numero hypotenuſæ faciat cubum; At numerus circumferentiæ ſit quadratus. Si perinde vt in præcedente areæ numerum conſtituamus 1 N. numerum vero hypotenuſæ vnitatum aliquot cubicarum − 1 N. eò deuenitur vt quærendum ſit quis cubus adſcito binario faciat quadratum. Ponatur cubi latus 1 N. − 1. fit cubus adiecto binario 1 C. + 3 N. + 1 − 3 Q. æquandus quadrato. Eſto quadrato à latere 1 $\frac{1}{2}$ N. + 1. & fit 1 N. $\frac{21}{4}$ erit igitur cubi latus $\frac{17}{4}$. Ipſe verò cubus $\frac{4913}{64}$. Pono rurſus areæ numerum 1 N. Hypotenuſam verò $\frac{4913}{64}$ − 1 N. Habemus autem & baſim 2. cathetum verò 1 N. & ſi æquemus quadratum hypotenuſæ, quadratis laterum circa rectum, inueniemus numerum rationalem.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. ἐὰν δὴ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμὸν ᾱ τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μονάδων κυβικῶν λείψει ἀριθμοῦ ᾱ. ἔρχεται ζητεῖν τίς κύβος μετὰ μονάδων β̄. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ἀριθμοῦ ᾱ. λείψει μονάδος ᾱ. ὁ κύβος γίνεται μετὰ μονάδων β̄ κύβου ᾱ. ςς γ̄. μο ᾱ. λείψει δυ γ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς ᾱ. ᾱ ∠. μο ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς μο κα δ^. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ιζ δ^. αὐτὸς ἄρα ἔσται ͵δϡιγ ξδ^. τάσσω πάλιν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς ᾱ. τὴν δὲ ὑποτείνουσαν μο ͵δϡιγ ξδ^. λείψει ς ᾱ. ἔχομεν δὲ καὶ τὴν βάσιν μο β̄, τὴν δὲ κάθετον ς ᾱ. καὶ ἐὰν ἰσώσωμεν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, εὑρήσομεν τὸν ἀριθμὸν ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XX.

PARVM differt huius quæſtionis tractatio, à præcedentis tractatione, vt ſatis indicant ipſa Diophanti verba. Pendet itaque ſolutio à lemmate illo, quo quæritur cubus qui adiecto binario, quadratum faciat. Vbi ſubtili ſanè artificio ponitur cubi latus 1 N. − 1. vt in cubo reperiatur − 1. cui adiiciendo binarium fit + 1. Aliter enim, niſi in cubo binario aucto numerus vnitatum eſſet quadratus, non poſſet æquari quadrato. Ponitur autem latus quadrati 1 + tot numeris qui ſint dimidium Numerorum in cubo contentorum, puta $\frac{3}{2}$ N. dimidium de 3. N. vt ſcilicet duplum illorum æquet Numeros in cubo contentos, ſic cùm & vnitates & Numeri multitudine æquales vtrimque ſe mutuo elidant, manet æqualitas inter cubos & Quadratos, puta inter 1 C. & $\frac{21}{4}$ Q. Porrò accidit vt cubo adiiciendo binarium, fiat quadratus, quia 2. componitur ex cubo & ex quadrato. Quare licet pulchrum problema vniuerſaliter proponere.

Dato quouis numero compoſito ex cubo, & ex quadrato, reperietur cubus qui adſumpto dato numero, quadratum faciat.

Sit datus 17. compoſitus ex cubo 8. & ex quadrato 9. quæro cubum qui adſumpto 17. faciat quadratum. Ponatur latus cubi 1 N. − 2. fiet cubus 1 C. + 12 N. − 6 Q. − 8. cui adiiciendo 17. fit 1 C + 12 N. − 6 Q. + 9. æquandus quadrato, cuius latus, pono 3 + tot numeris quorum duplum per 3. multiplicatum, hoc eſt quorum ſextuplum æquet 12 N. in cubo contentos. Fingetur ergo latus quadrati 3 + 2 N. fiet quadratus 9 + 12 N. + 4 Q. æqualis 1 C. + 12 N. − 6 Q. + 9. & fit 1 N. 10. Eſt ergo cubi latus 8. cubus 512. cui adiiciendo 17. fit 529. quadratus à latere 23. Idemque in ſimilibus eadem ſemper ratione perficietur. Nam ſemper latus cubi ponetur 1 N. − latere cubi, ex quo datus numerus componitur, & ſic in cubo huiuſmodi binomij reperietur earumdem vnitatum cubus affectus ſigno minoris, cui addendo datum numerum, fiet vnitatum numerus æqualis quadrato, ex quibus datus numerus componitur.

Poſſet autem lemma Diophanti mutata paulum operatione æquè benè ſolui. Ponatur latus quadrati 1 N. + 1. erit ipſe quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. vnde auferendo binarium, manet 1 Q. + 2 N. − 1. æquandus cubo, cuius latus fingam à tot Numeris − 1. vt eorum triplum æquet 2 N. poſitos in quadrato. Fingam ergo latus cubi $\frac{2}{3}$ N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{63}{8}$. Quare latus quadrati vt prius erit $\frac{71}{8}$. latus cubi $\frac{17}{4}$. ſupereſt vt integram quæſtionis ſolutionem exhibeamus, quam omiſit Diophantus ob moleſtas fractiones. Quadratus hypotenuſæ fit $\frac{22896225}{4096}$. + 1 Q. − $\frac{4785}{32}$. N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta 1 Q. + 4. Quare tandem manent $\frac{4785}{32}$. N. æquales $\frac{22879841}{4096}$ Q. & fit 1 N. [illegible] æqualis areæ, itemque vni laterum circa rectum, alterum verò eſt 2. hypotenuſa denique [illegible]. quæ addita areæ facit cubum $\frac{4913}{64}$. At ſumma laterum eſt. $\frac{441}{64}$ quadratus à latere $\frac{21}{8}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος. τετάχθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ςº [illegible] ἀορίστου, ἑ ἀπὸ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, ἔστω δὲ ἀπὸ ςº α̅. καὶ ἀπὸ ςº α̅. μº α̅, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος ςς β̅. μº α̅. ἡ δὲ βάσις δυ β̅. ςς β̅. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δυ β̅. ςς β̅. μº α̅. λοιπὸν δεῖ τὴν περίμετρον εἶναι κύβον. τὸν δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος δυ δ̅. ςς ς̅. μº β̅. ἴση κύβῳ. καὶ ἔστι σύνθετος ἀριθμός. μετρεῖται γὰρ ὑπὸ ςς δ̅. μº β̅. καὶ ςº α̅. μº α̅. ἐὰν οὖν ἑκάστην πλευρὰν μερίσωμεν παρὰ ςº α̅. μº α̅. ἕξομεν τὴν περίμετρον αὐτῶν ςς δ̅. μº β̅. ἴσην κύβῳ, λοιπὸν ἄρα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετρά-

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito vno laterum circa rectum, faciat quadratum, at circumferentiæ numerus ſit cubus. Statuatur triangulum ab aliquo numero indefinito, & ab alio qui eum vnitate ſuperet. Eſto itaque ab 1 N. & ab 1 N. + 1. Erit igitur cathetus 2 N. + 1. Baſis 2 Q. + 2 N. hypotenuſa 2 Q. + 2 N. + 1. Reſtat vt circumferentia ſit cubus, & numerus areæ cum vno laterum circa rectum faciat quadratum. Fit autem circumferentia 4 Q. + 6 N. + 2. æqualis cubo. Et eſt numerus compoſitus quem metitur 4 N. + 2. per 1 N. + 1. ſi ergo vnumquodque latus partiamur per 1 N. + 1. habebimus circumferentiam 4 N. + 2. æqualem cubo. Reſtat igitur vt areæ numerus adſcito vno laterum circa rectum faciat qua-

dratum. Fit autem areæ numerus 2 C. + 3 Q. + 1 N. ſub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. vnum verò laterum circa rectum 2 N. + 1. ſub denominatione partis 1 N. + 1. & ſi hæc duo ad eiuſdem denominationis partem reducamus, fiunt 2 C. + 5 Q. + 4 N. + 1. ſub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. & ſi partiamur in denominatorem partis fiunt 2 N. + 1. Ita vt duo hæc compoſita faciant 2 N. + 1. æqualia quadrato. Quærebamus autem etiam 4 N. + 2. æqualia cubo. Igitur eò deducta res eſt, vt inueniamus cubum quadrati duplum. Eſt autem 8. reſpectu 4. ſint igitur 4 N. + 2, æquales 8. & fit 1 N. 1 ½. Erit ergo rectangulum $\frac{3}{1}$. $\frac{17}{5}$. $\frac{8}{5}$. & manet.

γωνον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ K^Y β̄. Δ^Y γ̄. ς^ι ᾱ. ἐν μορίῳ Δ^Y ᾱ. ς^ι β̄. Μ° ᾱ. ἡ δὲ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς^ι β̄ Μ° ᾱ. ἐν μορίῳ ς^ι ᾱ Μ° ᾱ, καὶ ἐὰν ποιήσωμεν τὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ μόριον γίνονται K^Y β̄. Δ^Y ε̄. ς^οὶ δ̄. Μ° ᾱ. ἐν μορίῳ Δ^Y ᾱ ς^ι β̄ Μ° ᾱ. ἐὰν δὲ μερίσωμεν παρὰ τὸ μόριον, γίνεται ς^ι β̄ Μ° ᾱ. ὥστε τὰ δύο συντεθέντα ποιεῖν ς^οὺς β̄. Μ° ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. ἐζητοῦμεν δὲ καὶ ς^οὺς δ̄ Μ° β̄. ἴσους εἶναι κύβῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον τετραγώνου διπλασίονα. ἔστι δὲ ὁ η̄. τοῦ δ̄. ἔστω ἄρα ς^οὶ δ̄ Μ° β̄. ἴσοι Μ° η̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ος ᾱ. ᾱ L'. ἔσται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ... καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XXI.

PVLCHERRIMVM problema, & raræ ſubtilitatis, quod vt perfectè explicetur aliqua ſunt ſupponenda, nimirum.

Primò datis duobus numeris planus bis ſub ipſis contentus, ſumma quadratorum, & interuallum eorundem, æquantur ſimul producto ex duplo ſummæ numerorum in maiorem numerum.

C 14.
A 3. B 4.
D 9. E 16.
F 25. G 7.
H 24.

Sint dati duo numeri A minor B maior, & duplum ſummæ illorum eſto C. at quadrati eorundem D. E. quorum ſumma F. interuallum G. Ac demum ſit H. duplum plani ſub A. B. contenti. Dico tres numeros F. G. H. ſimul, æquari producto ex C in B. Quoniam enim F eſt ſumma duorum D E. & G eorundem interuallum, [a] erunt F G ſimul æquales duplo maioris E. Cùm ergo ex B in ſeipſum fiat E, patet ex B. in duplum ſui, fieri numerum æqualem ipſis F G. ſimul. At ex eodem B. in duplum ipſius A fit H. Ergo ex B. in duplum ſummæ ipſorum A B. hoc eſt in C. fit numerus æqualis tribus F. G. H. ſimul. Quod erat intentum. 23. 1. poriſm.

Secundò. Datis duobus numeris vnitate diſtantibus, interuallum quadratorum ab ipſis æquatur ſummæ datorum numerorum. Etenim [b] ex interuallo numerorum, in ſummam ipſorum, fit interuallum quadratorum. Quamobrem ſi interuallum numerorum ſit vnitas, patet ex vnitate in ſummam numerorum, produci ſummam ipſam numerorum, pro interuallo quadratorum. 4. 2. poriſm.

Tertiò. Datis duobus numeris vnitate diſtantibus, ſi maiori eorum addatur planus ſub ipſis contentus, fiet quadratus maioris. Sint enim duo numeri A B. A C. quorum interuallum ſit vnitas B C. dico ſi plano ſub A B. A C. addatur A C. produci quadratum ipſius A C. Etenim [c] quadratus ipſius A C. æquatur planis ſub A C. A B. & ſub A C. B C. contentis. At planus ſub A C. & ſub vnitate B C. æquatur ipſi A C. ergo A C. cum plano ſub A C. A B. æquatur quadrato ipſius A C. Quod erat demonſtrandum. 2. ſecundi.

A . . . B. C.

Quartò. In ſimilibus triangulis ſi area primi multiplicetur per quadratum denominatoris proportionis laterum, producitur area ſecundi. Etenim [d] areæ ſunt in duplicata ratione laterum ſed denominator rationis quæ alterius ſit duplicata, eſt quadratus denominatoris prioris rationis, [e] quoniam & quadrati ſunt in ratione duplicata laterum. Igitur patet propoſitum. 2. 3. poriſm. 11. octaui.

His poſitis nullo negotio explicatur operatio Diophanti. Nam fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. eſt hypotenuſa ſumma quadratorum, nimirum 2 Q. + 2 N. + 1. Alterum latus eſt interuallum eorundem quadratorum, nempe 2 N. + 1 Alterum denique eſt duplum producti, puta 2 Q. + 2 N. Quorum ſumma fit 4 Q. + 6 N. + 2. quæ ſi diuidatur per 1 N. + 1. maiorem numerorum à quibus effictum eſt triangulum, fiet quotiens duplum ſummæ numerorum, puta 4 N. + 2. per primum ſuppoſitum. Vt igitur numerus æquandus cubo ſit ſimplicior, & expeditior æquatio, ab inuento triangulo formatur aliud ſimile, diuidendo ſcilicet ſingula illius latera per 1 N. + 1. ſic enim ſumma trium laterum fit 4 N. + 2, æquanda cubo.

Area verò per quartum ſuppoſitum, fiet ſi area prioris trianguli puta 2 C. + 3 Q. + 1 N. diuidatur per quadratum ipſius 1 N. + 1. videlicet per 1 Q. + 2 N. + 1. hinc eſt quod huiuſmodi aream eſſe ait Diophantus $\frac{2C. + 3Q. + 1N.}{1Q. + 2N. + 1.}$ cui vt addatur alterum latus, nempe $\frac{2N. + 1.}{1N. + 1.}$ omnia facienda eiuſdem denominationis, ducendo ſcilicet 2 N. + 1. in 1 N. + 1. vnde fit 2 Q. + 3 N. + 1. quo ad-

dito ſupradictæ areæ ſub denominatione eiuſdem partis, fit $\frac{2 C. + 1 Q. + 1 N. + 1.}{1 Q. + 2 N. + 1.}$ Hæc autem fractio reducitur ad integros, quia denominator metitur numeratorem. Quod ita probo. Numerator componitur ex duobus numeris, puta ex 2 C. + 3 Q. + 1 N. area prioris trianguli, & ex 2 Q. + 3 N. + 1. qui factus eſt ex 2 N. + 1. in 1 N. + 1. Prior itaque numerus, nempe area prioris trianguli, fit ex interuallo quadratorum à numeris à quibus formatum eſt triangulum, in planum ſub ipſis numeris contentum, hoc eſt ex 2 N. + 1. in 1 Q. + 1 N. Poſterior verò numerus fit ex eodem interuallo quadratorum 2 N. + 1. in maiorem numerorum à quibus effictum eſt triangulum, puta in 1 N. + 1. fiet ergo totus numerator ex 2 N. + 1. in ſummam ipſorum 1 Q. + 1 N. & 1 N. + 1. At cùm 1 Q. + 1 N. ſit planus contentus ſub numeris vnitate diſtantibus, & horum maior ſit 1 N. + 1. patet per tertium ſuppoſitum, horum ſummam æquari quadrato ipſius maioris, puta 1 Q. + 2 N. + 1. Quamobrem conſtat ſupradictum numeratorem produci ex 2 N. + 1. in ipſum denominatorem 1 Q. + 2 N. + 1 Quare diuiſo numeratore per denominatorem, fiet quotiens 2 N. + 1. æquandus vtique quadrato, eſt autem hic quotiens ſubduplus ad priorem quotientem 4 N. + 2. qui æquandus eſt cubo. Etenim 4 N. + 2. vt ſuprà oſtenſum eſt, eſt duplum ſummæ numerorum 1 N. & 1 N. + 1. at 2 N. + 1. eſt interuallum quadratorum ab ipſis. Porro interuallum quadratorum æquatur ſummæ numerorum per ſecundum ſuppoſitum, quia numeri vnitate differunt. Ergo duplum ſummæ numerorum eſt duplum interualli quadratorum.

Iam igitur cùm habeamus 4 N. + 2. æquandum cubo, & 2 N. + 1. æquandum quadrato, patet quærendum eſſe cubum quadrati duplum, cuiuſmodi infinitos reperiri poſſe docuimus ad primam huius. Sumit Diophantus cubum 8. & quadratum 4. æquatque 4 N. + 2 ipſi 8. vel 2 N. + 1. ipſi 4. & fit vtrobique 1 N. $\frac{3}{2}$. Quare latera prioris trianguli fiunt $\frac{15}{2}$. $\frac{17}{2}$. $\frac{8}{2}$. ſed cùm omnia diuidi debeant per 1 N. + 1. puta per $\frac{5}{2}$. fiunt vtique quæſiti latera trianguli $\frac{15}{5}$. $\frac{17}{5}$. $\frac{8}{5}$. eſtque area $\frac{12}{5}$. cui addendo latus $\frac{8}{5}$. fit quadratus $\frac{20}{5}$. ſeu 4. At circumferentia eſt $\frac{40}{5}$. ſeu 8. cubus.

Cæterùm poſſet prius triangulum fingi etiam à 2 N. & 2 N. + 1. vel à 3 N. & 3 N. + 1. & ſic à quolibet Numerorum numero, & altero, vnitate illum ſuperante. Sed eadem ſemper ſolutio continget, ſi cubus & quadratus quibus cum vltima æquatio inſtituitur, iidem ſemper ſumantur. Poſſunt autem alij cubi & quadrati infiniti reperiri in eadem ratione 2. ad 1. per Canonem traditum ad primam huius, dum obſeruetur, cubum maiorem eſſe debere quàm 2. & quadratum maiorem eſſe oportere quàm 1. quia ſcilicet cubus æquandus eſt 4 N. + 2. & quadratus æqualis faciendus 2 N. + 1. Id autem contingit, ſi operando per dictum Canonem, ſumatur quilibet cubus minor vnitate, per quem diuidatur 2. denominator rationis datæ. Verbi gratia ſi ſumas $\frac{1}{8}$. & per eum diuidas 2. fiet 16. latus quadrati quæſiti, nam quadratus eſt 256. cuius duplum 512. eſt cubus. Vnde apparet ex hoc capite quæſtionem infinitas recipere ſolutiones. Nam ſi loco ipſorum 8. & 4. ſumas 512. & 256. fiet 1 N. $\frac{255}{2}$. & diuerſa continget ſolutio, vt potes experiri.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὴν ἴσα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. πάλιν ἐπὶ τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ χρησώμεθα τῇ πρὸ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ ϛϛ^οὶ δ. μ^ο β. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ϛϛ^οὶ β. μ^ο α. ἴσα κύβῳ. καὶ γίνεται ζητεῖν τετράγωνον κύβου διπλασίονα. ἔστι ιϛ. καὶ η. καὶ πάλιν ἰσάζομεν μ^ο ιϛ. ἀριθμοῖς δ. μ^ο β. καὶ γίνεται ὁ ϛ μ^ο γ. ᾱ ϛ^ον. ἔσται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ιϛ θ^ων. ξγ θ^ων. ξε θ^ων.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito vno laterum circa rectum, ſit cubus, at circumferentiæ numerus ſit quadratus. Si rurſus eodem vtamur ductu quo in præcedente eo tes deueniet, vt 4 N. + 2. æquanda ſint quadrato, & 2 N. + 1. æquanda cubo. Et oportet inuenire quadratum cubi duplum. Eſt autem 16. reſpectu 8. Et rurſum æquabimus 16. & 4 N. + 2. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{16}{9}$. $\frac{63}{9}$. $\frac{65}{9}$.

IN QVAESTIONEM XXII.

OMNIA ex dictis ad præcedentem ſunt manifeſta. Et vti potes Canone ad primam huius tradito ad inueniendum cubos infinitos quadrati ſubduplos, diuidendo ſcilicet $\frac{1}{2}$ denominatorem rationis ſubduplæ per aliquem cubum habebis latus quadrati quæſiti. Obſeruandum autem hîc eſt, vt cubus per quem diuidetur $\frac{1}{2}$. ſit minor vnitate, vt proueniat quadratus maior binario. Verbi gratia ſi diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{8}$. fiet quotiens 4. latus quæſiti quadrati 16. quo vtitur Diophantus. Quod ſi diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{27}$. fiet quotiens $\frac{27}{2}$. cuius quadratus $\frac{729}{4}$. duplus eſt cubi $\frac{729}{8}$. & ſic de alijs.

Cæterum tam hæc quæſtio, quàm præcedens extendi poteſt ad quaſlibet duas ſpecies proximas, vel etiam ad non proximas, dum non ſint quadratæ, quia vt monuimus ad ſecundam huius, datis duabus ſpeciebus non quadratis, licet vnam reperire alterius duplam. Itaque poterunt eadem facilitate ſolui problemata quæ ſequuntur.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit cubus, area verò cum altero laterum circa rectum faciat quadratoquadratum. vel è conuerſo; vt ambitus ſit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum faciat cubum.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum, faciat quadratocubum. vel è conuerſo.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit quadratocubus, area verò cum altero laterum faciat cubocubum. vel è conuerſo.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit quadratus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerſo.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit cubus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerſo.

Et ſic de alijs.

QVÆSTIO XXIIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt circumferentiæ numerus ſit quadratus, & adſumens areæ numerum, faciat cubum. Fingatur rectangulum ab 1 N. & 1. fiet vnum laterum circa rectum 2 N alterum 1 Q. − 1. Hypotenuſa verò 1 Q. + 1. Et oportet quærere 2 Q. + 2 N. æquales quadrato. & 1 C + 2 Q. + 1 N. æquales cubo. Et ſanè 2 Q. + 2 N. conficere quadratum, facile eſt. Nam ſi binarium diuiſeris per quadratum binario multatum, inuenies 1 N. Oportet autem eum talem inueniri, vt compoſitus ex cubo ipſius, duplo quadrati eiuſdem, & ipſomet numero, faciat cubum. Eſt ergo 1. N. ex binario diuiſo per 1 Q. − 2. At cubus fit 8. ſub denominatione partis quæ ſit cubus à latere 1 Q. − 2. & duo quadrati fiunt 8. ſub denominatione partis quæ quadratus eſt à latere 1 Q. − 2. Ipſe verò numerus eſt 2. ſub denominatione partis 1 Q. − 2. & ſi omnia ad eandem partem reducantur, fiunt 2 QQ. ſub denominatione partis, quæ eſt cubus à latere 1 Q. − 2. Et eſt pars cubica. Oportet ergo vt & 2 QQ. æquentur cubo. & omnia per 1 C. diuidantur, fiunt 2 N. æquales cubo. Et ſi ponamus æquales vnitatibus cubicis, inuenietur 1 N. cubi alicuius dimi-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος, καὶ προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ κύβον. πεπλάσθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ςῶν ᾱ μο ᾱ. γίνεται μία μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς β̄. ἡ δὲ ἑτέρα δυ ᾱ ⋔ μο ᾱ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δυ ᾱ. μο ᾱ καὶ γίνεται ζητεῖν δυ β̄ ςςοὶ β̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ κυ ᾱ δυ β̄ ςς ᾱ. ἴσα κύβῳ, καὶ τὸ μὲν δυ β̄ ςςοὶ β̄. κατασκευάζειν τετράγωνον ῥᾴδιόν ἐστιν. ἐὰν γὰρ δυάδα μερίσῃς εἰς τετράγωνον παρὰ δυάδα, εὑρήσεις τὸν ς ᾱ. ἀλλὰ δεῖ τοιοῦτον εὑρίσκεσθαι, ὥστε τὸν ἀπ' αὐτοῦ κύβον, καὶ δύο τοὺς ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνους, καὶ αὐτὸν συντιθέμενον, ποιεῖν κύβον. ἔστιν οὖν ὁ ς ἐκ δυάδος μερισθείσης ἐπὶ δύναμιν ᾱ ⋔ μο β̄. ὁ δὲ κύβος γίνεται μο η̄ ἐν μορίῳ τοῦ ἀπὸ δυ ᾱ. λείψει μο β̄ κύβῳ, καὶ οἱ δύο ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι, γίνονται μο η̄. ἐν μορίῳ τοῦ ἀπὸ δυ ᾱ λείψει μο β̄ τετραγώνῳ. αὐτὸς δὲ μο β̄ ἐν μορίῳ δυνάμεως ᾱ λείψει μο β̄. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ αὐτὸ μόριον, γίνονται δυ δυ β̄ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ δυ ᾱ ⋔ μο β̄ κύβῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον κυβικόν. ἔστω οὖν καὶ δυ δυ β̄. ἴση κύβῳ. καὶ πάντα παρὰ κύβον ᾱ. γίνονται ςςοὶ β̄. ἴσοι κύβῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἴσα μονάσι κυβικαῖς, εὑρίσκεται ὁ ς κύβου τινὸς τὸ ἥμισυ. ἔστω ὁ κύβος μο η̄. γίνεται ἄρα ὁ ς τούτου τὸ ἥμισυ μο δ̄. ὁ δὲ τετράγωνός ἐστι μο ις̄.

τάσσω ἐν δυνάμεσι, καὶ γίνονται δυ ις. ἴσαι δυ β̅ ςς β̅. καὶ γίνεται ὁ ς α ζ. ὁ δὲ τετράγωνος γίνεται α μθ. καὶ δεῖ ἀπὸ τούτου ἀφῃρεῖν μο α. ἐπειδήπερ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴση δυ α λείψει μο α. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ ζητῆσαι κύβον, ὅπως τὸ τέταρτον τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου μεῖζον ᾖ ἢ μο β̅. ἐλάσσον δὲ μο δ. καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸν κυ α. ζητήσομεν κυβοκύβου α δ'. μείζονα ᾖ μονάδων β̅. ἐλάσσονα δὲ μο δ. ὁ ἄρα κυβόκυβος μείζων ᾖ μο η. ἐλάσσων δὲ μο ις. ἔστι δὲ τὰ ψκθ ξδ. ὥστε ὁ κύβος κζ η. τάσσω οὖν ςς β̅. ἴσους μο κζ η. καὶ γίνεται ὁ ς κζ ις. ἡ δύναμις ψκθ σνς. καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμεν εἰς τὸν τούτου δυάδι ἐλάσσονα, εὑρήσομεν τὸν ς φιβ σιζ. καὶ ἔχομεν ἀπὸ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, ἆραι μονάδα α.

dium. Eſto cubus 8. Fit ergo 1 N. huius dimidium, nempè 4. cuius quadratus eſt 16. Statuo in quadratis, & fiunt 16 Q. æquales 2 Q. + 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. At quadratus fit $\frac{1}{49}$. Et oportet ab hoc auferre 1. Quandoquidem vnum laterum circa rectum eſt 1 Q. − 1. Quamobrem res eò deducitur, vt quærere opus ſit cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior ſit quàm 2. minor quàm 4. Et ſi eum ponamus 1 C. quæremus $\frac{1}{4}$ C C. maiorem quidem quàm 2. minorem verò quàm 4. Ergo 1 C C. maior eſt quàm 8. minor quam 16. Talis eſt $\frac{729}{64}$. Ergo cubus $\frac{27}{8}$. Pono ergo 2 N. æquales $\frac{27}{8}$ & fit 1 N. $\frac{27}{16}$. Quadratus $\frac{729}{256}$. Et ſi binarium diuidamus per hunc binario multatum, inueniemus 1 N. $\frac{512}{217}$. & poterit ab illius quadrato vnitas auferri.

IN QVAESTIONEM XXIII.

TOTA operatio Diophanti ſic habet. Fingatur triangulum ab 1 N. & ab 1. erit hypotenuſa 1 Q. + 1. alterum laterum 1 Q. − 1. alterum verò 2 N. Quare ambitus ſiue ſumma trium laterum, erit 2 Q. + 2 N. æquanda quadrato. Area verò eſt 1 C. − 1 N. cui ſi adiiciatur ambitus, fit 1 C. + 2 Q. + 1 N. æquandus cubo. Et quidem facilè eſt æquare quadrato 2 Q. + 2 N. ſi ad hoc ſolùm reſpiciamus, nam poterit æquari cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 2. & fiet valor Numeri, ab huiuſmodi quadrato auferendo 2. & per reſiduum diuidendo 2. Talis autem debet eſſe valor Numeri, vt per eum reſoluendo hypoſtaſes 1 C. + 2 Q. + 1 N. inueniatur cubus. Quare apparet neceſſitas ſecundæ operationis, qua quæritur quadratus, qui multatus binario, & diuidens binarium, det quotientem, cui adiiciendo ſuum cubum, & duplum ſui quadrati, fiat cubus.

In ſecunda igitur operatione, ponitur quadratus quæſitus 1 Q. vnde auferendo 2. & per reſiduum diuidendo 2. fit $\frac{2}{1Q-2}$ cuius cubus eſt $\frac{8}{1CC+12Q-6QQ-8}$. duplum autem quadrati eiuſdem eſt $\frac{8}{1QQ+4-4Q}$. Quare vt hæc omnia ſimul addantur reducantur ad maiorem denominationem, & $\frac{8}{1Q-2}$ fiet $\frac{8Q-16}{1CC+12Q-6QQ-8}$. At $\frac{2}{1QQ-4Q+4}$ fiet $\frac{2QQ-8Q+8}{1CC+12Q-6QQ-8}$. Tum omnia ſimul conficient $\frac{2QQ}{1CC+12Q-6QQ-8}$ æquandus cubo, & cum denominator ſit cubus, vt conſtat ex ipſa conſtructione, reſtat vt æquemus cubo numeratorem, puta 2 QQ. Quod facilè fiet, nam æquari poteſt cuilibet numero cuborum cubico, eritque ſimplex æquatio, cùm ſint duæ ſpecies proximæ, quæ reducetur ad primam ſimplicium, diuidendo omnia per 1 C. vt innuit Diophantus. Erit itaque valor Numeri in hac ſecunda operatione, ſemiſſis alicuius cubi, cuius vtique quadratus æquabitur 2 Q. + 2 N. At hîc duo curanda ſunt. Primùm, vt huiuſmodi quadratus ſit maior quàm 2. vt euidens eſt. Secundum, vt idem quadratus talis ſit, vt multatus binario, & diuidens 2. det quotientem maiorem vnitate, vt ſcilicet 1 Q ſit etiam maior quàm 1. eò quod vnum laterum circa rectum poſitum eſt 1 Q. − 1. vt autem in diuiſione prodeat quotiens maior vnitate, oportet diuiſorem minorem eſſe diuidendo. Igitur 1 Q. − 2. debet eſſe minor quàm 2. & addendo vtrimque 2. 1 Q. debet eſſe minor quàm 4. Conſtat ergo, quod ait Diophantus, quadratum eſſe debere maiorem quàm 2. minorem quàm 4. Cùm autem quadrati huius latus ſit ſemiſſis alicuius cubi, vt dictum eſt, & quadratus ſemiſſis alicuius numeri, ſit quadrans quadrati totius numeri, rectè infert Diophantus, quærendum eſſe cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior ſit quàm 2. minor quàm 4. & ideo tertiam inſtituit operationem.

In tertia operatione ponit cubum quæſitum 1 C. cuius quadratus 1 C C. cuius quadrans $\frac{1}{4}$ C C. debet eſſe maior binario, minor quaternario. Quare 1 C C. debet eſſe maior quàm 8. minor quàm 16. Quomodo autem inueniri poſſint tales quot quis voluerit, cubocubi, conſtare poteſt ex iis quæ in ſimili adnotauimus ad ſecundam huius. Reducantur enim 8. & 16. ad fractionem cubocubicam, puta ad eam cuius denominator 64. fient $\frac{512}{64}$. & $\frac{1024}{64}$. inter quos cùm cadat cubocubus $\frac{729}{64}$. is optimè ſatisfaciet propoſito. Porro eius latus quadratum, puta $\frac{27}{8}$. eſt cubus quæſitus, æquandus

2 N. vnde fit in ſecunda operatione 1 N. [illegible] cuius quadratus [illegible] ſiota quadrati inſignitus æquabitur in prima operatione cum 2 Q. + 2 N. Reliquam operationem omiſit Diophantus moleſtiam ſubterfugiens, nos in gratiam ſtudioſorum, eam perſequemur 2 Q. + 2 N. æquantur [illegible] Q. & fit 1 N. [illegible] per quem reſoluendo primas hypoſtaſes, fiunt latera quæſiti trianguli hæc [illegible] [illegible] [illegible] vel [illegible]. Area eſt [illegible]. ſumma trium laterum eſt [illegible]. quadratus à latere [illegible]. & ipſi ſummæ laterum ſi addas aream, fit cubus [illegible]. cuius latus [illegible].

Cæterùm tota ratio diuerſitatis in ſolutione, pendet ex eo quod 2 N. qui debet æquari cubo, poteſt diuerſis æquari cubis, cùm infiniti reperiri poſſint ad hoc idonei. Nam quod attinet ad primas poſitiones, vix reor eas aliter inſtitui poſſe, ita vt in commodam incidamus æquationem.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus circumferentiæ ſit cubus, & adſcito areæ numero, faciat quadratum. Primùm inſpicere oportet datis duobus numeris, quomodo inueniatur triangulum rectangulum, vt circumferentia quidem æquetur vni datorum numerorum, area verò æquetur alteri. Sunto duo numeri 12. & 7. & iniunctum ſit ipſum 12. æquari circumferentiæ, ipſum verò 7. areæ. Qui fit ergo ex mutuo ductu laterum circa rectum, erit 14. Et ſi ponamus ipſorum alterum $\frac{1}{N}$ erit alterum 14 N. Eſt autem circumferentia 12. Quamobrem hypotenuſa erit 12 − $\frac{1}{N}$ − 14. N. Reſtat vt huius quadratum, quod quod eſt $\frac{1}{Q}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{24}{N}$ − 336 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc eſt $\frac{1}{Q}$ + 196 Q. Communis addatur defectus, & à ſimilibus auferantur ſimilia, & omnia in 1 N. ducantur, fiunt 172 N. æquales 336 Q. + 24. & non poſſibile eſt hanc æquationem abſolui, niſi dimidium numerorum in ſeipſum, detracto producto ex quadratis in vnitates, faciat quadratum. Et ſunt numeri quidem compoſiti ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ; productum vèro ex quadratis in vnitates, fit ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream ducto. Quamobrem ſi huiuſmodi dentur numeri, ſoluetur quæſtio. Eſto numerus areæ 1 N. circumferentiæ verò numerus cubus ſimul & quadratus, putà 64. Et vt conſtituatur triangulum, oportet vt dimidium compoſiti ex quadrato ipſius 64. & ex 4. N. ducentes in ſeipſum, auferamus inde quòd fit octies ex quadrato circumferentiæ in 1 N. & reliquum quæramus æquale quadrato. Fiunt 4 Q + 4194304 − 24576 N. & omnium quadrans, fit 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquale qua-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος, προσλαβὼν δὲ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. πρότερον δεῖ ἐπισκέψασθαι δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ μὲν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἴσος ᾖ ἑνὶ τῶν δοθέντων, ὁ δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τῷ ἑτέρῳ. ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅ τε ιβ. καὶ ὁ ζ. καὶ ἐπιτετάχθω τὸν μὲν ιβ. εἶναι τὸν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ. τὸν δὲ ζ. τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ ἔσται μο ιδ. καὶ ἐὰν τάξωμεν μίαν αὐτῶν ἀριθμοστοῦ α. ἡ ἑτέρα ἔσται ςς ιδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ μο ιβ. ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται μο ιβ. ⋔ ἀριθμοστοῦ α. ςς ιδ. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον, ὅπερ ἐστὶ α. δυ. Δυ ρϟς. μο ροβ. λεῖψει κδ ἀριθμοστοῦ. ςς τλς. ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, τουτέστι α δυ. Δυ ρϟς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ πάντα ἐπὶ ἀριθμόν, γίνονται ςς οἱ ροβ. ἴσοι Δυ τλς. μο κδ. καὶ οὐ πάντοτε δυνατόν ἐστι, εἰ μὴ τὸ ἥμισυ τῶν ςς ἐφ᾽ ἑαυτὸ λεῖψαν τὰς δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εἰσὶν οἱ μὲν ςς οἱ ἐκ τοῦ ἀπὸ τῆς περιμέτρου, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ. αἱ δὲ δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, ἐκ τοῦ ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν. ὥστε ἐὰν τοιοῦτοι δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ λύσεται τὸ ζητούμενον, ἔστω ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμῶν α. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος μο ξδ. καὶ ἵνα συσταθῇ τὸ τρίγωνον δεῖ τοῦ ἀπὸ μο ξδ. τετραγώνου, καὶ ἀριθμῶν δ. τὸ ἥμισυ ποιήσαντα ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἀφελεῖν τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου εἰς ἀριθμὸν α. καὶ ζητῆσαι τὰ λοιπὰ ἴσα τετραγώνῳ. γίνονται Δυ δ. μο υιθ. ͵δτδ. λεῖψει ἀριθμῶν β. ͵δφος. καὶ πάντων τὸ τέταρτον, γίνεται Δυ

ᾱ. μ° ρδ̄. ,ηφοε̄. λείψει ἀριθμῶν ,ϛρμδ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔτι δὲ καὶ ἀριθμὸς ᾱ. μ° ξδ̄. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ἐξισώσαντί σοι ἀριθμοί, καὶ ἡ ὑπεροχὴ, καὶ ἡ μέτρησις, καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

drato. Porró autem & 1 N + 64. æquatur quadrato. Et exæquentur tibi numeri; & exceſſus, & menſuratio, & reliqua ſunt dilucida.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti ſubtilis eſt, quam ipſe compendioſè perſequitur. Nos autem vt omnia fiant dilucida, eam fuſius explicabimus. Data circumferentia trianguli 12. & area 7. conſtat productum ex lateribus circa rectum eſſe 14. ſit ergo alterum latus 14. N. alterum $\frac{1}{1N}$. vt eorum mutuo ductu fiat 14. vtroque igitur de ſumma laterum 12. detracto, relinquitur hypotenuſa 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. Quare vt triangulum exhibeatur in rationalibus, oportet huius quadratum, æquari quadratis reliquorum laterum ſimul iunctis. Vt autem habeamus quadratum de 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. ſumemus quadratos partium, & quod fit bis ex qualibet parte in quamlibet ex alijs, per primam ſecundi poriſmatum, fietque totus quadratus $\frac{1}{1Q}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{24}{1N}$. − 336 N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta $\frac{1}{1Q}$ + 196 Q. Quare tandem 172. æquatur $\frac{24}{1N}$ + 336 N. & ducendo omnia in 1 N. fiunt 172 N. æquales 24 + 336 Q. Quæ eſt tertia compoſitarum. Quamobrem operando more Diophanti, vt docuimus ad trigeſimam tertiam primi, oportet ducere vnitates in quadratos, hoc eſt 24 in 336. & productum 8064. auferre à quadrato numeri 86. qui eſt ſemiſſis numeri Numerorum 172. hoc eſt à 7396. Quod fieri nequit, quia 7396. minor eſt quàm 8064. Hæc igitur æquatio eſt impoſſibilis. Itaque inſpiciendum eſt vnde prouenerint 172 N. itemque 24. & 336 Q. Quod ſi conſideres qua ratione ſumptus ſit quadratus de 12 − $\frac{1}{1N}$. − 14 N. facile omnia conſequeris. Nam 172. fit ad 144. quadratum de 12. addendo 28. duplum ipſius 14. Quare cùm 14. ſit duplum areæ 7. ac proinde 28. eiuſdem quadruplum. Rectè dixit Diophantus 172. numerum Numerorum, componi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ. At 24 eſt duplum circumferentiæ 12. & 336. eſt numerus qui fit bis ex 12. in 14. hoc eſt ex duplo ipſius 12. in 14. Atqui 14. eſt duplum areæ, & quod fit ex duplo vnius numeri in duplum alterius, idem eſt atque id quod fit ex quadruplo vnius in alterum. Igitur 336 fit ex quadruplo circumferentiæ 12. in aream 7. Conſtat ergo vnitates 24. eſſe duplum circumferentiæ, & numerum quadratorum 336. eſſe productum ex quadruplo circumferentiæ in aream. Proinde ducere vnitates in quadratos, idem eſt ac ducere duplum circumferentiæ in quadruplum ipſius circumferentiæ, & productum in aream. At ex duplo alicuius numeri, in quadruplum eiuſdem, fit octuplum quadrati ipſius numeri. Rectè igitur infert Diophantus numerum qui fit ex quadratis in vnitates, produci ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream.

Corrigenda igitur eſt prima operatio, & tales ponendi numeri areæ & circumferentiæ, vt à quadrato ſemiſſis compoſiti, è quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ, auferendo octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream, ſuperſit quadratus. Idcirco ponit aream Diophantus 1 N. circumferentiam numerum cubum, puta 64. quia id requirit lex problematis, quem vult præterea eſſe quadratum, ob cauſam quam infra explicabimus. Eſt ergo ipſius 64. quadratus 4096. cui addendo quadruplum areæ fit 4096 + 4 N. cuius ſemiſſis 2048 + 2 N. cuius quadratus eſt 4 Q. + 4194304. + 8192 N. vnde ſi auferas octuplum ex quadrato ipſius 64. in 1 N. nempe 32768 N. ſupereſt 4 Q. + 4194304. − 24576 N. æquandus quadrato, & ſumendo quadrantem more Diophanti 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquandus quadrato. Quoniam verò requiritur, vt & circumferentia adſumens aream, faciat quadratum, oportet etiam 1 N. + 64. æquari quadrato. Quare in duplicatam incidimus æqualitatem. Quæ vt reſolui poſſit, imitando artificium decimæ octauæ tertij, exæquandæ prius ſunt vnitates, vt tangit Diophantus. Quod quidem facilè præſtari poteſt, quia vterque 1048576. & 64. quadratus eſt, vnde patet cur 64. voluerit eſſe quadratum, nam aliter non poſſet 64. ad quadratum 1048576. habere rationem quadrati ad quadratum. Neceſſario autem 1048576. quadratus reperitur, quia quadrans eſt quadrati de 2048. vt ex conſtructione manifeſtum eſt. Itaque quoniam denominator rationis 64. ad 1048576. eſt quadratus 16384. ducto hoc quadrato in 1 N. + 64. fiet hinc 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato. Inde vt prius 1 Q. + 1048576. − 6144 N. æquandus quoque quadrato. Quia verò vterque & quadratorum & vnitatum numerus quadratus eſt, duplici via reſolui poteſt duplicata æqualitas. Primo enim reſpiciendo ad 1 Q. ſumo interuallum Numerorum quadrato æquandorum, quod eſt 22528 N. − 1 Q. quod mutuo ductu conficiunt 22528 − 1 N. & 1 N. (hi ſoli apti ſunt æquationi reſoluendæ, vt conſtat ex iis quæ paſſim libro tertio docuimus, vt ſcilicet in ſemiſſe interualli eorum reperiatur 1 N. latus 1 Q.) Horum ſumma eſt 22528. cuius ſemiſſis quadratus 126877696. æquatur 16384 N. + 1048576.. vnde fit 1 N. 7680. numerus ſcilicet areæ, cùm circumferentia ſit 64. ſed omnino impoſſibile eſt triangulum conſtituere cuius area ſit 7680. circumferentia 64. Quia ex 64. fieri nequeunt tres partes, quarum duæ inuicem ductæ efficiant 15360. duplum ſcilicet areæ, cùm 64. neque in duas partes diuidi poſſit

quæ

quæ id præſtent: ſiquidem quadratus ſemiſſis ipſius 64. puta 1024. maior eſt producto multiplicationis duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas ſecari poſſit 64. per quintam ſecundi Euclidis. Quod ſi primam operationem repetendo quæras triangulum cuius area 7680. circumferentia 64. inuenies ſanè à quadrato ſemiſſis compoſiti è quadrato circumferentiæ 64. & ex quadruplo areæ 7680. non poſſe ſubduci octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream. Denique ſi per valorem Numeri 7680. reſoluas primas hypoſtaſes, inuenies hypotenuſam longè minorem nihilo, cum vnum laterum circa rectum, fiat multo maius tota circumferentia.

Aliam igitur inire viam cogimur, qua reſpiciendo ad vnitates, ſumo interuallum numerorum quadrato æquandorum 1 Q. − 22528 N. Tum quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat. Ita tamen vt in ſemiſſe ſummæ illorum, vel interualli, reperiantur vnitates 1024. quod eſt latus ipſius 1048576. Sunt ergo huiuſmodi numeri 11 N. & [illegible] N. − 2048. horum interuallum 2048 + 10 [illegible]. cuius ſemiſſis 1024. + 5 $\frac{1}{11}$ N. cuius quadratus 1048576. + [illegible] N. + [illegible] Q. æquatur 1048576 + 16384 N. vnde fit 1 N. 175. [illegible]. Area ſcilicet quæſiti trianguli. Redeo ergo ad propoſitam initio quæſtionem, & quæro triangulum, cuius ambitus ſit 64. area 175 [illegible]. Pono vnum laterum circa rectum [illegible]. alterum [illegible] N. fit hypotenuſa 64 − [illegible]. − [illegible] N. cuius quadratum ſi facias æqualem quadratis laterum circa rectum, fiunt tandem [illegible]. æquales [illegible] + [illegible] N. & ducendo omnia in 1 N. tum in 225. fiunt 1079296 N. æquales 28800. + 10092544 Q. & rurſus diuidendo omnia per 128. vt in minimis exhibeantur, habes 8432 N. æquales 225 + 78848 Q. Quare fit 1 N. [illegible] vel [illegible]. ſeu in minimis [illegible]. vel [illegible]. Et ſi per vtrumlibet valorem Numeri reſoluas hypoſtaſes, fiunt vtroque modo latera circa rectum 19 $\frac{5}{7}$ & 17 [illegible]. Eſt ergo hypotenuſa 26 [illegible] ambitus 64. cui addendo aream, puta 175 [illegible]. fit quadratus [illegible]. cuius latus [illegible]. Hæc ad omnium pulcherrimi ſubtiliſſimique problematis explicationem adnotaſſe ſufficiat.

Quoniam verò in his libris Diophantus diuerſimodè vtitur duplicata æqualitate, non abs re me facturum arbitror, ſi omnes quos vſurpat modos ſigillatim recenſeam, & vnum in locum quæ ſparſim à nobis adnotata ſunt, collecta coniiciam, vt ſic tota duplicatæ æqualitatis doctrina diſcentium animis firmius inhæreat. Nec ſolas Diophanti hypotheſes afferemus, ſed & alias plerúmque exhibebimus, quibus varia huiuſmodi æquationum ſymptomata declarentur, nouamque inſuper quam excogitauimus æquationis rationem, quamque ad quadrageſimam quintam. quarti explicauimus, aliis adiiciemus.

OBSERVATIO D. P. F.

Vbi non ſufficiunt duplicatæ æqualitates vel διπλοισότητες, recurrendum ad τριπλοισότητας, ſeu triplicatas, æqualitates quæ eſt noſtra inuentio ad plurima problemata pulcherrima prauiam facem præferens. Æquentur videlicet quadrato

1 N + 4 oritur triplicata æqualitas cuius ſolutio per medium duplicatæ æqua-

2 N + 4 litatis eſt in promptu. Si ponatur loco 1 N. numerus vna cum 4 quadra-

5 N + 4 tum conficiens v. g. 1 Q + 4. N. fiet primus numerorum æquandorum quadrato 1 Q. + 4 N. + 4 ſecundus igitur erit 2 Q + 8 N. + 4. tertius 5 Q + 20 N + 4. primus autem ex conſtructione eſt quadratus, ergo debent æquari quadrato 2 Q + 8 N + 4 & 5 Q + 20 N + 4 & oritur duplicata æqualitas quæ vnicam certè exhibebit ſolutionem, ſed eâ exhibitâ prodibit rurſum noua, & à ſecunda tertia deducetur & in infinitum. Quod opus ita procedet vt inuento valore 1 N. rurſus ponatur 1 N. eſſe 1 N + numerus qui primum ipſi 1 N. inuentus eſt æqualis. Hac enim viâ infinitæ prioribus ſolutionibus ſolutiones accedunt & poſtrema ſemper deriuabitur à proxime antecedenti. Huius inuentionis beneficio infinita triangula eiuſdem areæ poſſumus exhibere, quod ipſum videtur latuiſſe Diophantum, vt patet ex quæſtione octaua lib. 5. in quâ tria tantum triangula æqualis areæ inueſtigat vt ſequentem quæſtionem in tribus numeris conſtruat quæ ad infinitos ex iiſque nos primi deteximus, recipit extenſionem.

PRIMVS MODVS vtendi duplicata æqualitate eſt, quando vterque numerus quadrato æquandus componitur ex Numeris & ex vnitatibus, & numerus Numerorum idem eſt vtrobique. Et hîc quatuor caſus conſiderari poſſunt. Primus caſus eſt, cùm vterque numerus & vnitatum & Numerorum afficitur ſigno pluris, vt accidit duodecima ſecundi, vbi æquandi erant quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. Itemque decima quarta tertij vbi æquandi erant quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. Et hîc facilis eſt æquationis ratio. Nam inueniendi ſunt duo quadrati, quorum idem ſit interuallum

atque ipſarum vnitatum quæ reperiuntur in numeris quadrato æquandis, hac tamen lege vt maior quæſitorum quadratorum excedat maiorem vnitatum numerum, minor quadratus excedat minorem vnitatum numerum. Vt cùm æquantur quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. quorum interuallum 1. quæremus duos quadratos, quorum interuallum ſit 1. ita vt maior quadratorum excedat 3. minor excedat 2. idcireo ſumi non poſſunt $\frac{25}{16}$. & $\frac{9}{16}$. neque $\frac{25}{9}$ & $\frac{16}{9}$. ſed ſumpſit Diophantus $\frac{289}{64}$ & $\frac{225}{64}$. Similiter cùm æquandi ſunt quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. quorum interuallum 48. ſumit Diophantus quadratos 16. & 64. quia 16. excedit 6. & 64. excedit 54. non potuerunt autem ſumi 1. & 49. ob defectum conditionis adiectæ.

Secundus caſus eſt, cùm vnitatum numeri afficiuntur vtrobique ſigno minoris, vt accidit decima quarta ſecundi, vbi æquandi fuere quadrato 1 N. − 6 & 1 N. − 7. & in hoc caſu abſque vlla conditione ſufficit inuenire duos quadratos, quorum interuallum æquet interuallum propoſitorum numerorum, vt in data hypotheſi, quia interuallum eſt 1. duo quicunque quadrati vnitate diſtantes, ſatisfacient propoſito, ſumpſit Diophantus $\frac{9}{16}$ & $\frac{25}{16}$. & ſumere potuiſſet $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{9}$. vel alios quoſcunque quorum interuallum ſit vnitas.

Tertius caſus eſt. Cùm Numerorum numeri afficiuntur vtrobique ſigno minoris, quod nuſquam accidit in Diophanto, ſed nobis decimam tertiam ſecundi per duplicatam æqualitatem ſoluentibus, in hunc caſum cõtingit incidiſſe, æquantibus quadrato tum 9 − 1 N. tum 21 − 1 N. Hic autem inueniendi ſunt duo quadrati eodem interuallo diſtantes, quo & propoſiti numeri, ea tamen lege vt maior ipſorum ſit minor vnitatibus maioris propoſitorũ numerorum; minor autem ſit minor vnitatibus minoris. Vt in data hypotheſi, quia propoſitorum numerorum interuallum eſt 12. Quærendi ſunt duo quadrati, quorum interuallum ſit 12. ita tamen vt maior quæſitorum quadratorum ſit minor quàm 21. minor autem ſit minor quàm 9. quales ſumpſimus 4. & 16.

. Quartus caſus eſt. Cùm in vno propoſitorum numerorum, vnitatum numerus afficitur ſigno pluris, in altero afficitur ſigno minoris, vt ſi ſint æquandi quadrato 1 N. + 8. & 1 N. − 12. Tuncque inueniendi ſunt duo quadrati quorum interuallum ſit idem, atque propoſitorum numerorum, abſque vlla conditione. Sic in data hypotheſi, quia propoſitorum numerorum interuallum eſt 20. ſumam duos quadratos, quorum interuallum ſit 20. quales ſunt 36. & 16. Itaque in his omnibus caſibus, manifeſtum eſt propoſitam quamcunque duplicatam æqualitatem infinitis modis explicari poſſe.

Secvndvs Modvs vtendi duplicata æqualitate eſt, quando rurſus vterque propoſitorum numerorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & Numerorum numeri ſunt inæquales, ſed vnitatum numerus vtrimque quadratus eſt. Et hic duplex caſus conſiderari poteſt. Primus caſus eſt, cùm idem quadratus numerus vnitatum vtrimque reperitur, vt accidit in prima operatione quadrageſimæ quintæ quarti vbi æquantur quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & in hoc caſu cùm Interuallum propoſitorum numerorum conſtet ex ſolis Numeris (vt vides in data hypotheſi huiuſmodi interuallum eſſe 2 N.) quærendi ſunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiat dictum interuallum, ea lege vt in ſumma eorum contineatur duplum lateris quadrati, qui eſt in vtroque propoſitorum numerorum, vt in dato exemplo cùm latus quadrati 4. ſit 2. cuius duplum 4. deligendi ſunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita vt in ſemiſſe ſummæ illorum reperiantur 4. vnitates, vnde patet alios deligi non poſſe quàm $\frac{1}{2}$ N. & 4. quorum ſummæ ſemiſſis quadratum ſi æques maiori 8 N. + 4. vel eorundem interualli ſemiſſis quadratum æques minori 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. 112. vnde liquet in hoc caſu vnicam tantum dari poſſe ſolutionem. Reducitur tamen hic caſus ad quartum modum, vt infrà oſtendemus, qua ratione infinitis modis reſolui poteſt.

Secundus caſus eſt, cùm in propoſitis numeris, inæquales vnitatum numeri quadrati continentur, vt accidit decima ſeptima tertij, vbi æquantur quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. quorum interuallum cùm componatur ex Numeris & vnitatibus, eſt quippe 5 N. + 5. tales ſunt deligendi duo numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum ſumma reperiatur duplum lateris maioris quadrati, & in eorum interuallo reperiatur duplum lateris minoris quadrati, hoc eſt vt in ſumma reperiatur 6. in interuallo 4. Quare per Canonem primæ primi facilè reperientur huiuſmodi numeri puta 5. & 1. Aliter eoſdem numeros reperies, ſi capias ſummam & interuallum laterum quadratorum 9. & 4. hoc eſt ſummam & interuallum ipſorum 3. & 2. fient enim vt prius 5. & 1. Quia igitur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. ſumendi ſunt duo numeri, in quorum altero ſint vnitates 5. in altero 1. Patet nonniſi duobus modis tales numeros ſumi poſſe, puta vel 5 N. + 5. & 1. vel 1 N. + 1. & 5. vnde liquet in hoc caſu contingere poſſe vt duæ ſolutiones exhibeantur, dico contingere poſſe quia plerumque vnica prouenit ſolutio, vt in data hypotheſi, non enim ſumendo 5 N. + 5. & 1. ſolui poteſt quæſtio, quia horum ſummæ ſemiſſis quadratus, puta $\frac{25}{4}$ Q. + 15 N. + 9. maior eſt omnino quàm 10 N. + 9. ac proinde illi æquari nequit. Contingit autem duplex ſolutio ſi proponantur æquandi quadrato 36 N. + 49. & 12 N. + 1. quia enim horum interuallum eſt 24 N. + 48. conſtat ex tradita regula produci poſſe huiuſmodi interuallum, ſiue ex 6. in 4 N. + 8. ſiue ex 8. in 3 N. + 6. Vnde fit 1 N. vel 2. vel $\frac{20}{3}$.

Porro in hoc ſecundo caſu poteſt accidere vt vterque vel alter numerus Numerorum afficiatur ſigno minoris. Vt ſi ſint æquandi quadrato 36 − 6 N. & 16 − 1 N. quorum interuallum 20 − 5 N. Quod ſi ponatur fieri ex 2. in 10 − $\frac{5}{2}$ N. optimè reſoluetur æquatio, & fiet 1 N $\frac{144}{25}$. Rurſus ſi ſint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 + 9 N. quorum interuallum 20 − 10 N. hoc ſi ponatur fieri ex 2. in 10 − 5 N. vel etiam ex 10 in 2 − 1 N. duobus modis reſoluetur æquatio, & fiet 1 N. vel $\frac{116}{25}$. vel 20. Attamen vtrumlibet horum accidat, ſæpè continget æquationem reſolui nullatenus poſſe, vt ſi ſint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 − 6 N. quorum interuallum 20 + 5 N. Etenim ſi per regulam traditam ſumantur numeri, quorum mutuo ductu fiat 20 + 5 N. horum ſummæ ſemiſſis quadratus ſemper erit maior quàm 36 − 1 N. quia omnes illius partes afficientur ſigno Pluris. Quare quotieſcunque minor Numerorum defectus ſe tenebit ex parte maioris quadrati, erit impoſſibilis æquationis duplicatæ reſolutio. Sed etſi minor defectus iungatur minori quadrato, non ſemper reſolui poterit æquatio, vt ſi ſint æquandi quadrato 9 − 8 N. & 4 − 6 N. Cùm enim horum interuallum ſit 5 − 2 N. ſiue ponas illud produci ex 1. in 5 − 2 N. ſiue ex 5. in 1 − $\frac{2}{5}$ N. nil ages, nam horum ſummæ ſemiſſis quadratus ſemper erit maior quàm 9 − 8 N. Similiter cùm numeri ex vna tantùm parte deficiunt, poteſt impoſſibilis eſſe æquationis reſolutio, vt ſi ſint æquandi quadrato 36 + 3 N. & 16 − 9 N. Cùm enim horum interuallum ſit 20 + 12 N. non poteſt id fieri niſi ex 2. in 10 + 6 N. vel ex 10. in 2. + $\frac{6}{5}$ N. ſed vtroque modo, illorum ſummæ ſemiſſis quadratus maior eſt quàm 36 + 3 N. Quia vero & caſus iſte ſecundus cum omnibus ſuis ſymptomatis reduci poteſt ad Quartum modum, vt infrà docebimus, ſemper huiuſmodi æquationes non vna ratione reſolui poterunt.

Tertivs modvs eſt, cùm rurſus propoſiti numeri componuntur ex Numeris & vnitatibus inæqualibus multitudine, & vnitatum numeri quadrati non ſunt, ſed Numerorum numeri ſunt plani ſimiles. Vt accidit decima octaua & decima nona tertij. Itemque trigeſima quinta quarti. Et reducitur hic modus ad primum, faciendo numeros Numerorum æquales. Nam interdum minor ducitur in denominatorem rationis quàm habet ad eum maior, & ſic fit æqualis maiori, vt trigeſima quinta quarti, vbi cùm æquandi ſint quadrato 65 − 6 N. & 65 − 24 N. quia 24. ad 6. eſt ratio quadrupla ducitur 4. in 65 − 6 N. & fit 260 − 24 N. Iam ergo ſi æques quadrato 260 − 24 N. & 65 − 24 N. id perages per ea quæ dicta ſunt de tertio caſu primi modi. Interdum verò ad vitandas fractiones ſumuntur quadrati duo in eadem ratione quam habent inter ſe propoſiti Numerorum numeri, quique habeant partes propoſitis fractionibus expreſſas, & maior ducitur in minorem, & minor in maiorem, vnde productorum exiſtit æqualitas ob identitatem proportionis. Sic decima octaua tertij cùm æquandi ſint quadrato 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N + $\frac{3}{10}$. Quamuis Numerorum inter ſe ſit ratio quadrupla, non ducitur tamen 4. in minorem, quia ſic non tollerentur fractiones, ſed ſumuntur duo quadrati 100. & 25 in eadem ratione, quique habeant partes fractionibus expreſſas, puta $\frac{1}{5}$. & $\frac{3}{10}$. ductoque maiore 100. in minorem $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. & minore 25. in maiorem 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$. fiunt iam æquandi quadrato 130 N. + 30. & 130 N. + 105. qui eſt primus caſus primi modi. Rurſus decima nona tertij, cùm ſint æquandi quadrato 2 $\frac{1}{2}$ N. − 3 $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{8}$ N. − $\frac{13}{8}$. vbi etiam numeri Numerorum ſunt quadrupli, ſumuntur quadrati 4. & 16. in eadem ratione qui habent partes fractionibus expreſſas, puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{8}$. Factaque decuſſatim multiplicatione fiunt æquandi quadrato 10 N. − 26. & 10 N. − 14. qui eſt ſecundus caſus primi modi. Cæterùm aduerte ſimili prorſus artificio caſum ſecundum ſecundi modi reduci poſſe ad primum. Sint enim æquandi quadrato 9 N. + 16. & 7 N. + 4. Quia 16. ad 4. eſt in ratione quadrupla, ſi ducas 4. in 7 N. + 4. fient iam æquandi quadrato 28 N. + 16. & 9 N. + 16. qui eſt primus caſus ſecundi modi. Quod ſi vnitates quadratæ in propoſitis numeris contentæ, ſint minimi in ſuis rationibus numeri, tunc ad vitandas fractiones, commodius erit quemlibet propoſitorum numerorum viciſſim multiplicare per vnitates alterius, vt in hypotheſi decimæ ſeptimæ tertij, vbi æquandi ſunt quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. duces 4. in 10 N. + 9. & duces 9. in 5 N. + 4. fientque quadrato æquandi 40 N. + 36. & 45 N. + 36. Et in vniuerſum quoties rationis quadratorum talis eſt denominator, vt eo ducto in illum propoſitorum numerorum, in quo continetur minor quadratus, non fiat integer numerus Numerorum, ſumptis ſimiliter minimis in ratione quadratorum eorundem, per eos decuſſatim multiplicabis propoſitos numeros, vt ſi ſint æquandi quadrato, 10 N. + 36. & 5 N. + 16. ſumes minimos in ratione 36 ad 16. puta 9. & 4. & per eos facta decuſſatim multiplicatione, fient iam æquandi quadrato 40 N. + 144. & 45 N. + 144. qui eſt vtique primus caſus ſecundi modi.

Qvartvs modvs eſt, cùm propoſiti Numeri quadrato æquandi conſtant ex Numeris & vnitatibus, & vnitatum numerus quadratus eſt, & idem vtrimque, vt in primo caſu ſecundi modi. Sed cùm per ſecundum modum vix vna aut altera contingat ſolutio, per hunc quartum modum infinitæ poſſunt exhiberi ſolutiones, etiamſi requiratur vt valor Numeri conſiſtat intra præſcriptos limites. Sic Diophantus quadrageſima quinta quarti æquauit quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. volens valorem numeri minorem eſſe quàm 2. Cùm per ſecundum modum, valor Numeri neceſſario fiat 112. & hìc triplex caſus conſiderari poteſt.

Primus caſus eſt, quando vterque propoſitorum numerorum, continet Numeros affectos ſigno

pluris. Sic in hypotheſi Diophanti, vbi in vtroque numero Numeri afficiuntur ſigno pluris, procedet æquatio ſi conſiderentur tres numeri 8 N. + 4. 6 N. + 4. & 4. Nam cùm maiorum interuallum ſit 2 N. minorum 6 N. quærendi ſunt duo quadrati, quorum interuallum ſit triens interualli, quo minor illorum ſuperabit 4. Ponatur minoris latus 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. qui cum excedat 4. numero 1 Q. + 4 N. cuius triens $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. hoc addito, ipſi quadrato, fiet maior quadratus 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. Hic ergo æquandus eſt quadrato, & ad tollendas fractiones omnia ducendo in 9. tum vt æquatio reducatur ad minimos, omnia diuidendo per 4. fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus vt patet infinitis modis fingi poteſt, & cum qualibet data Numeri determinatione, fingatur cum Diophanto 5 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Erunt ergo latera quadratorum $\frac{48}{11}$ & $\frac{43}{11}$. ipſi quadrati $\frac{2304}{121}$. $\frac{1849}{121}$. quorum priorem ſi æques 8 N. + 4. vel poſteriorem 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. $\frac{455}{242}$.

Secundus caſus eſt. Quando vterque numerus Numerorum afficitur ſigno minoris, vt ſi ſint æquandi quadrato 16. − 1 N. & 16 − 5 N. Tuncque conſidero tres Numeros 16. 16 − 1 N. 16 − 5 N. & quia maiorum interuallum eſt 1 N. minorum 4 N. vnde interuallorum ratio eſt quadrupla, quæro duos quadratos, quorum interuallum ſit quadruplum interualli, quo maior ſuperabitur à 16. Ponatur latus maioris 4 − 1 N. fiet quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui ſuperatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius quadruplum 32 N. − 4 Q. Quod ſi auferas à prædicto quadrato, manet minor quadratus 16 − 40 N. + 5 Q. cuius latus ita finges, vt 1 N. ſit minor quàm $\frac{16}{5}$. ob numerum 16 − 5 N. Pone illud 4 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{8}{31}$. Ergo latera quadratorum ſunt $\frac{116}{31}$ & $\frac{76}{31}$. ipſi quadrati $\frac{13456}{961}$. $\frac{5776}{961}$. quorum maiorem ſi æques 16 − 1 N. minorem verò 16 − 5 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{1920}{961}$.

Tertius caſus eſt, cùm in maiore propoſitorum numerorum Numeri afficiuntur ſigno pluris, in minore verò afficiuntur ſigno minoris, vt ſi quadrato æquandi ſint 16 + 6 N. & 16 − 2 N. Tuncque conſiderans tres numeros 16 + 6 N. 16. & 16 − 2 N. vbi maiorum interuallum 6 N. triplum eſt interualli minorum 2 N. quæro duos quadratos, vt interuallum maioris ſuper 16. ſit triplum interualli quo 16. ſuperabit minorem. Eſto latus minoris 4 − 1 N. fit quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui ſuperatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius triplum 24 N. − 3 Q. quod addito ad 16. fit maior quadratus 16 + 24 N. − 3 Q. cuius latus ita fingendum, vt 1 N. ſit maior quàm 4. quia latus minoris quadrati ponitur 4 − 1 N. Ponatur 5 N. − 4 fiet 1 N. $\frac{16}{7}$. eruntque quadratorum latera $\frac{52}{7}$. & $\frac{12}{7}$. quadrati $\frac{2704}{49}$. $\frac{144}{49}$. quorum maior ſi fiat æqualis 16 + 6 N. vel minor æquetur 16 − 2 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{320}{49}$.

Itaque quoniam vt ſuprà docuimus ſecundus caſus ſecundi modi ſemper reduci poteſt ad primum, ac per conſequens ad aliquem horum trium caſuum, & in quolibet horum trium caſuum ſolutiones infinitæ reperiri poſſunt, conſtat vtique & ſecundum caſum ſecundi modi cum omnibus ſuis ſymptomatis ſemper infinitis modis reſolui poſſe.

Qvintvs modvs quem ipſi commenti ſumus eſt. Quando vterque propoſitorum numerorum quadrato æquandorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum ſunt inæquales, nec habent inter ſe rationem quadrati ad quadratum, nec etiam vnitatum numeri ſint quadrati. Quoniam verò modum hunc, & duplicem illius caſum fusè ad quadrageſimam quintam quarti explicauimus, non eſt cur ibidem adnotata hic reponantur, ne inani eiuſdem rei repetitione commentarios noſtros augere velle videamur.

Sextvs modvs eſt. Quando propoſiti numeri diuerſimodè componuntur ex quadratis, Numeris & vnitatibus, & hic pro omni caſu qui excogitari poſſit, duæ regulæ ſunt obſeruandæ, vt æquatio ſit explicabilis. Primo enim oportet, vt vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus ſit. Deinde oportet interuallum propoſitorum numerorum, ex vna vel ex duabus ſpeciebus tantùm componi. Cæterùm caſus omnes poſſibiles explicare nobis non eſt propoſitum, ſed eos omnes in quos incidit Diophantus ſubiicere ſatis habebimus, cùm ex iis colligi poſſit quomodo in aliis ſit procedendum.

Primò ergo accidit vtrumque propoſitorum Numerorum componi ex tribus ſpeciebus ſupradictis, & eorum interuallum vnica tantùm conſtare ſpecie, vt vigeſima tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. + 4 N. − 1. quorum interuallum 1 N. ad quod conficiendum mutuo ductu deligi poſſunt ſoli $\frac{1}{4}$. & 4 N. vt in eorum ſumma reperiantur 4 N. duplum ſcilicet 2 N. lateris quadrati 4 Q. Quare vnica contingit ſolutio. Sic etiam vigeſima prima tertij, æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. − 1 N. − 1. quorum interuallum 4 N. quod mutuo ductu conficiunt 1. & 4 N. ob cauſam ſuprà allatam. Et vnica tantùm contingit ſolutio.

Secundò accidit vtrumque propoſitorum numerorum ex duabus componi ſpeciebus, alterum ſcilicet ex quadratis & vnitatibus, alterum ex Numeris & vnitatibus, interuallum autem illorum conſtare ex quadratis & Numeris. Sic prima quinti æquantur quadrato 1 Q. − 12. & 6 $\frac{1}{2}$ N. − 12. quorum interuallum 1 Q. − 6 $\frac{1}{2}$ N. Quare tales deligendi numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum ſumma repetiantur 2 N. duplum lateris quadrati 1 Q. Igitur alij ſumi non poſſunt quàm 1 N. & 1 N. − 6 $\frac{1}{2}$. Sic rurſus ſecunda quinti æquantur quadrato 1 Q. + 20. & 4 N. + 20. quorum

interuallum 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1. N. − 4. Sic denique ſexta ſexti, æquantur quadrato 1 Q. + 1. & 14 N. + 1. quorum interuallum 1 Q. − 14. N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 14.

Tertiò accidit alterum propoſitorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus. Alterum ex quadratis & Numeris, vt decima quinta tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. − 1 N. − 4. & 4 Q. + 15 N. quorum interuallum 16 N. + 4. ad quod conficiendum deligendi numeri in quorum ſumma reperiantur 4 N. ac proinde ſoli 4. & 4 N. + 1. deligi poſſunt.

Quarto accidit alterum propoſitorum numerorum componi ex quadratis Numeris, & vnitatibus, alterum ex quadratis & vnitatibus. Sic vigeſima quarta quarti, æquantur quadrato 1 Q. + 1 N. + 1. & 1 Q. − 1. quorum interuallum 1 N. quod fit ex ½. in 2 N. Sic rurſus octaua ſexti, æquantur quadrato 1 Q. + 14 N. + 1. & 1 Q. + 1. quorum interuallum 14 N. quod fit ex 2 N. in 7. Poſſet etiam in hoc caſu interuallum numerorum componi ex Numeris & vnitatibus, vt nobis accidit vigeſimam tertiam quarti, per duplicatam æqualitatem ſoluentibus, æquauimus enim quadrato 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. − 1. quorum interuallum 2 − 1 N. quod fit ex ½. in 4 − 2 N.

Quintò denique accidit alterum propoſitorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, alterum verò ex Numeris & vnitatibus, vt propoſitione hac vigeſima quarta libri huius, vbi 1 Q. + 1048576 − 6144 N. & 1 N. + 64. æquantur quadrato. Quo caſu vt interuallum ex duabus tantùm ſpeciebus componatur, neceſſe eſt vel vnitates, vel Numeros vtrobique æquales multitudine reperiri, vel ſaltem inter eos eſſe rationem quadrati ad quadratum, quò poſſint ad æqualitatem reduci, vt in data hypotheſi, quia vnitates 1048576. & 64. ſunt in ratione quadrati ad quadratum, cùm vterque numerus ſit quadratus, reducuntur ad æqualitatem ducendo 1 N. + 64. in 16384. denominatorem rationis quam habet 1048576. ad 64. & fit 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato, vnà cum ipſo 1 Q. + 1048576 − 6144 N. Quare horum interuallum, iam ex duabus tantùm conſtat ſpeciebus, eſt enim 22528 N. − 1 Q. vel contrà 1 Q. − 22528 N. & duobus modis reſolui poteſt æquatio, quia tam quadratorum quàm vnitatum numerus quadratus eſt, vt ſuprà ſatis ſupérque docuimus.

OBSERVATIO D. P. F.

HVic de duplicatis æqualitatibus tractatui multa poſſemus adiungere quæ nec veteres nec noui detexerunt. Sufficit nunc, vt methodi noſtræ dignitatem & vſum aſſeramus, vt quæſtionem ſequentem quæ ſane difficillima eſt reſoluamus. Inuenire triangulum rectangulum numero, cuius hypotenuſa ſit quadratus, & pariter ſumma laterum circa rectum. Triangulum quæſitum repræſentant tres numeri ſequentes 4687298610289. 4565486027761. 1061652293520. Formatus autem à duobus numeris ſequentibus 2150905. 246792. Aliâ autem methodo ſequentis quæſtionis ſolutionem deteximus. Inuenire triangulum rectangulum numero eâ conditione vt quadratum differentiæ laterum circa rectum minus duplo quadrati à minore latere conficiat quadratum. Vnum ex triangulis quæ huic quæſtioni aptantur eſt id quod ſequitur 1525. 1517. 156. formatur à numeris 2. 9. & 2.

Imo confidenter adiungimus duo triangula rectangula quæ iam expoſuimus ad ſolutionem duarum propoſitarum quæſtionum eſſe minima omnium in integris quæſtiones adimplentium.

Methodus noſtra hæc eſt. Quæratur quæſtio propoſita ſecundum methodum vulgarem, ſi non ſuccedat ſolutio poſt abſolutam operationem quia nempè valor numeri notâ defectus inſignitur & ideo minor eſſe nihilo intelligitur, non tamen deſpondendum animum confidenter pronuntiamus (quæ oſcitantia, vt loquitur Vieta, fuit & ipſius & veterum analyſtarum.) Sed iterum quæſtionem tentemus & pro valore radicis ponamus 1 N. − numero quem ſub ſigno defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubiè æquatio quæ per veros numeros ſolutionem quæſtionis repræſentabit. Et hac via ſuperiores duas quæſtiones alioquin difficillimas reſoluimus, demonſtrauimus pariter & conſtruximus numerum ex duobus cubis compoſitum in duos alios cubos diuidi poſſe, ſed hoc per iteratam ter aliquando operationem. Sæpius enim contingit vt veritas quæſita ad multiplices operationum iterationes ſolertem & induſtrium neceſſario adigat analyſtam vt facillimè experiendo deprehendes.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά. καὶ μερισθεὶς παρὰ τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ κύβον, καὶ πλευράν. τετάχθω ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς^{ο} ᾱ. ἡ δὲ ἑτέρα δ^{υ} ᾱ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ὢν τετράγωνος, καὶ πλευρά. καὶ μερισθεὶς παρὰ τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιεῖ κύβον καὶ πλευράν. λοιπὸν δεῖ δ^{δ} δ^{υ} ᾱ. δ^{υ} ᾱ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ πάντα παρὰ δύναμιν. γίνεται δύναμις ᾱ μ^{ο} ᾱ. ἴσῃ τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^{ο} ᾱ. Ⴔ μ^{ο} β. ὅθεν ὁ ς^{ο} γίνεται μ^{ο} γ^{δ}. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt quadratus hypotenuſæ ſit alius quadratus, & latus; & diuiſus per vnum laterum circa rectum, faciat cubum & latus. Statuatur vnum laterum circa rectum 1 N. alterum verò 1 Q. & manet quadratus hypotenuſæ æqualis quadrato aucto ſuo latere, idemque diuiſus per vnum laterum circa rectum, facit cubum cum ſuo latere. Reſtat vt 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et omnia per 1 Q. diuidantur, fit 1 Q. + 1. æqualis quadrato. Eſto quadrato a latere 1 N. − 2. fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & reliqua ſunt manifeſta.

IN QVÆSTIONEM XXV.

NESCIO quid ſomniat hîc Xilander de quadrilatero regulari, & de numero 80. Sanè in codice manu exarato ſic habebatur, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος ε π. Quare cùm paſſim hoc libro vox πλευρὰ exprimatur vnico π cum λ. ſuperſcripto, hac ratione π$^{\lambda}$. ſatis colligi poterat, veram lectionem eſſe, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά.

Cæterùm artificiosè Diophantus per ipſas poſitiones, duabus propoſiti partibus ſatisfacit, nam quadratus hypotenuſæ fit 1 QQ. + 1 Q. qui eſt quadratus cum ſuo latere, & idem quadratus hypotenuſæ diuiſus per alterum laterum circa rectum, puta per 1 N. dat quotientem 1 C. + 1 N. cubum ſcilicet cum ſuo latere. Quamobrem ſupereſt ſolùm, vt quadratus hypotenuſæ, nempe 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et diuidendo per 1 Q. fit 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus poni poteſt 1 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus ſuperet 1. Ponit Diophantus 1 N. − 2. vnde fit 1 N. $\frac{3}{4}$. ſuntque trianguli quæſiti latera $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{15}{16}$. Quadratus hypotenuſæ eſt $\frac{225}{256}$. qui continet quadratum $\frac{81}{256}$. & eius latus $\frac{9}{16}$. ſeu $\frac{144}{256}$. & diuidendo eundem quadratum hypotenuſæ per latus $\frac{3}{4}$. fit $\frac{900}{768}$. ſeu $\frac{75}{64}$. qui continet cubum $\frac{27}{64}$. & eius latus $\frac{3}{4}$. ſeu $\frac{48}{64}$. Non ſolùm autem inuenti hac arte numeri præſtant ea quæ requirit Diophantus, ſed præterea ſumma laterum circa rectum eſt quadratus cum ſuo latere, vt patet tum ex poſitionibus, nam ſumma laterum circa rectum poſita eſt 1 Q. + 1 N. tum ex ipſa ſolutione, nam $\frac{3}{4}$. eſt latus quadratum de $\frac{9}{16}$.

Hîc etiam formari poterit expeditus Canon.

Quemlibet quadratum vnitate multatum, diuide per duplum ſui lateris, velè conuerſo, vter volueris quotientum erit alterum laterum circa rectum, & eius quadratus erit alterum latus. Horum autem quadrati ſimul conficient hypotenuſa quadratum.

Verbi gratia aufer 1. à quadrato 9. & reſiduum 8. diuide per 6. duplum lateris ipſius 9. vel contrà diuide 6. per 8. quotiens $\frac{4}{3}$. vel $\frac{3}{4}$. alterum laterum circa rectum. Ergo alterum erit $\frac{16}{9}$. vel $\frac{9}{16}$. & hypotenuſa $\frac{25}{9}$. vel $\frac{25}{16}$. Quare vnica operatione duplex reperitur ſolutio, cuius rei ratio eſt, quia contingit 1 Q. + 1. æquari quadrato, & quia tam 1 Q quàm 1. quadratus eſt, poteſt latus illius fingi vel 1 N. − quotlibet vnitatibus, vel 1 − quotlibet Numeris, puta, vel 1 N. − 3. vel 1 − 3 N.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ κύβος παρὰ πλευράν, ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κύβος ε πλευρά. τετάχθω ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κ^{υ} ᾱ. ἀριθμῶν ᾱ. ὁ δὲ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν κ^{υ} ᾱ. λεῖψει ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ ἄρα ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἔσται δυνάμεων

INVENIRE triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum ſit cubus; alterum verò ſit cubus ſuo multatus latere, hypotenuſa denique ſit cubus auctus ſuo latere. Statuatur hypotenuſa 1 C. + 1 N. vnum verò laterum circa rectum 1 C. − 1 N. Reliquum ergo latus erit

2 Q. Reſtat vt 2 Q. æquentur cubo. Eſto 1 C. & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit triangulum 6. 8. 10. & conſtat.

β. λοιπὸν δεῖ δυνάμεις β. ἰσῶσαι κύβῳ ἔστω κ° α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° β. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται τὸ τρίγωνον ς. η. ι. καὶ φανερόν.

IN QVAESTIONEM XXVI.

HIc duo maximè notanda ſunt. Primum non ſinè arte poni hypotenuſam 1 C. + 1 N. & alterum laterum 1 C. − 1 N. Nam hac ratione ſatisfit duabus poſtulati partibus, ſiquidem hypotenuſa eſt cubus cum ſuo latere, & alterum laterum eſt cubus ſuo latere multatus. Deinde cùm vt habeamus tertium latus, oporteat à quadrato hypotenuſæ, nempe ab 1 CC. + 2 QQ. + 1 Q. auferre quadratum lateris ſecundi, puta 1 CC. − 2 QQ. + 1 Q. & quod ſupereſt, nempe 4 QQ. ſit quadratus tertij lateris, res optimè ſuccedit, eo quod 4 QQ. eſt quadratus, ac proinde latus eius 2 Q. eſt tertium latus. Et ſimile ſemper eueniet ſi hypotenuſa ponatur quilibet cuborum numerus cubicus, plus ſuo latere, & ſecundum latus ponatur idem cubus, minus ſuo latere. Nam interuallum quadratorum, erit ſemper certus quadratoquadratorum numerus, qui fit quater ex cubo in ſuum latus, quandoquidem hi quadrati ſunt omnino ſimiles, niſi quod in quadrato hypotenuſæ continetur duplum producti ex cubo in ſuum latus cum ſigno pluris, & in quadrato lateris ſecundi, continetur idem duplum producti ex cubo in ſuum latus cum ſigno minoris. Proinde quadratorum interuallum aliud non eſt quàm quadruplum producti ex cubo in ſuum latus. Igitur quadruplum hoc ſemper eſſe quadratum demonſtrandum eſt. Non ſolùm autem hoc oſtendemus, ſed quod vniuerſalius eſt, ducto quolibet quadrato in aliquem numerum, & producto in cubum eiuſdem numeri multiplicato, produci quadratum, vt non de quadruplo tantùm, ſed etiam de noncuplo, ſedecuplo, &c. idem conſtet.

D 9. E 3. F 1.
A 2. B 4. C 8.
G 18. H 12.

Eſto quilibet numerus A. cuius quadratus B. & cubus C. & ſumatur quilibet quadratus D. quo ducto in A. fiat G. dico ſi G ducatur in cubum C. fieri quadratum. Sumatur enim E. latus quadrati D. & ſit F vnitas, ductoque E in B producatur H. Paret igitur per ea quæ ad definitionem quartam primi, demonſtrata ſunt, tam tres A B C. quàm tres D E F. eſſe proportionales. Quare cùm ex primo D in primum A. fiat G. & ex ſecundo E in ſecundum B fiat H. ac denique ex tertio F in tertium C. fiat ipſe C. erunt & tres G. H. C. proportionales. Quare ex G in C. fiet quadratus ipſius H. Quod erat propoſitum.

Hinc euidens eſt dupliciter variari poſſe ſolutionem & poſitiones, Nam primò licet ponere pro hypotenuſa quemlibet cuborum numerum cubicum, plus latere ipſius cubi, & pro altero laterum, eundem cubum minus ſuo latere. Deinde tertium latus quod ſemper reperitur certus quadratorum numerus, poteſt æquari diuerſimodè alicui cuborum numero cubico, vt in hypotheſi Diophanti 2 Q. poſſunt æquari $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{64}$ C. &c. vt ſi ponas 2 Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet quæſitum triangulum 4112. 4080. 512. Neceſſe eſt autem hic 2 Q. æquari alicui cuborum numero cubico minori quàm 2. quia cùm alterum latus poſitum ſit 1 C. − 1 N. oportet vt 1 C. ſit maior ſuo latere, quod accidet ſi 1 N. ſit maior vnitate. Id autem continget ſi 2 Q. æquentur cuilibet cubo minori quàm 2. vt euidens eſt, quia valor Numeri reperitur diuidendo 2. per aliquem cubum. Si ergo cubus ille ſit minor quàm 2. fiet vtique quotiens maior vnitate.

Hic etiam formabitur huiuſmodi Canon.

Per quemlibet cubum minorem binario, diuide binarium, quotientem adde ſuo cubo, & deme à ſuo cubo, habebis hypotenuſam, & vnum laterum. Tertium verò latus erit duplum quadrati quotientis eiuſdem.

Sed & ſimili prorſus artificio licebit ſoluere huiuſmodi quæſtiones.

Inuenire triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum, ſit quadratus, alterum quadratus abſque latere: hypotenuſa quadratus cum latere.

Eſto hypotenuſa 1 Q. + 1 N. vnum latus 1 Q. − 1 N. ergo à quadrato hypotenuſæ auferendo lateris quadratum, manet tertij lateris quadratus 4 C. quod quia volumus eſſe quadratum, oportet vt quadratus ipſius ſit quadratoquadratus. Igitur 4 C. æquantur quadratoquadrato. Eſto 1 QQ. fit igitur 1 N. 4. eſtque triangulum 20. 12. 16. vbi etiam neceſſe eſt 4 C. æquari alicui quadratoquadrato minori quàm 4. ob cauſam ſuprà explicatam. Et ſi ponas 4 C. æquari $\frac{1}{16}$ QQ. fiet 1 N. 64. eritque triangulum 4160. 4032. 1024.

Hic finem impoſiturus eram noſtris commentariis in hoſce Diophanti Arithmeticorum libros, cùm venit in mentem, multa alia, eaque non iniucunda proponi poſſe de triangulis rectangulis problemata, quæ huic libro ſubiicere non abs re viſum eſt, ab illis ſumentes exordium quæ determinationes varias de lateribus, vel de ipſa trianguli area docent.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato ambitu trianguli, inuenire terminos intra quos conſiſtere debet hypotenuſa. Datus ambitus eſto 10.

Primum certum eſt hypotenuſam, minorem eſſe debere ſemiſſe dati ambitus, eò quod cuiuſlibet trianguli latus, minus eſt duobus reliquis ſimul. Quare maior quæſitorum terminorum eſt 5. excluſiuè. Vt autem habeatur minor terminus, ponatur hypotenuſa 1 N. ergo reliqua latera ſimul erunt 10 − 1 N. Quare vt fiat triangulum rectangulum, oportet diuidere 10 − 1 N. in duos numeros, quorum quadrati ſimul conficiant 1 Q. Quod vt fieri poſſit per Canonem trigeſimæ primi, conſtat oportere, vt duplum ſummæ quadratorum, putà 2 Q. ſuperet quadratum ſummæ duorum numerorum, nempè 100 − 20 N. + 1 Q. Quare ſublatis vtrimque æqualibus, & addito defectu, fit 1 Q. + 20 N. maior quàm 100. ex hac autem æquatione fit 1 N. ℞ 200 − 10. Ergo certum eſt hypotenuſam, non poſſe eſſe minorem quàm ℞ 200 − 10. Quapropter ℞. 200 − 10. eſt minor terminus incluſiuè. Dico incluſiuè, quia hypotenuſa poni poteſt ℞ 200 − 10. ſi videlicet latera circa rectum ponantur æqualia. Nam conditio ad trigeſimam primam primi appoſita, eatenus locum habet, quatenus inæquales numeri quæruntur, vt ibi adnotauimus. Ex his igitur elici poteſt huiuſmodi Canon.

Semiſſis dati ambitus eſt maior terminus excluſiuè. Et ſi ſumas duplum quadrati eiuſdem ambitus, & ab illius latere auferas ipſum ambitum, reſiduum erit minor terminus incluſiuè.

Itaque ſi in rationalibus numeris ipſum minorem terminum exhiberi cupias, id fiet per approximationem hac arte. Quia vt conſtat ex ſuprà dato Canone, minor terminus hypotenuſæ reſpectu ambitus, eſt ℞ 2 Q. − 1 N. ſume latus proximum de 2 Q. putà $\frac{99}{70}$ N. & hinc aufer 1 N. reſtat $\frac{29}{70}$ N. Quare talem habeto regulam.

Ducito datum ambitum in 29. productum diuide per 70. orietur minor terminus quæſitus.

Vt data circumferentia 10. ducito 10 in 29. fit 290. quem diuide per 70. fit minor terminus quæſitus $4\frac{1}{7}$. Quare dices dato ambitu 10. hypotenuſam fore minorem quàm 5. non minorem quàm $4\frac{1}{7}$.

PROBLEMA II.

Dato ambitu trianguli rectanguli, inuenire terminos ſummæ laterum circa rectum.

Ex præcedente pendet hæc quæſtio, quia enim ſumma laterum circa rectum, vna cum hypotenuſa, conficit totum ambitum, patet terminos ſummæ laterum circa rectum reſpondere terminis hypotenuſæ, ita vt ab ambitu trianguli auferendo ſigillatim terminos hypotenuſæ, relinquantur termini ſummæ laterum. Sic poſito ambitu 10. cùm per præcedentem fiant termini hypotenuſæ, 5. & 1. ℞ 200 − 10. ſi vtrumque auferas à toto ambitu 10. remanebunt termini ſummæ laterum circa rectum, nimirum minor excluſiuè 5. incluſiuè 20 − ℞ 200.

Vnde Canon.

Semiſſis dati ambitus eſt minor terminus excluſiuè, & ſi à duplo ambitus, auferas latus dupli quadrati ipſius ambitus, reſiduum erit maior terminus incluſiuè.

Fiet igitur terminus reſpectu ambitus 2 N. − ℞ 2 Q. ſeu per approximationem $\frac{41}{70}$ N. vnde regula.

Ducito datum ambitum in 41. productum diuide per 70. orietur maior terminus quæſitus.

Vt dato ambitu 10. ducito 10. in 41. fit 410. quem diuide per 70. fit maior terminus quæſitus $5\frac{6}{7}$. Oportet ergo ſummam laterum circa rectum cadere inter 5. & $5\frac{6}{7}$.

PROBLEMA III.

Dato ambitu, inuenire terminos aggregati ex hypotenuſa, & ex altero laterum. Ambitus eſto 12.

Primo patet maiorem terminum excluſiuè eſſe ipſum ambitum 12. poteſt enim aggregatum hypotenuſæ & alterius lateris, ſtatui quilibet numerus infrà 12. & quantumuis exiguus numerus relinquatur pro tertio latere, perfici poterit triangulum. Minor vero terminus eſt 6. ſemiſſis ipſius
19. 3. poriſ. 12. Quod ſic probatur. Quia quadratus ipſius ambitus 12. æquatur duplo producti ex aggregato hypotenuſæ & baſeos, in aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi, ſemiſſis eiuſdem quadrati, puta 72. æquabitur producto ex aggregato eodem in idem aggregatum. At 72. fit vt patet, ex 12. in ſuum ſemiſſem 6. Quare ſi 72. diuidatur per 6. fit quotiens 12. & ſi 72. diuidatur per numerum minorem quàm 6. fit quotiens maior quam 12. Euidens ergo eſt aggregatum hypotenuſæ & baſeos non poſſe eſſe 6. vel minorem quàm 6. alioquin ſequeretur aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi eſſe 12. vel maius quàm 12. Quod eſt impoſſibilè cùm totus ambitus ponatur 12. Itaque fiet breuiſſimus Canon.

Ipſe ambitus, & eius ſemiſſis ſunt quæſiti termini excluſiuè.

PROBLEMA

PROBLEMA IV.

Dato ambitu inuenire maximum areæ terminum.

Datus ambitus eſto 10.

Inueniatur per ſecundam harum maximus terminus ſummæ laterum circa rectum, puta 20 − ℞ 200. & huius quadratus eſto 600 − ℞ 320000. cuius octaua pars ſit 75. − ℞ 5000. dico hunc eſſe maximum areæ terminum; quia enim octaua pars alicuius quadrati æquatur ſemiſſi quadrati à latere ſubduplo lateris propoſiti quadrati, erit 75 − ℞ 500. ſemiſſis quadrati à ſemiſſe ipſius 20 − ℞ 200. puta ſemiſſis quadrati ipſius 10 − ℞ 50. Itaque quoniam quadratus ſemiſſis alicuius numeri maior eſt producto duarum quarumlibet inæqualium partium eiuſdem numeri, erit quadratus ipſius 10 − ℞ 50. maior producto duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas ſecari poſſit 20 − ℞ 200. quare cùm area trianguli ſit ſemiſſis producti duorum laterum, quorum ſumma 20 − ℞ 200. non poterit area maior eſſe ſemiſſe quadrati ipſius 10 − ℞ 50. hoc eſt non poterit eſſe maior quàm 75 − ℞ 500. Hinc ergo fiet huiuſmodi Canon. 2. 2. periſ.

A dodrante quadrati dati ambitus, aufer latus quadratum ſemiſsis quadratoquadrati eiuſdem ambitus, reſiduum erit quæſitus terminus.

Proinde ſi libet in rationalibus quæſitum terminum præſcribere, cùm ex dato Canone area reſpectu ambitus ſit $\frac{3}{4}$ Q. − ℞ $\frac{1}{2}$ QQ. ſume proximum latus de $\frac{1}{2}$ QQ. nempe $\frac{99}{140}$ Q. quem aufer à $\frac{3}{4}$ Q. ſupereſt $\frac{3}{70}$ Q. Hinc ergo formabitur Canon.

Ducito quadratum ambitus in 3. productum diuide per 70. orietur area terminus.

Sic in data hypotheſi ducito quadratum ipſius 10. puta 100. in 3. fiet 300. quem diuide per 70. fiet 4 $\frac{2}{7}$. quæſitus areæ terminus.

Non præſcribitur autem minimus terminus areæ, quia dari non poteſt. Etenim ſumma laterum circa rectum, ſemper diuidi poterit in duos numeros, quorum mutuo ductu fiat quantumlibet exiguus numerus, vt conſtat ex conditione appoſita trigeſimæ primi, quæ vt quæſtio ſit poſſibilis, requirit tantùm quadratum ſummæ maiorem eſſe quadruplo producti. Vnde euidens eſt, quò minor erit productus, eò magis ſolui poſſe quæſtionem.

PROBLEMA V.

Data hypotenuſa præſcribere terminos ſummæ laterum circa rectum.

Eſto hypotenuſa 5.

Quoniam ex conditione appoſita trigeſimæ primæ primi, oportet duplum quadrati hypotenuſæ ſuperare, vel ſaltem æquare quadratum ſummæ laterum circa rectum, cùm duplum quadrati 5. ſit 50. non poterit ſumma laterum circa rectum excedere ℞ 50. ſed eadem ſumma laterum circa rectum debet ſuperare hypotenuſam, vt duo trianguli latera ſimul ſint maiora reliquo. Igitur quæſiti termini ſunt 5. excluſiuè, & ℞ 50. incluſiuè. Hinc fiet Canon.

Ipſa hypotenuſa eſt minimus terminus. At latus dupli quadrati hypotenuſa eſt maximus terminus.

Quia ergo reſpectu hypotenuſæ maximus terminus ſummæ laterum circa rectum eſt ℞ 2 Q. & latus proximum de 2 Q. eſt $\frac{99}{70}$ N. hunc habeto Canonem.

Ducito hypotenuſam in 99. productum diuide per 70. orietur quæſitus terminus.

Vt in data hypotheſi ducito 5. in 99. fit 495. quem diuide per 70. fit terminus quæſitus 7 $\frac{1}{14}$.

PROBLEMA VI.

Data ſumma laterum circa rectum præſcribere terminos hypotenuſæ.

Sit ſumma laterum circa rectum 6.

Igitur ex dictis ad præcedentem quadratus ipſius 6. puta 36. non debet excedere duplum quadrati hypotenuſæ. Quare hypotenuſa non poteſt eſſe minor quàm ℞ 18. Debet autem eadem eſſe minor quàm ſumma laterum 6. Ergo quæſiti termini ſunt 6. excluſiuè, & ℞ 18. incluſiuè. Vnde formatur Canon.

Ipſa ſumma laterum circa rectum eſt maximus terminus excluſiuè. At latus ſemiſſis quadrati eiuſdem ſumma laterum, eſt minimus terminus incluſiuè.

Quoniam igitur reſpectu ſummæ laterum circa rectum, ſit hypotenuſæ minimus terminus ℞ $\frac{1}{2}$ Q. cùm proximum latus de $\frac{1}{2}$ Q. ſit $\frac{70}{99}$. N. hanc habe regulam.

Ducito ſummam laterum circa rectum in 70. productum diuide per 99. orietur minimus terminus hypotenuſa.

Vt in data hypotheſi ducito 6. in 70. fit 420. quem diuide per 99. fit quæſitus terminus hypotenuſæ 4 $\frac{8}{33}$.

PROBLEMA VII.

Data hypotenuſa præſcribere totius ambitus terminos.

Sit data hypotenuſa 5.

Inueniantur per quintam termini laterum circa rectum, puta 5. & ℞ 50. qui addantur ſigillatim ipſi hypotenuſæ 5. fient quæſiti termini 10. excluſiuè, & 5 + ℞ 50. incluſiuè. Vnde Canon.

Duplum ipſius hypotenuſæ eſt minimus terminus excluſiuè. At aggregatum ex hypotenuſa & latere dupli quadrati eiuſdem hypotenuſæ, eſt maximus terminus incluſiuè.

Cùm ergo maximus ambitus terminus reſpectu hypotenuſæ ſit 1 N. + ℞ 2 Q. & ℞ 2 Q. per approximationem ſit $\frac{99}{70}$ N. inuenietur quæſitus terminus in rationalibus hac arte.

Ducito hypotenuſam in 169. productum diuide per 70. orietur maximus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypotheſi ducito 5. in 169. fit 845. quem diuide per 70. fiet 12 $\frac{1}{14}$. quæſitus terminus.

PROBLEMA VIII.

Data ſumma laterum circa rectum, præſcribere circumferentiæ terminos.

Sit data ſumma 6.

Inueniantur per ſextam hypotenuſæ termini, puta 6. & ℞ 18. qui addantur ſigillatim datæ ſummæ laterum 6. fient quæſiti circumferentiæ termini, puta 12. excluſiuè & 6 + ℞ 18. incluſiuè. vnde Canon.

Duplum ſummæ laterum circa rectum, eſt maximus terminus excluſiuè. At aggregatum ex ſumma laterum, & ex latere ſemiſſis quadrati eiuſdem ſummæ, eſt minimus terminus incluſiuè.

Cùm ergo minimus circumferentiæ terminus, reſpectu ſummæ laterum circa rectum, ſit 1 N. + ℞ $\frac{1}{2}$ Q. & ℞ $\frac{1}{2}$ Q. per approximationem ſit $\frac{99}{140}$. Inuenietur quæſitus terminus in rationalibus hoc pacto.

Ducito ſummam laterum in 239. productum diuide per 140. orietur minimus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypotheſi ducito 6. in 239. fit 1434. quem diuide per 140. fiet quæſitus terminus 10 $\frac{17}{70}$.

PROBLEMA IX.

Data ſumma laterum circa rectum, inuenire maximum areæ terminum.

Eſto data ſumma 4.

Sume quadratum datæ ſummæ, puta 16. huius octaua pars nempe 2. eſt quæſitus areæ terminus, vt demonſtratum eſt quarta harum.

PROBLEMA X.

Data hypotenuſa inuenire maximum areæ terminum.

Data hypotenuſa eſto 6.

Sume quadratum datæ hypotenuſæ, puta 36. huius quarta pars nempe 9. eſt quæſitus areæ terminus: Nam per quintam duplum quadrati hypotenuſæ debet ſuperare, vel ſaltem æquare quadratum ſummæ laterum circa rectum. Quare quadratus ſummæ laterum circa rectum, ad maximum eſt 72. cuius octaua pars per præcedentem eſt maximus areæ terminus. At octaua pars de 72. eſt quarta pars ſemiſſis ipſius 72. puta ipſius 46. Igitur patet propoſitum.

PROBLEMA XI.

Data area inuenire minimum terminum ſummæ laterum circa rectum.

Area eſto 6.

Sume octuplum areæ, puta 48. huius latus nempe ℞ 48. eſt minimus terminus ſummæ laterum circa rectum, vt conſtat ex quarta, & nona.

PROBLEMA XII.

Data area inuenire minimum terminum hypotenuſæ. Area eſto 6.

Sume quadruplum areæ, puta 24. hujus latus nimirum ℞ 24. eſt minimus hypotenuſæ terminus, vt conſtat ex quinta, & decima.

PROBLEMA XIII.

Data area præſcribere minimum ambitus terminum. Area eſto 6.

Sumantur per duas præcedentes minimi termini ſummæ laterum & hypotenuſæ, puta ℞ 48. & ℞ 24. horum ſumma ℞ 48. + ℞ 24. eſt quæſitus circumferentiæ terminus, vt euidens eſt.

PROBLEMA XIV.

Triangulum rectangulum in rationalibus conſtituere, vt ſumma laterum circa rectum ſit datus numerus.

Summa laterum circa rectum eſto 8.

Ponatur vnum latus 1 N. erit alterum 8 − 1 N. cùm ergo horum quadrati ſimul debeant æquari quadrato hypotenuſæ, fiet ſumma quadratorum 64 − 16 N. + 2 Q. æqualis quadrato, cuius latus ponatur 8 − tot numeris qui excedant 2. vt ſcilicet fiat 1 N. minor quàm 8. quia latus alterum poſitum eſt 8 − 1 N. fingatur ergo latus prædictum 8 − 3 N. fiet quadratus 64 − 48 N. + 9 Q. æquales 64 − 16. N. + 2 Q vnde fit 1 N. $\frac{32}{7}$. vnum laterum circa rectum, eſtque alterum $\frac{24}{7}$. ipſa hypotenuſa $\frac{40}{7}$ Hinc elicitur facilis Canon.

Sume quemlibet numerum maiorem binario, inde aufer 1. reſidui duplum ducito in datam ſummam, productum diuide per quadratum ſumpti numeri binario multatum, orietur vnum laterum circa rectum.

PROBLEMA XV.

Inuenire triangulum rectangulum in rationalibus, vt eius ambitus ſit datus numerus.

Eſto ambitus 20.

Pone latera quæſiti trianguli 3 N. 4 N. 5 N. fit ſumma 12 N. æqualis 20. eſt ergo 1 N. $\frac{5}{3}$. & quæſitum triangulum 5. 6 $\frac{2}{3}$. 8 $\frac{1}{3}$. & ſic infinitæ reperientur ſolutiones ſi loco 3. 4. 5. deligantur alia atque alia triangula non ſimilia. Sed & licebit inuenire triangulum ſimile cuicunque dato triangulo rectangulo, eodem numero ambitus manente.

Aliter ſume ſemiſſem quadrati ipſis 20. puta 200. & ſtatue aggregatum hypotenuſæ & baſeos quemlibet numerum inter 20. & eius ſemiſſem 10. ob ea quæ demonſtrata ſunt tertia harum. Verbi gratia pone tale aggregatum 15. erit ergo perpendiculum 5. At diuidendo 200. per 15. quotiens 13 $\frac{1}{3}$. erit aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi per decimam nonam tertij poriſmatum. Quare ſi inde auferas perpendiculum, puta 5. manebit hypotenuſa 8 $\frac{1}{3}$. quam ſi ſubtrahas à 15. fiet baſis 6 $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA XVI.

Dato ambitu, & data area trianguli rectanguli, inuenire triangulum.

Eſto ambitus 40. Area 60.

Pone hypotenuſam 1 N. ergo latera circa rectum ſimul ſunt 40. − 1 N. cuius quadratus 1600 − 80. N. + 1 Q. æquatur quadratis laterum circa rectum, & duplo plani ſub ipſis contento, hoc 4. ſecundi. eſt quadrato hypotenuſæ, & quadruplo areæ. Quare 1 Q. + 240. æquantur 1600 − 80 N. + 1 Q. Vnde fit 1 N. 17. Ipſa ſcilicet hypotenuſa. Igitur ſumma laterum circa rectum eſt 23 Quamobrem duplici via inueniri poſſunt ipſa latera, diuidendo ſcilicet 23. in duas partes, quarum quadrati ſimul efficiant 289. per trigeſimam primam primi, vel in duas partes quarum mutuo ductu fiat 120. per trigeſimam primi, & vtroque modo reperientur latera 15. & 8. Hinc fit Canon.

A quadrato ambitus aufer quadruplum area, reſiduum diuide per duplum ambitus, orietur hypotenuſa.

PROBLEMA XVII.

Dato ambitu, & ſolido ſub tribus lateribus, inuenire triangulum.

Eſto ambitus 12. ſolidus 60.

Pone hypotenuſam 1 N. erunt latera circa rectum ſimul 12 − 1 N. At planus ſub iiſdem lateribus $\frac{60}{1N}$. Quadratus autem ſummæ laterum circa rectum eſt 144. − 24 N. + 1 Q. vnde ſi auferas quadratos ipſorum laterum, hoc eſt illis æqualem quadratum hypotenuſæ, relinquetur 144 − 24 N. duplum plani ſub lateribus. Igitur huius dimidium, puta 72 − 12 N. æquatur $\frac{60}{1N}$. Vnde fit 1 N. 5. hypotenuſa ſcilicet, eſt ergo ſumma laterum circa rectum 7. & planus ſub ipſis 12. vnde etiam vt ſuprà duplici via, nimirum per trigeſimam vel per trigeſimam primam primi inuenies latera 3. & 4. Hinc elicietur facilis Canon.

Diuide datum ſolidum per datum ambitum, quotientem aufer à quadrato quadrantis ipſius ambitus, reſidui latus adde eidem quadranti, fiet hypotenuſa.

PROBLEMA XVIII.

Dato vno laterum circa rectum, & plano ſub altero latere & hypotenuſa, inuenire alterum latus & hypotenuſam.

Eſto alterum latus 4. Planus ſub altero & hypotenuſa 15. faciat.

Ponatur latus quæſitum 1 N. ergo hypotenuſa eſt $\frac{15}{1N}$. cuius quadratus $\frac{225}{1Q}$. æquatur quadratis laterum, puta 16 + 1 Q. & tandem 1 QQ. + 16 Q. æquantur 225. & fit 1 N 3. quæſitum latus. Eſt ergo hypotenuſa 5. Sic poni poteſt hypotenuſa 1 N. alterum latus $\frac{15}{1N}$. & fiet 1 Q. æqualis 16 + $\frac{225}{1Q}$. & tandem 1 QQ. æquabitur 16 Q. + 225. vnde fiet 1 N. 5. Hinc formatur Canon.

Quadrato dati plani adde quadratum ſemiſſis quadrati dati lateris, ſummæ latus adde vel adime eidem ſemiſſi quadrati dati lateris, proueniet hinc quadratus quæſiti lateris, inde quadratus hypotenuſæ.

PROBLEMA XIX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius ambitus ſit quadratus, & idem ambitus ſiue adſumptâ, ſiue detractâ areâ quadratum faciat.

Primùm quærere oportet triangulum rectangulum, cuius ambitus ſit quadratus numerus, & fiet triangulum, per decimam quintam, cuius ambitus æqualis erit cuilibet dato quadrato. Eſto ergo tale triangulum 36. 48. 60. cuius ambitus eſt quadratus 144. & conſtituatur in quadratis, ſintque quæſiti trianguli latera 36 Q. 48 Q. 60 Q. Supereſt vt ambitus ſiue adſumpta ſiue detracta area faciat quadratum. Quia ergo in quolibet triangulo rectangulo quadratus ſemiſſis hypotenuſæ ſiue illi addatur, ſiue adimatur area facit quadratum, vt ex demonſtratis ad vigeſimam ſecundam tertij facilè infertur, ſumatur quadratus ſemiſſis hypotenuſæ, puta 900 QQ. & is ſtatuatur æqualis ambitui, puta 144 Q. fiet ergo 1 N. $\frac{2}{5}$. & erunt quæſiti latera trianguli $\frac{144}{25}$. $\frac{192}{25}$. $\frac{240}{25}$ & conſtat.

PROBLEMA XX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius area ſit datus numerus. Oportet autem vt quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum.

Sit A datus areæ Numerus, cuius duplum B. cuius quadratus F. quo addito ad quadratoquadratum D. fiat quadratus E. Oportet inuenire triangulum cuius area ſit A. ſumatur K latus quadratoquadrati D. & ſit ipſius K quadratus C. diuiſoque A. per K producatur G. cuius duplum eſto H. Quia ergo ducto K in G. producitur A. eſt A ad G ſicut K ad vnitatem, ſed ſicut K ad vnitatem, ita eſt C ad K. Igitur vt eſt C ad K. ſic A ad G. & permutando vt C ad A. ſic K ad G. ſed vt A ad B. ſic eſt

D 81.	E 225.	F 144.
C 9	A 6.	B 12.
K 3.	G 2.	H 4.

s. 3. poriſ. G ad H cùm vtrobique ſit ratio ſubdupla, ergo ex æquo vt C. ad B. ſic eſt K ad H. ſed C B ſunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cùm eorum quadrati D F ſimul conficiant quadratum E. Igitur & K H ſunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cuius vtique area eſt A. cùm A producatur ex K in G. ſemiſſem ipſius H. Quamobrem conſtat propoſitum.

Porro conditio adiecta non ſolùm ſufficiens eſt, ſed & neceſſaria, ita vt dari non poſſit triangulum rectangulum, quin quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum. Quod eadem facilitate probatur. Sint enim K H. latera circa rectum trianguli dati, & ipſius H. dimidium ſit G quo ducto in K fiat area A. cuius duplum B. cuius quadratus F. dico F. additum alicui quadratoquadrato facere quadratum, ſit enim C quadratus ipſius K. & ipſius C. quadratus, hoc eſt quadratoquadratus ipſius K eſto D. Oſtendetur vt ſuprà eſſe C ad B vt K ad H. Quare cùm K H ſint latera circa rectum trianguli rectanguli erunt & C B. latera circa rectum trianguli. Proinde quadrati ipſorum, puta D F. ſimul component quadratum. Quod erat propoſitum.

OBSERVATIO D. P. F.

Area trianguli rectanguli in numeris non poteſt eſſe quadratus, huius theorematis à nobis inuenti demonſtrationem quam & ipſi tandem non ſine operoſâ &

laborioſâ meditatione deteximus, ſubiungemus. Hoc nempè demonſtrandi genus miros in arithmeticis ſuppeditabit progreſſus, ſi area trianguli eſſet quadratus darentur duo quadratoquadrati quorum differentia eſſet quadratus: Vnde ſequitur dari duo quadrata quorum & ſumma, & differentia eſſet quadratus. Datur itaque numerus compoſitus ex quadrato & duplo quadrati æqualis quadrato, ea conditione vt quadrati eum componentis faciant quadratum. Sed ſi numerus quadratus componitur ex Quadrato & duplo alterius quadrati eius latus ſimiliter componitur ex quadrato & duplo quadrati vt facillime poſſumus demonſtrare.

Vnde concludetur latus illud eſſe ſummam laterum circa rectum trianguli rectanguli & vnum ex quadratis illud componentibus efficere baſem & duplum quadratum æquari perpendiculo.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur à duobus quadratis quorum ſumma & differentia erunt quadrati. At iſti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primò ſuppoſitis quorum tam ſumma quam differentia faciunt quadratũ. Ergo ſi dentur duo quadrata quorum ſumma & differentia faciant quadratum, dabitur in integris ſumma duorum quadratorum eiuſdem naturæ priore minor. Eodem ratiocinio dabitur & minor iſtâ inuenta per viam prioris & ſemper in infinitum minores inuenientur numeri in integris idem præſtantes: Quod impoſſibile eſt, quia dato numero quouis integro non poſſunt dari infiniti in integris illo minores. Demonſtrationem integram & fuſius explicatam inſerere margini vetat ipſius exiguitas.

Hac ratione deprehendimus & demonſtratione confirmauimus nullum numerum triangulum præter vnitatem æquari quadratoquadrato.

SCHOLIVM.

Hinc patet, idem oſtendi poſſe de quadratoquadrato ipſius H quod oſtenſum eſt de quadratoquadrato ipſius K. Quare verum eſt in quolibet triangulo rectangulo quadratum areæ duplicatæ additum quadratoquadrato cuiuſlibet lateris circa rectum efficere quadratũ. Vt in data hypotheſi 144. cum quadratoquadratis ipſorum 3. & 4. puta cum 81. & 256. facit quadratos 225. & 400. ſed & conditionis adiectæ neceſſitas per algebram ſic demonſtrabitur. Data area cuiuſlibet trianguli rectanguli puta 6. ponatur vnum laterum circa rectum 1. N. erit alterum $\frac{12}{1N}$. Vt autem ſit triangulum rationale oportet, vt ſumma quadratorum, puta 1 Q. + $\frac{144}{1Q}$. æquetur quadrato, & omnia ducendo in 1 Q. fiet 1 QQ. + 144. æqualis quadrato. Vnde patet quadratoquadratum cuiuſlibet lateris circa rectum adſcito quadrato areæ duplicatæ, debere conficere quadratum.

Porrò hanc ipſam quæſtionem tractans Franciſcus Vieta Zetetico 16. libri quarti, duas alias ei præfigit conditiones. Prima eſt. Oportet vt area addendo aliquem quadratoquadratum, fiat quadratoquadratus, vel vt ducendo aream in aliquem quadratum, & productum addendo alicui quadratoquadrato, fiat quadratoquadratus. Et hæc conditio, ſufficiens quidem eſt, vt demonſtrat Vieta, ſed an ſit neceſſaria meritò quis ambigat. Sanè arbitror cùm eius neceſſitatem demonſtrare non poſſet ſummi vir ingenij. ſecundam excogitaſſe. Secunda conditio eſt. Oportet vt datus areæ numerus, ſit cubus ſuo multatus latere, vel vt idem per quadratum aliquem multiplicatus, ſit cubus ſuo multatus latere. Et hæc conditio non ſolùm ſufficiens eſt, vt oſtendit Vieta, ſed etiam neceſſaria v. … .onſtrabimus, ne tanti viri commentum labare videatur. Quamuis tutius ſit hanc conditionem ita proponere. Oportet vt areæ numerus ſit cubus ſuo multatus latere, latuſve ſuo multatum cubo. Vel vt eo per aliquem quadratum multiplicato vel diuiſo, fiat cubus ſuo multatus latere, latuſue ſuo multatum cubo. Huius autem rei ratio eſt, quia quodlibet triangulum rectangulum, poteſt concipi ſimile alteri triangulo, quod formatum ſit ab vnitate, & ab alio quouis quadrato, cuius quadrati ſi ponas latus 1 N. fiet trianguli hypotenuſa 1 Q. + 1. alterum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q − 1 vel 1 − Q. prout 1 N. ſupponitur maior vel minor vnitate. Quare fit area 1 C. − 1 N. vel 1 N. − 1 C. ita ſi fingas triangulum ab 1. & 4. modo tradito tertia tertij poriſmatum. Fient latera 3. 4. 5. Area verò 6. cubus ſcilicet 8. ſuo multatus latere. At ſi formes triangulum ab 1. & $\frac{1}{4}$. fiet triangulum $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area. $\frac{3}{8}$. eſt latus $\frac{1}{2}$ multatum ſuo cubo $\frac{1}{8}$.

Propoſito verò quolibet alio triangulo, cùm per quartam tertij poriſmatum, neceſſe ſit illud formari à duobus planis ſimilibus, hos planos ſumens, & vtrumque per minorem ipſorum ſigillatim diuidens, fiens duo quotientes in eadem ratione, quorum minor erit vnitas, à quibus ſi formes triangulum, erit

9. 3. poriſ. 2. 3. poriſ. *eius area , cubus ſuo multatus latere per ſuprà demonſtrata. ' Quia verò à proportionalibus numeri. formata triangula ſimilia ſunt , erit inuentum triangulum primo propoſito ſimile. ' Quare cùm ſimilium triangulorum area ſint in ratione duplicata laterum , ſi aream inuenti trianguli ducas in quadratum denominatoris proportionis laterum , fiet area propoſiti trianguli , & è conuerſo diuidendo aream propoſiti trianguli per eundem quadratum , fiet area inuenti , ſeu cubus ſuo multatus latere. Sic propoſito triangulo 9. 12. 15. inuenies illud formari à planis ſimilibus 3. & 12. quos diuidendo ſigillatim per minorem ipſorum 3. fient in eadem ratione 1. & 4. quorum minor vnitas , à quibus ſi formes triangulum priori ſimile , puta 5. 4. 3. erit eius area 6. cubus ſuo multatus latere per ſuprà demonſtrata. Cùm ergo prioris trianguli latera ſint tripla laterum poſterioris , erit area area nencupla. Quare diuidendo aream 54. per 9. fiet area 6. cubus ſuo multatus latere. Rurſus propoſito triangulo 39. 36. 15. cuius area 270. Inuenies formari triangulum à planis ſimilibus 12. & 27. quos ſi diuidas ſigillatim per minorem 12. fient 1. & $\frac{9}{4}$. à quibus finges triangulum priori ſimile $\frac{13}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area $\frac{15}{8}$. eſt cubus $\frac{27}{8}$. ſuo multatus latere. Quia verò proportio laterum prioris trianguli ad latera poſterioris eſt duodecupla , ſi per quadratum ipſius 12. puta per 144. diuidas aream 270. fiet vtique $\frac{15}{8}$. cubus ſuo latere multatus. Quod ſi inuentis planis ſimilibus à quibus propoſitum triangulum formatum eſt , diuidas vtrumque per maiorem ipſorum , fient duo numeri in eadem ratione , quorum maior erit vnitas , à quibus ſi fingas aliud triangulum erit eius area latus ſuo multatum cubo , vt conſtat ex ſuprà demonſtratis.*

Itaque quia diuiſio in multiplicationem verti poteſt , & è conuerſo. Nam verbi gratia diuidere 54. per 9. idem eſt atque multiplicare 54. per $\frac{1}{9}$. ferri poteſt Vieta limitatio. Et abſolutè verùm eſt aream cuiuſlibet trianguli rectanguli eſſe cubum ſuo multatum latere , vel inueniri ſimile triangulum cuius area ſit cubus ſuo latere multatus.

PROBLEMA XXI.

Dato ambitu trianguli rectanguli , & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam demiſſa , inuenire triangulum.

Sit datus ambitus 60. perpendicularis 12. Ponatur hypotenuſa 1 N. erit ſumma laterum circa re-
4. ſecundi. ctum 60 − 1 N. cuius quadratus 3600 − 120 N. + 1 Q. ' æquatur quadratis ipſorum laterum, ſeu quadrato hypotenuſæ , & duplo plani ſub lateribus. Igitur 3600 − 120. N. eſt duplum plani ſub lateribus, & 1800 − 60 N. eſt ipſe planus ſub lateribus. Quoniam verò, vt conſtat per octauam ſexti , vt ſe
19. ſeptimi. habet hypotenuſa ad vnum laterum, ſic etiam ſe habet alterum latus ad perpendicularem , ' erit planus ſub hypotenuſa , & ſub perpendiculari , æqualis plano ſub lateribus. At ex hypotenuſa in perpendicularem fiunt 12 N. ergo 12 N. æquantur 1800 − 60 N. & fit 1 N. 25. ipſa ſcilicet hypotenuſa. Quare facile eſt inuenire latera circa rectum , puta 20. & 15.

Hinc elicitur Canon.

Semiſſem quadrati dati ambitus diuide per aggregatum ex ambitu & ex perpendiculari, orietur hypotenuſa.

PROBLEMA XXII.

Data area trianguli rectanguli , & perpendiculari ſub angulo recto in hypotenuſam demiſſa , inuenire triangulum.

Eſto area 150. Perpendicularis 12. Ponatur vnum laterum circa rectum 1 N. erit ergo alterum $\frac{300}{1N}$.
8. ſexti. Quoniam verò ' vt eſt perpendicularis 12. ad vnum laterum circa rectum 1 N. ſic eſt alterum $\frac{300}{1N}$. ad hypotenuſam. Inuenietur per regulam proportionum hypotenuſa 25. & reliqua latera 20. & 15.

Hinc Canon.

Diuide duplum area per perpendicularem , orietur hypotenuſa.

ADDENDA COMMENTARIIS IN Definitionem ſeptimam & octauam.

Retractanti commentaria noſtra occurrit mihi definitionem ſeptimam ad mentem Diophanti accommodatius explicari poſſe, ſi accipiatur de fractionibus, in quibus ſuperiores poteſtates per vnitates diuidi intelliguntur. Vt velit Diophantus, verbi gratia, ex $\frac{2}{1N}$ in $\frac{3}{1N}$ produci $\frac{6}{1Q}$. quemadmodum ex 2 N. in 3 N. producuntur 6 Q. & ex $\frac{3}{1N}$ in $\frac{4}{1Q}$ produci $\frac{12}{1C}$. eadem ratione, qua ex 3 N. in 4 Q. Producuntur 12 C. & ſic de alijs. Sic enim vtraque definitio, ſeptima ſcilicet & octaua de iiſdem fractionibus accipientur, & tolletur ambiguitas illa, de qua ad definitionem octauam Diophantum criminabamur, ſemper enim apud Diophantum fractio numerica erit ſeu ἀριθμοστὸν, cùm vnitates per Numeros diuidentur, vt $\frac{3}{1N}$. & fractio Quadratica, ſeu δυναμοστὸν, cùm vnitates per quadratos diuidentur, vt $\frac{4}{1Q}$. & ſic de alijs. Et ſanè apparet ex reliquo opere ita ſenſiſſe Diophantum. Nam vbicumque ἀριθμοστὸν vel δυναμοστὸν vſurpat, huiuſmodi fractiones intelligit. Verum erit nihilominus, quod ad definitionem ſeptimam adnotauimus, nimirum eius demonſtrationem, ab iis quæ demonſtrauimus ad definitionem quartam, pendere omnino, vt per ſe manifeſtum eſt.

FINIS.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
DE MVLTANGVLIS NVMERIS.

PROPOSITIO PRIMA.

QVILIBET numerorum à ternario per vnitatis incrementum progredientium, multangulus eſt, primus ab vnitate, & habet tot angulos, quot ipſe vnitatibus conſtat. Latus autem ipſorum eſt, proximus ab vnitate numerus, puta 2. eſt autem 3. triangulus. 4 quadratus. 5. quinquangulus, & ſic deinceps. Cùm autem de quadratis euidens ſit, ita eos conſtitui, quod naſcantur numeri alicuius in ſeipſum multiplicatione, exploratum eſt quemlibet multangulum multiplicatum aliquo numero ſecundum proportionem multitudinis angulorum eius, & adſumentem quadratum aliquem ſecundum proportionem multitudinis angulorum eius, apparere quadratum. Atque hoc nos demonſtrabimus, oſtendentes quomodo dato latere inueniatur qui poſcitur multangulus; & quomodo dato multangulo, latus accipitur. Prius autem ea demóſtrabimus quæ ad hanc rem ſumuntur.

Ἕκαστος τῶν ἀπὸ τῆς τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάδι, πολύγωνός ἐστι πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων. πλευρὰ τε αὐτοῦ ἐστιν ὁ ἑξῆς τῆς μονάδος ἀριθμὸς, ὁ β. ἔσται δὲ ὁ μὲν γ τρίγωνος, ὁ δὲ δ τετράγωνος, ὁ δὲ ε. πεντάγωνος, καὶ τοῦτο ἑξῆς. Τῶν δὲ τετραγώνων προδήλων ὄντων, ὅτι καθεστήκασι τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἐδοκιμάσθη ἕκαστος τῶν πολυγώνων πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τινος ἀριθμοῦ κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ φαίνεσθαι τετράγωνον. ὃ δὴ παραστήσομεν ὑποδείξαντες πῶς ἐκδοθείσῃ πλευρᾷ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται καὶ πῶς δοθέντι πολυγώνῳ ἡ πλευρὰ λαμβάνεται. προδείξομεν δὲ τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα.

In Librum Diophanti de numeris multangulis Commentarij.

LAborioſiſſimis in libros ſex Arithmeticorum commentariis exantlatis, ſupereſt nobis de numeris multangulis liber enodandus. In quo reſtituendo quantum deſudauerim coniicere poterunt quotquot in eo percipiendo, vt à Xilandro nobis traditus eſt, operam aliquam impenderint. Sanè, vt omittam cætera quæ huc contulimus, non paruam à tyronibus gratiam promeriti ſumus ob diagrammata ſingulis ferè propoſitionibus adjecta, quæ paſſim imperitus librarius, tanquam ad rem minimè pertinentia, prætermiſerat, cùm tamen illorum ope deſtitutus, vel acerrimo qui ſit præditus ingenio, Diophanti demonſtrationes vix percipere poſſit.

IN PROPOSITIONEM PRIMAM.

HÆc propoſitio definitionis vel petitionis cuiuſdam locum obtinet. Per eam enim ſupponit Diophantus, quemlibet numerum incipiendo à ternario eſſe polygonum, tot angulos continentem quot vnitatibus conſtat ipſe numerus, verbi gratia 3. eſſe triangulum, 4. quadratum 5. pentagonum, 6. hexagonum, & ſic in infinitum. Cuius rei ratio eſt, quia vnitates cuiuſlibet

numeri æqualibus interuallis ita diſponi poſſunt, vt repræſentent figuram totidem angulorum, & laterum æqualium, vt in appoſito diagrammate videre eſt. Vnde etiam apparet, quod ſubiicit Diophantus nimirum horum omnium polygonorum latus eſſe proximum ab vnitate numerum, puta 2. vides enim in quolibet latere cuiuſlibet polygoni contineri vnitates 2.

Quoniam vero ipſa vnitas virtualiter eſt omnis polygonus; eſt enim & triangulus, & quadratus, & pentagonus, quia horum omnium polygonorum proprietates ipſi vnitati conueniunt, ideirco ait Diophantus quemlibet numerum à ternario, eſſe polygonum in ſua ſpecie primum poſt vnitatem, verbi gratia 3. eſt primus triangulus poſt vnitatem, 4. primus quadratus, 5. primus pentagonus poſt vnitatem, & ſic de alijs.

PROPOSITIO SECVNDA.

ε.....α........β..δ..γ

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχωσιν, ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνον γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ μεγίστου καὶ δύο τῶν μέσων. Τρεῖς γὰρ ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. βδ. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ βδ. τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς βγ. ὅτι μὲν ὁ αβ. ἴσος ἐστὶ τοῖς βγ. γδ. διαιρεῖται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν αβ. βγ. εἴς τε τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τοῦ βγ. τετράγωνον καὶ εἰς τὸν ὀκτάκις ὑπὸ βγ. γδ. Καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων διχῶς, εἰς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βγ. τετράγωνον καὶ τὸν τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. ὁ δὲ τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ δβ. τετραγώνου, γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ αβ. ζητητέον οὖν πῶς ὁ ἀπὸ τοῦ αβ. τετράγωνος, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ ὁ τετράκις ἀπὸ τοῦ βγ. τετράγωνος συντεθέντες ποιοῦσι τετράγωνον. ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ βγ. ἴσον τὸν αε. μεταβησόμεθα τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βα. αε. ὃς μιγεὶς τῷ τετράκις ἀπὸ γβ. τουτέστι τῷ ἀπὸ αε. ποιήσει ἴσον τῷ τετράκις ὑπὸ βε. εα. ὃς μιγεὶς τῷ ἀπὸ τοῦ αβ. τετραγώνῳ γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ βε. εα. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· οἱ δὲ βε. εα. ἴσοι εἰσὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς αε. τουτέστι δυσὶ τοῖς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε.....α........β..δ..γ

E....A........B..D...G

SI fuerint tres numeri æqualibus interuallis ſe ſupetantes; qui fit ex maximo in medium octies, adſumens minimi quadratum, facit quadratum, cuius latus æquale eſt compoſito ex maximo & medij duplo. ſint enim tres numeri AB. BG. BD. æqualib. interuallis ſe ſupetantes; Oſtendendum eſt eum qui fit octies ex AB. in BG. vna cum quadrato ipſius BD. facere quadratum, cuius latus æquale eſt ipſi AB. & duobus BG. Quoniam ergo AB. æqualis eſt ipſis BG. GD. diuidetur qui fit octies ex AB. in BG. in eum qui fit octies ex BG. quadratum, & in eum qui fit octies ex BG. in GD. Et rurſus diuiditur vnumquodque prædictorum bifariam, nimirum in eum qui fit quater ex AB. in BG. & in quadratum ex BG. quater, & in eum qui fit quater ex BG. in GE. At qui fit quater ex BG. in GD. vna cum quadrato ex DB. fit quadratus à latere AB. Quærendum igitur eſt, quomodo quadratus ex AB. & productus ex AB. in BG. quater, & quadratus ex BG. quater, compoſiti faciant quadratum. Itaque ſi ponamus ipſi BG. æqualem AE. traiiciemus eum qui fit quater ex AB. in BG. in eum qui fit quater ex BA. in AE. qui mixtus quadruplo quadrati ex GB. ſeu quadrati ex AE. facit æqualem quadruplo producti ex BE. in AE. qui mixtus quadrato ex AB. fit æqualis quadrato qui ex BE. EA. tanquam vna deſcribitur. At ipſi BE. EA. æquales ſunt ipſi AB. & duobus AE. ſeu duob. BG. quod erat oſtendendũ.

E....A........B..D...G

IN SECVNDAM.

IN huius propoſitionis demonſtratione, nulla inſignis eſt difficultas. Tria tamen ſunt quæ tyrones fortaſſis morari queant. Primum eſt quod ait Diophantus Quadratum ex AB. æquari qua-

E.....A........B..D...G

druplo producti ex B G. in G D. vnà cum quadrato ex B D. Quòd ita probatur. Quoniam A B ſupponitur æqualis ſummæ duorum B G. D G. quorum interuallum B D. [a] patet quadruplum producti ex B G. in D G. vnà cum quadrato interualli B D. æquale eſſe quadrato ſummæ ipſorum B G. D G. hoc eſt quadrato ipſius A B. Quinta 2. poriſ.

Secundum eſt, quod ait Diophantus quadruplum producti B A. in A E. vnà cum quadruplo quadrati ex A E. æquari quadruplo producti ex toto B E. in A E. Quod euidens eſt, quia [b] productus ex B E. in E A. æquatur producto ex B A. in A E. vnà cum quadrato ex A E. tertia 2.

Tertium eſt, quod ait Diophantus, quadruplum producti ex B E in A E, vna cum quadrato ex A B. æquari quadrato compoſiti ex B E. E A. Quod rurſus patet per 5. 2. poriſmatum cùm A B. ſit interuallum ipſorum B E. E A.

Poteſt autem hæc propoſitio & vniuerſalius concipi, & breuius atque etiam facilius demonſtrari, hoc pacto.

Si fuerint tres numeri in medietate arithmetica, octuplum producti ex medio in quemlibet extremorum, adſciſcens quadratum alterius extremi, æquatur quadrato compoſiti ex medij duplo, & ex illo extremo qui in medium octies ductus eſt.

D 10.
A 2. B 5. C 8.

Sint tres numeri A B C. in medietate arithmetica, & ſit D. duplum medij, dico octuplum producti ex B. in vnum extremorum C. vnà cum quadrato alterius extremi A. æquari quadrato compoſiti ex ipſis D C. Quia enim ſunt in medietate arithmetica ipſi A B C. erit duplum medij, puta D. [c] æquale ſummæ extremorum A C. Quare ipſorum D C. interuallum erit A. Quadratus autem compoſiti ex ipſis D C. [d] æquatur quadratis ipſorum D C. & duplo producti ex D. in C. ſeu quadruplo producti ex B. in C. Quadrati autem ipſorum D C. [e] æquantur rurſus duplo producti ex D. in C. ſeu quadruplo producti ex B in C. & quadrato interualli A. Igitur quadratus compoſiti ex ipſis D. C. æquatur octuplo producti ex B. in C. vnà cum quadrato ipſius A. Quod erat oſtendendum. Eodem prorſus argumento probabitur octuplum producti ex B in A. vnà cum quadrato ipſius C. æquari quadrato compoſiti ex ipſis A D. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum. quinta 1 poriſ. quarta 2. quarta 2. poriſ.

Aliter etiam Franciſcus Vieta propoſitionem hanc demonſtrauit lib. 8. variorum de rebus mathematicis reſponſorum, per ipſam ſcilicet Algebræ operationem hac arte. Sit minimus trium numerorum arithmeticæ medietatis A. & ſit differentia B. erit ergo medius A + B. maximus vero A + B. bis & ſi ducatur medius A + B. in maximum A + B. bis fit A Quad. + A in B. ter + B Quad. bis. quod ſi ſumatur octies, & producto addatur A Quad. fit vtique A Quad. nouies + A in B quater & viceſies + B Quad. ſedecies. Hic autem numerus eſt quadratus à latere A. ter + B. quater vt euidens eſt. Et A ter + B quater æquatur compoſito ex maximo & medij duplo, cùm maximus ſit A + B bis, & duplum medij ſit A bis + B bis. Ergo conſtat propoſitum.

Eodem artificio demonſtrabitur altera noſtræ propoſitionis pars. Ducatur enim minimus A in medium A + B octies, & producto addatur quadratus maximi, fiet A Quad. nouies + A in B. duodecies + B Quad. quater qui numerus quadratus eſt à latere A ter + B bis quod æquatur minimo & medij duplo.

PROPOSITIO TERTIA.

B.A.. G..D..E

SI ſint quotcunque numeri æquali interuallo ſe ſuperantes, interuallum maximi & minimi, multiplex eſt interualli ipſorum, ſecundum numerum vnitate minorem eo qui multitudinem propoſitorum numerorum exprimit. Sint enim quotlibet numeri A B. B G. B D. B E. æquali ſe ſuperantes interuallo. Oſtendendum eſt, quod interuallum ipſorum A B. B E. multiplex eſt interualli ipſorum A B. B G. ſecundum numerum vnitate minorem multitudine ipſorum. AB. B G. B D. BE. Quoniam enim expoſiti ſunt AB. BG. BD. BE. æquali interuallo ſe ſuperantes, erunt ipſi

β.α..γ..δ..ε

ἘΑν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἡ ὑπεροχὴ, τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν. ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. βδ. βε, ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι ἡ τῶν αβ. βε. ὑπεροχὴ, τῆς τῶν αβ. βγ. ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τῶν αβ. βγ. βδ. βε. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκεινται οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα αγ. γδ. δε. ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα εα τοῦ αγ. πολλαπλάσιός ἐστι

κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αγ. γδ. δε. τὸ δὲ πλῆθος τῶν αϛ. ϛδ. δε. τοῦ πλήθους τῶν αβ. βγ. βδ. βε. μονάδι ἐλάσσων ἐστίν. ὥστε τὸ εα, τῆς αγ. πολλαπλάσιόν ἐστι κατὰ τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν αβ. βγ. βδ. βε. καὶ ἔστι ὁ μὲν αε. ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ αγ. ἐστὶν αὐτῶν μία ὑπεροχή.

A G. GD. D E. æquales inter ſe. Quamobrem ipſe E A. ipſius A G. multiplex eſt, ſecundum multitudinem ipſorum A G. GD. D E. Atqui multitudo ipſorum A G. GD. DE. eſt vnitate minor multitudine ipſorum A B. B G. B D. B E. Igitur E A. ipſius A G. multiplex eſt ſecundum numerum vnitate minorem multitudine ipſorum AB. BG. BD. BE. eſt autem A E. interuallum maximi & minimi, At A G. eſt vnum interuallum ipſorum numerorum.

IN TERTIAM.

NIhil eſt hic difficultatis. Nam demonſtratio Diophanti breuis eſt, & dilucida.

PROPOSITIO QVARTA.

ΕΑΝ ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες καὶ πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν, ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἐκτεθέντων. ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ α. β γ. δ. ε. ζ. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι συναμφότερος ὁ αζ. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ποιεῖ τινα ἀριθμόν, ὅς ἐστι διπλασίων τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. τὸ γὰρ πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἤτοι ἄρτιόν ἐστιν ἢ περισσόν. ἔστω πρότερον ἄρτιον, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. ἀριθμῷ ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ηθ. τετμήσθω δίχως τῷ κ. καὶ διῃρήσθω ὁ κ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὰ λ. μ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ζ. τοῦ δ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ ζα. συναμφοτέρῳ τῷ γδ. ἴσος ἐστίν. ἀλλὰ συναμφότερος ὁ ζα. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηλ. ὥστε καὶ ὁ γδ. ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ λμ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ εβ. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ μκ. ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἴσος τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηκ. τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηθ. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηθ. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α. β. γ. δ. ε. ζ.

η. λ. μ. κ...θ

SI ſint quocunque numeri æquali interuallo progredientes, ſumma maximi & minimi ducta in numerum multitudinis ipſorum, numerum producit duplum ſummæ expoſitorum numerorum. Sunto numeri quotcunque A.B. CD.E F. æquali interuallo progredientes. Oſtendendum eſt ſummam duorum A F. ductam in numerum multitudinis ipſorum A. B. C.D.E.F. producere numerum qui duplus eſt ad ſummam ipſorum A. B. C. D. E. F. etenim numerus multitudinis ipſorum A. B.C.D. E.F. velpar eſt, vel impar. Sit primùm par, & quot ſunt expoſiti numeri, tot vnitates ſint in ipſo HG. erit ergo H G, par. Quare ſeceturbifariam in K, & diuidatur H K. in ſuas vnitates per L. & M. Tunc quia F. ſuperat D. eodem numero, quo C. ſuperat A. erit ſumma duorum F A. æqualis ſummæ duorum C D. Atqui ſumma duorum F A. æqualis eſt producto ex ipſamet in vnitatem HL. Igitur & ſumma duorum C D. æquabitur producto ex ſumma duorum F A. in vnitatem L M. Ob hæc eadem ſumma duorum E B. æqualis eſt producto ex ſumma duorum F A. in vnitatem M K. Quamobrem ſumma omnium A.B.C. D.E. F. æqualis eſt producto ex ſumma duorum F A. in H K. At producti ex ſumma duorum F A. in H K. duplum eſt productum ex ſumma duorum FA. in H G. Igitur & ſummæ omnium A. B. C. D. E. F. duplum eſt productum ex vtroque F A. in H G. hoc eſt in numerum multitudinis ipſorum A. B. C. D. E. F. Quod demonſtrandum erat.

A. B. C. D. E. F.

H. L. M. K...G

PROPOSITIO QVINTA.

A. B. C. D. E.
G. M. L. K .H

IIſdem poſitis ſit multitudo ipſorum A. B. C. D. E. impar, & ſint in G H tot vnitates, quot ſunt ipſi A. B. C. D. E. Erit ergo impar ipſe G H. ſumatur in eo vnitas G M. & ſecetur M H. bifariam in K. & ſecetur M K. in ſuas vnitates per L. & quoniam E. ſuperat C. eodem numero quo C. ſuperat A. ſumma ipſorum E A. dupla eſt ipſius C. Hoc eſt producti ex C. in vnitatem K L. Ob hæc eadem ſumma duorum B D. dupla eſt producti ex C. in L M. quare ſumma ipſorum A E B D. dupla eſt producti ex C. in M K. Atqui ipſius M K. duplus eſt M H. Igitur ſumma ipſorum A E B D. æqualis eſt producto ex C. in M H. ſed & ipſe C. æqualis eſt producto ex C. in M G. Quamobrem ſumma omnium A B C D E. æqualis eſt producto ex C. in G H. At producti ex C. in G H. duplus eſt productus ex vtroque A E. in G H. quare ſummæ omnium A. B. C. D. E. duplus eſt productus ex vtroque A E. in G H. hoc eſt in numerum multitudinis expoſitorum numerorum. Quod oportebat oſtendere.

α. β. γ. δ. ε.
ζ. θ. κ. η.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ὁ τῶν α. β. γ. δ. ε. περισσός. καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ζη. τοσαῦται μονάδες, ὅσοι εἰσὶν οἱ α. β. γ. δ. ε. περισσὸς ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ. ζη. κείσθω ἐν αὐτῷ μονὰς ζθ. καὶ τετμήσθω ὁ θκ. δίχα τῷ κ. καὶ τετμήσθω. ὁ θκ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὸ λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ε. τοῦ Γ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ εα. διπλασίων ἐστὶ τοῦ Γ. τουτέστι τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ κλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ βδ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ λθ. ὥστε οἱ α. ε. β. δ. διπλασίων εἰσὶ τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ θκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ θη. ὥστε καὶ οἱ α. ε. β. δ. ἴσοι εἰσὶ τῷ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ θη. ἐστὶ δὲ καὶ ὁ Γ. ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ Γ. καὶ τοῦ θζ. ὥστε ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ ζη. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν Γ. καὶ ζη. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε καὶ τοῦ ζη. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. Γ. δ. ε. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε. καὶ τοῦ ζη. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν ἐκτεθέντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IN QVARTAM ET QVINTAM.

HÆ quoque demonſtrationes faciles ſunt, & vnicam tantum propoſitionem conſtituunt, vt euidens eſt, cuius demonſtratio pendet omnino à propoſitione ſexta libri primi poriſmatum, qua oſtendimus in medietate arithmetica ſummam extremorum æquari ſummæ duorum quorumlibet ab extremix æqualiter diſtantium, atque etiam duplo medij, ſi multitudo terminorum fuerit impar. Ex his porro collige ſummam quotlibet numerorum progreſſionis arithmericæ, æqualem eſſe producto ex ſemiſſe numeri terminorum in ſummam extremorum, vel è conuerſo, producto ex ſemiſſe ſummæ extremorum, in numerum terminorum. Semper enim accidit alterutro horum modorum ſummam omnium numerorum haberi nullis intercedentibus fractionibus, ſi enim numerus terminorum ſit par, eius dimidium ſumi poteſt abſque fractione, ſi autem multitudo terminorum ſit impar, ſemiſſis ſummæ extremorum haberi poteſt abſque fractione, quia tunc ſumma extremorum eſt numerus par, quandoquidem eſt dupla medij termini.

PROPOSITIO SEXTA.

α. κ..ν...β γ............δ ε. λ..................ζ
η. μ——ξ——θ
A. K..N...B G..........D E. L..................Z
H. M——X——T

SI ſint ab vnitate quotcunque numeri æquali interuallo progredientes, ſum-

Ἐὰν ὦσιν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ σύμπας πολλαπλα-

σιασθεὶς ἐπὶ τὴν ὀκταπλασίονα τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτοῦ τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσται τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, κατά τινα ἀριθμὸν, ὃς προσλαβὼν μονάδα διπλασίων ἐστὶ τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι: ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ οἱ αβ. γδ. εζ. λέγω ὅτι γίνεται τὸ προκείμενον. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ εζ μονάδα, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ αβ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ ηθ. ἐὰν ἄρα θῶμεν ἑκάστην μονάδα τῶν ακ. ελ. ημ. ἕξομεν τὸν λζ. τοῦ κβ. πολλαπλάσιον κατὰ τὸν μθ. ὥστε ὁ λζ. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ἔτι θῶμεν δυάδα τὸν κν. ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπας πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. ὅς ἐστιν ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. νβ. ὄντος δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα ποιεῖ τινα ἀριθμὸν ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ κβ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ συναμφότερον τὸν ηθ. θμ. καὶ ἐπεὶ ὁ σύμπας ἡμισύς ἐστι τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ζε. ελ. καὶ τοῦ θη. ὁ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ζε. ελ. καὶ τοῦ θη, διαιρεῖται εἴς τε τὸν ὑπὸ λζ. ηθ καὶ εἰς τὸν δὶς ὑπὸ ελ. ηθ. τουτέστι δύο τοὺς ηθ. πάλιν ἄρα ὁ σύμπας ἡμισύς ἐστι τοῦ ὑπὸ λζ. ηθ. καὶ δύο τῶν ηθ. ἀλλὰ ὁ λζ. ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ὁ σύμπας ἄρα ἐστὶν ἥμισυς τοῦ τε ὑπὸ κβ. μθ. θη. στερεοῦ καὶ δύο τῶν ηθ. ἐὰν ἄρα τέμωμεν τὸν μθ. δίχα κατὰ τὸ ξ. ἕξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεῷ καὶ ἑνὶ τῷ ηθ. ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεὸς μετὰ ἑνὸς ηθ. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ τετράγωνον ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς ἀπὸ κβ. τετραγώνους τουτέστι τὸν ὀκτάκις ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον τουτέστι τὸν τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον δεικτέον οὖν ὅτι ὁ τε-

ma omnium ducta in octuplum interualli ipſorum, & adſumens quadratum numeri qui binario minor eſt eodem interuallo, quadratus exiſtit, cuius latus binario multatum multiplex eſt ad interuallum ſecundum quendam numerum, qui auctus vnitate, duplus eſt numeri multitudinis expoſitorum numerorum, vnitate in iis annumerata. Sint enim ab vnitate numeri æquali interuallo progredientes. A B. G D. EZ. dico fieri quod eſt propoſitum. Quot enim ſunt expoſiti numeri cum vnitate, tot vnitatibus conſtet numerus H T. Et quoniam interuallum quo E Z. ſuperat vnitatem, interualli quo A B. vnitatem ſuperat multiplex eſt ſecundum numerum vnitate minorem ipſo H T. ſi ponamus vnitati æquales ſingulos A K. E L. H M. habebimus L Z. ipſius K B. multiplicem ſecundum M T. Quamobrem L Z. æqualis eſt producto ex K B. in M T, Et ſi ſumamus K N. binarium, quæremus an omnium ſumma ducta in octuplum ipſius K B. (quod eſt ipſorum interuallum) & adſumens quadratum ipſius N B. (qui binario deficit ab interuallo) faciat quadratum, cuius latus binario multatum, faciat quendam numerum, qui interualli K B. multiplex ſit, ſecundum compoſitum ex vtroque H T. T M. Et quia ſumma omnium eſt dimidium producti ex vtroque Z E. E L. in H T. At productus ex vtroque ZE. EL. in H T. diuiditur in productum ex L Z. in H T & in eum qui fit bis ex E L. in H T. hoc eſt in duos H T. Rurſum omnium ſumma eſt dimidium eius qui fit ex L Z. in H T. & duorum H T. At L Z. eſt oſtenſus æqualis producto ex K B. in M T. Quare ſumma omnium eſt dimidium ſolidi ſub K B. M T. T H. contenti, & duorum H T. ſi ergo ſecemus M T. bifariam in X. habebimus ſummam omnium æqualem ſolido ſub KB. HT. TX. contento & vni H T. Quæramus igitur an ſolidus ſub K B. H T. TX. contentus, cum vno H T. multiplicatus in octo K B. & adſumens quadratum ipſius N B. faciat quadratum. Atqui ſolidus ſub KB. H T. TX. contentus ductus in vnum K B. æquatur ei qui fit à producto ex HT. in TX. in quadratum ipſius K B. Quare ſolidus ſub K B. H T. TX. contentus,

ductus in octo K B. æquatur ei qui fit à producto ex H T. in T X. in octo quadratos K B. hoc eſt ei qui fit octies ex H T. in T X ducto in quadratum K B. hoc eſt ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. oſtendendum ergo quod qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adſumens productum ex H T. in octo K B. & adhuc quadratum N B fit quadratus. Diuiditur autem qui fit octies ex H T. in K B. in eum qui fit quater ex H M. in K B. & in eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. quærendum ergo an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adſciſcens eum qui fit quater ex H M. in K B. & eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum N B. faciat quadratum. At qui fit quater ex H M. in K B. æqualis eſt ei qui fit bis ex N K. in K B. & mixtus quadrato N B. facit quadratos ipſorum K B. K N. Quæremus igitur an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adſumens eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratos B K. K N. fiat quadratus. Ruſus autem quadratus B K. tranſit in eum qui fit ex quadrato H M. in quadratum K B. & mixtus hic ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. facit numerum æqualem producto ex quadrato compoſiti ex vtroque H T. T M. in quadratum K B. Quærendum ergo an quadratus compoſiti ex vtroque H T. T M. ductus in quadratum K B. adſumens quadruplum producti ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum K N. fiat quadratus. Itaque ſi producto ex vtroque H T. T M. in K B. accipiamus æqualem numerum N R. erit productus ex quadrato vtriuſque H T. T M. in quadratum K B. æqualis quadrato N R. vt deinde oſtendetur. Videndum igitur an quadrati R N. N K. cum quadruplo producti ex vtroque H T. T M. in K B. faciant quadratum. Atqui quadruplum producti ex vtroque H T. T M. in K B. æquale eſt quadruplo ipſius N R. quandoquidem qui fit ſemel ex vtroque H T. T M. in K B. æqualis poſitus eſt N R. Atqui quatuor N R. æquales ſunt duplo producti ex N R. in N K. (nam N K. poſitus eſt binarius) quærendum ergo an quadrati N R. N K. cum duplo producti ex N R. in N K. faciant quadratum; faciunt autem quadratum à latere R K. cuius latus R K. multa-

τράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τῆς αθ. ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τῆς νβ. τετράγωνον γίνεται τετράγωνος. διαιρεῖται δὲ ὁ ὀκτάκις ὑπὸ κθ, κβ. εἰς τε τὸν τετράκις ὑπὸ κμ. κβ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ηθ. θμ. καὶ τῆς κβ. ζητητέον οὖν εἰ ὁ τετράκις ὑπὸ τῆς ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον, μετὰ τοῦ τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. καὶ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνος ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ νκ. κβ. καὶ μιγεὶς τῷ ἀπὸ νβ. τετραγώνῳ ποιεῖ τοὺς ἀπὸ κβ. νκ. τετραγώνους: ζητήσομεν ἄρα εἰ καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ θη. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. μετὰ τῶν βκ. κν. τετραγώνων γίνεται τετράγωνος. πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ βκ. τετράγωνος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ημ. τετράγωνον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον, καὶ μιγεὶς τούτῳ τῷ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον: ζητητέον ἄρα εἰ καὶ ὁ συναμφοτέρου τῆς ηθ. θμ. τετράγωνος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ηθ. θμ. καὶ τῆς κβ. μετὰ τοῦ ἀπὸ κν. τετραγώνου γίνεται τετράγωνος, ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσον τὸν νρ. ἀριθμόν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς κβ. τετράγωνον ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ, ὅπερ ἑξῆς δειχθήσεται, σκεπτέον ἄρα εἰ οἱ ἀπὸ τῶν ρν. νκ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κθ. θμ. καὶ τῆς κβ. γίνεται τετράγωνος. ἀλλὰ ὁ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. καὶ κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ νρ. τετράκις, ἐπειδήπερ καὶ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσος ἐτέθη ὁ νρ. Τέσσαρες δὲ οἱ νρ. ἴσοι εἰσὶ τῷ δὶς ὑπὸ νρ. νκ. δυὰς γὰρ ἐτέθη ὁ νκ. ζητητέον ἄρα εἰ καὶ οἱ ἀπὸ τῶν νρ. νκ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ νρ. νκ. ποιοῦσι τετράγωνον. ποιοῦσι δὲ τὸν ἀπὸ τῆς ρκ. οὗ ἡ πλευρὰ ἡ ρκ. λείπουσα δυάδα τὴν νκ. ποιεῖ ἀριθμὸν τὸν νρ. ὅς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ

κϐ. πολλαπλασίων ἐστὶ κῆ τῆ συναμφότερον τῆ ηθ. θμ. ὃς προσλαβὼν μονάδα τὸν ημ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος.

α. κ. . ν . . . ϐ
η. μ ——— ξ ——— θ

tum binario N K. facit numerum quendam N R. qui interualli K B. multiplex eſt, ſecundum ſummam ipſorum H T. T M. quæ adſcita vnitate H M. duplum facit numeri multitudinis expoſitorum numerorum.

A. K. . N. . . B ——— R
H. M ——— X ——— T

IN SEXTAM.

Hic nonnulla ſunt dilucidanda, quæ Diophantæa breuitas obſcuriora reddit.

A. K. . N. . . B G. . . . . D E. L. . . . . Z
H. M ——— X ——— T

Primò quod ait ſummam omnium eſſe dimidium producti ex ſumma ipſorum E Z. E L. in H T
patet per 4. & 5. huius: Cùm enim E L. ſit vnitas, vtique E Z. E L. ſimul conficiunt ſummam ex-
prima 2. tremorum, qua ducta in H T: numerum terminorum, fit duplum ſummæ omnium. Quia vero du-
cere E Z. in H T, [1] idem eſt ac ducere ſigillatim E L. L Z. in eundem H T. rectè concludit ſum-
mam omnium eſſe dimidium producti ex L Z. in H T. ſemel, & producti ex E L. in H T. bis, & cum
E L. ſit vnitas, quæ non immutat numerum quem multiplicat, benè infert ſummam omnium eſſe
dimidium producti ex L Z. in H T. adſciſcentis duplum ipſius H T.

Secundò, diuidentes M T. bifariam in X. rem per lineas expreſſimus, quia ex hypotheſi Dio-
phantæa ſequitur M T. eſſe ternarium, qui bifariam per integros ſecari non poteſt, hoc autem nil
facit ad demonſtrationem.

Tertiò, quod ait ſolidum ſub K B. H T. T X. contentum ductum in K B. æquari ei qui fit à
producto ex H T. in T X. in quadratum ipſius K B. patet ex eo quod quatuor numeri quoquo modo
tertia 5. poriſ. & ordine inter ſe multiplicentur, [2] eundem ſemper numerum procreant.

Quartò, quod ait numerum qui fit bis ex K N. in K B. adſumpto quadrato ipſius N B. æquari
tertia 2. quadratis ipſorum K B. K N. ſic probatur. Qui fit ex K B. in K N. bis. [3] æquatur producto ex K N.
in N B. bis & duplo quadrati ipſius K N. Igitur ſi addatur vtrimque quadratus ex N B. erit pro-
ductus ex K B. in K N. bis, cum quadrato ex N B. æqualis producto ex K N. in N B. bis, & qua-
drato ex K N. bis, & quadrato ex N B. ſemel. At quadrati ipſorum K N. N B. cum duplo producti
quarta 2. ex K N. in N B. [4] æquantur quadrato totius K B. Igitur productus ex K N. in K B. bis cum quadrato
ipſius N B. æquatur quadratis ipſorum K B. K N. Quod erat demonſtrandum.

Quintò, quod ait productum ex quadrato ipſius K B. in quadruplum producti ex H T. in M T.
vnà cum producto ex eodem quadrato K B. in quadratum H M. æquari producto ex quadrato
K B. in quadratum compoſiti ex ipſis H T. M T. id ſic infertur. Quoniam datis duobus numeris
H. T. M T. quorum interuallum H M. quod fit quater ex H T. in M T. addito quadrato ipſius H M.
quinta 2. poriſ. [5] æquatur quadrato compoſiti ex ipſis H T. M T. patet ducere quadratum K B. in quadruplum pro-
ducti ex H T. in M T. & in quadratum H M. idem eſſe atque ducere eundem quadratum K B. in
quadratum compoſiti ex ipſis H T. M T.

Quoniam vero demonſtratio Diophanti ob illius prolixitatem, tyronibus fortaſſe videbitur obſcurior, operæ pretium duxi, propoſitionem iſtam aliter demonſtrare. In quo præter quàm quod facilius & magis dilucidè rem expediemus, id etiam nobis nobis lucri accedet, quod in vniuerſum de omni progreſſione Arithmetica oſtendemus, quod demonſtrauit Diophantus de ſola progreſſione cuius minimus terminus eſt vnitas. Itaque more noſtro, quinque vel ſex Theorematis propoſitum concludemus.

THEOREMA PRIMVM.

Datis duobus numeris, quadratus primi cum quadrato ſemiſſis ſecundi, æquatur producto ex mutua datorum multiplicatione, vnà cum quadrato interualli inter primum & ſemiſſem ſecundi.

Sint dati A. B. & ipſius B. ſemiſſis eſto C. Ipſorum autem A C. interuallum eſto D
D 8. C 2. dico quadratos ipſorum A. C. ſimul æquari producto ex A. in B. vna cum quadrato ip-
4. 2. poriſm. A 10. B 4. ſius D. Etenim quadrati ipſorum A C. [6] æquantur duplo producti ex A. in C. & qua-
drato ipſius D. ſed duplo producti ex A. in C. æquatur productus ex A. in B. quia B. duplus
eſt ad C. igitur quadrati ipſorum A C. æquantur producto ex A. in B. & quadrato ipſius D. quod
demonſtrandum erat.

Non curamus vtrum A. ſit maior vel minor quam B. vel quam C. ſed & eodem prorſus argumento ſi B. ponatur primus, A. ſecundus, oſtendemus productum ex A. in B. cum quadrato interualli inter B. & ſemiſſem ipſius A. æquari quadratis tum ex B. tum ſemiſſe ipſius A. ortis.

THEOREMA SECVNDVM.

In progreſſione arithmetica, productus ex differentia progreſſionis in maximum, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & ſemiſſem differentiæ, æquatur quadrato minimi, & quadrato ſemiſſis differentiæ & quadrato differentiæ toties ſumpto, quot ſunt termini progreſſionis vno dempto.

H 4. H 1. E 2.
A 5. B 7. C 9. D 11.

Sint A B C D. in arithmetica medietate, & ſit E. differentia progreſſionis cuius ſemiſſis G. & interuallum inter G. & A. eſto H. dico productum ex E. in D. cum quadrato ipſius H. æquari quadratis ipſorum A G. & adhuc quadrato ipſius E. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. nam interuallum quo D. ſuperat A. continet E. toties quot ſunt ipſi A B C. per tertiam huius. Igitur ducere E. in D. idem eſt ac ducere E. in A. & E. in ſeipſum toties, quot ſunt ipſi A B C. at productus ex E. in A. cum quadrato ipſius H. æquatur quadratis ipſorum A G. per primum theorema. Ergo productus ex E. in D. cum quadrato ipſius H. æquatur quadratis ipſorum A G. & præterea quadrato ipſius E. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA TERTIVM.

In progreſſione arithmetica, quadratus maximi æquatur producto ex differentia in omnes antecedentes bis, & quadrato minimi ſemel, & quadrato differentiæ toties ſumpto, quot ſunt ipſi antecedentes.

G 2. G 2. G 2.
A 5. B 7. C 9. D. 11.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit G. differentia progreſſionis. dico quadratum maximi D. æquari producto bis ex G. in omnes antecedentes A B C. & quadrato ipſius A ſemel, & quadrato ipſius G. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. quia enim G C. ſimul componunt D. ' erit quadratus ipſius D. æqualis quadratis ipſorum G C. & duplo plani ſub G C. eadem de cauſa quadratus ipſius C. æquatur quadratis ipſorum G B. & duplo plani ſub G B. & rurſus quadratus ipſius B. æquatur quadratis ipſorum G A. & duplo plani ſub G A. igitur quadratus ipſius D. æquatur quadrato A. ſemel, & quadrato G. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. & præterea duplo producti ex G. in ipſos A B C. quod erat oſtendendum. 4. ſecundi.

THEOREMA QVARTVM.

In progreſſione arithmetica, quadratus maximi aucti dimidio differentiæ, æquatur duplo plani ſub ſumma omnium, & ſub differentia contenti, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & ſemiſſem differentiæ.

H. 4. E. 2. G 1.
A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.
K. 12.

Sint A B C D. in arithmetica progreſſione cuius differentia E. cuius ſemiſſis G. & interuallum inter A. & G. eſto H. Ipſorum autem D G. ſumma eſto K. dico quadratum ipſius K. æquari numero qui fit bis ex E. in ſummam omnium, vnâ cum quadrato ipſius H. Etenim quadratus ipſius K. ' æquatur quadratis ipſorum D G. & duplo producti ex G. in D. ſeu producto ex E. in D. (quandoquidem E. duplus eſt ad G) At quadratus ipſius D. per præcedentem æquatur duplo producti ex E. in ipſos A B C. vnâ cum quadrato ipſius A. ſemel, & quadrato ipſius E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. igitur quadratus ex K. æquatur numero qui fit bis ex E. in A B C. & ſemel in D. cum quadratis ex A. & G. ſemel ſumptis, & quadrato ex E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. At per ſecundum theor. quadrati ex A. & G. vnà cum quadrato ex E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. æquantur producto ex E. in D. vna cum quadrato ex H. igitur quadratus ex K. æquatur duplo producti ex E. in omnes A B C D. vna cum quadrato ex H. quod demonſtrandum erat. quarta 2.

H 4. E 2. G 1. K 12.
A 5. B 7. C 9. D 11.

THEOREMA QVINTVM.

In omni progreſſione arithmetica, numerus qui fit octies ex differentia in ſummam omnium, vna cum quadrato interualli inter duplum minimi & differentiæ, æquatur quadrato, cuius latus componitur ex duplo maximi, & ex differentia.

H. 4. E. 2. G. 1.
A. 5. B 7. C. 9. D. 11.
L. 8. K. 12.

Sint A B C D. in progreſſione arithmetica, cuius differentia E. cuius ſemiſſis G. & interuallum inter A. & G. eſto H. interuallum autem inter duplum ipſius A. & E. eſto L. dico quod fit octies ex E. in ſummam omnium A B C D. cum quadrato ipſius L. æquari quadrato compoſiti ex duplo ipſius D. & ex E. ſit enim K. ſumma ipſorum D G. quia igitur octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. eſt quadruplum producti qui fit bis ex E. in eoſdem A B C D. & quadrati ex H. At productus ex E. in A B C D. bis, quadratus ex H. æquatur quadrato ex K. per præcedens theor. patet octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. æquari quadruplo quadrati ex K. at quadruplum quadrati ex K. eſt quadratus, cuius latus duplus eſt ad K. & cum K. componatur ex D. & ex G. duplum illius componitur ex duplo ipſius D. & ex duplo ipſius G. ſeu ex E. igitur octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. quadratus eſt, cuius latus componitur ex duplo ipſius D & ex E. Quia vero interuallum ipſorum A G. eſt H. vtique duplorum interuallum, puta L. duplum eſt ad H. ac proinde quadratus ex L. quadruplus eſt quadrati ex H. quamobrem octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadrato ex L. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipſius D. quod erat demonſtrandum.

Sane hoc theoremate in vniuerſum de omni progreſſione arithmetica demonſtrauimus, quod Diophantus reſtringit ad ſolam progreſſionem quæ incipit ab vnitate. Nam illius propoſitionem ab hoc theoremate minime differre cuilibet rem attentius conſideranti, ſtatim innoteſcet, ſi hoc applicetur arithmeticæ progreſſioni ab vnitate incipienti. Quod tamen vt fiat commodiſſime, tale adhuc demonſtrandum theorema.

THEOREMA SEXTVM.

In progreſſione arithmetica quæ incipit ab vnitate, productus ex duplo numeri terminorum vnitate multato in differentia progreſſionis, adſumpto binario, æquatur compoſito ex differentia, & ex duplo maximi termini.

E. 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H. 4. K 8.
L. 3. F. 6.
G. 7.

Sint A B C D. in arithmetica progreſſione, cuius differentia E. & ſit A. vnitas, numerus terminorum H. cuius duplum K. & ſit L. vnitate minor ipſo H. cuius duplum F. cui addita vnitate fiat G. eritque G. vnitate minor quam K. cum enim H L. vnitate differant, erit duplorum K F. interuallum binarius, quare G. excedens F. vnitate, deficiet vnitate ab ipſo K. dico itaque productum ex G. in E. adſumpto binario, æquari compoſito ex duplo ipſius D. & ex E. Nam productus ex L. in E. æquatur interuallo extremorum D A. per tertiam huius.

E 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H 4. K 8.
L 3 F 6.
G 7.

Quare ſi producto ex L. in E. addatur vnitas A. fiet numerus D. ac proinde ſi producto ex F. in E. addatur binarius, fiet duplum ipſius D. quamobrem ſi G. vnitate maior quàm F. ducatur in eundem E. & producto addatur binarius fiet vtique numerus continens bis ipſum D. & ſemel ipſum E. quod erat demonſtrandum.

Hinc porrò manifeſte infertur propoſitio Diophanti. ſint enim AB C D. in arithmetica medietate, & ſit A. vnitas, differentia progreſſionis E. quæ binario multata relinquat G. & duplum numeri terminorum eſto K. vnde ablata vnitate, ſuperſit L. dico ſi E. ducatur octies in ſummam omnium A B C D. & producto addatur quadratus ipſius G. fieri quadratum, cuius latus binario multatum, continet E toties, quot ſunt vnitates in L. quia enim à differentia E. auferendo duplum minimi termini A. puta binarium, relinquitur G. vtique per 5. theorema numerus qui fit octies ex E. in ſummam omnium A B C D. cum quadrato ex G. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipſius D. At per ſextum theor. ipſi E. & duplo ipſius D. æquatur productus ex L. in E. auctus binario. Igitur qui fit octies ex E. in ſummam omnium A B C D. adſumens quadratum ex G. æquatur quadrato, cuius latus æquale eſt producto ex L. in E. adſumenti binarium. Patet ergo ſi à latere huius quadrati auferatur binarius, relinqui productum ex L. in E. ſeu numerum qui toties continet E. quot ſunt in L. vnitates, quod demonſtrandum erat.

G 4. E 6.
A. 1. B 7. C. 13. D 19.
K 8. L 7.

PROPOSITIO SEPTIMA.

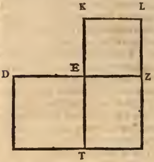
Ἔστω συναμφοτέρῳ τῷ ηθ. θμ. ἴσος ὁ α. τῷ δὲ κβ. ἴσος ὁ β. τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶ ηθ. θμ. καὶ τῶ κβ. ἴσος ὁ γ. λέγω ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τῶ ηθ. θμ. τουτέστι ὁ ἀπὸ τῶ α. ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῶ κβ. τουτέστιν ἐπὶ

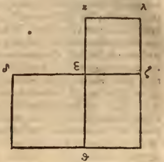
SIT vtrique H T. T M. æqualis A. ipſi autem K B. æqualis B. At producto ex vtroque HT. T M. in K B. æqualis ſit G. dico quod quadratus compoſiti ex vtroque H T. T M. hoc eſt ipſius A.

ductus in quadratum K B. hoc eſt in quadratum B. producit quadratum ipſius G. Ponantur ipſis A & B. æquales in recta linea D E. E Z. & deſcribantur ab ipſis quadrati A. B. G.

τὸ ἀπὸ τοῦ β. ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γ. κείσθω τοῖς α. β. ἴσοι ἐπ' εὐθείας οἱ δε. εζ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα

α. β. γ.





D T. E L. & perficiatur complementum T Z. Itaque erit vt D E. ad E Z. Ita quadratus D T. ad complementum TZ. vt autem T E. ad E K. ſic complementum T Z. ad quadratum E L. quare complementum T Z. eſt medium proportionale inter quadratos D T. Z K. Productus igitur ex quadrato ex D T. in quadratum Z K. æqualis eſt quadrato ex T Z. & eſt D T. æqualis quadrato compoſiti ex vtroque H T. T M. At Z K. eſt æqualis quadrato K B. & complementum T Z. æquale eſt N R. Quamobrem quod fit ex quadrato vtriuſque H T. T M. in quadratum K B. æquale eſt quadrato N. R.
A. B. G.

οἱ δθ. ελ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ θζ. παραπλήρωμα. ὡς ἄρα ἡ δε. ἐπὶ εζ, οὕτως τὸ δθ. ἐπὶ θζ. παραπλήρωμα. αὐτὸ δὲ ἡ θε. ἐπὶ εκ. οὕτως τὸ θζ. παραπλήρωμα ἐπὶ ελ. τὸ ἄρα θζ. παραπλήρωμα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν δθ. θζ. τετραγώνων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν δθ. ζκ. τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ θζ. παραπληρώματος καὶ ἐστὶ τὸ μὲν δθ. ἴσον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ζκ. τετράγωνον ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ κβ. τὸ δὲ θζ. παραπλήρωμα ἴσον τῷ νρ. καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ.

α. β. γ.

IN SEPTIMAM.

Quod demonſtrat hic Diophantus per lineas, longe breuius & facilius per numeros oſtendemus, & ipſam propoſitionem ſic concipiemus.

Productus ex mutua duorum quadratorum multiplicatione, æquatur quadrato producti ex mutuo, laterum ductu.

A. 25. B. 35. C. 49.
D. 5. E. 7.

Sint quadrati A. C. quorum latera D. E. & ex D. in E. fiat B. dico productum ex quadrato A. in quadratum C. æquari quadrato ipſius B. etenim vt conſtat ex demonſtratione vndecima 8. Euclidis B. eſt medius proportionalis inter A. & C. quare productus ex A. in C. æquatur quadrato ipſius B. Quod erat demonſtrandum. 20. ſepti

ο. α. κ.. ν... β——ρ γ——δ ε. λ——ζ
η. μ——ξ——θ

O. A. K.. N... B——R G——D E. L——Z
H. M——X——T

PROPOSITIO OCTAVA.

Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολύγωνός ἐστι, καὶ γὰρ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρὰν δὲ αὐτοῦ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων γενόμενον ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσ-
6. huius. λαβόντα τὸν ἀπὸ τῆς νβ. τετράγωνον, ποιεῖν τὸν ἀπὸ τοῦ ρκ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλην μονάδα θῶμεν τὴν αο. ἕξομεν τὴν κο δυάδα. καὶ ἔστι δὲ ὁμοίως καὶ ὁ κν δυάς. ἔσονται ἄρα οἱ οβ. βκ. βν. τὴν ἴσην ἀλλήλων ὑπεροχὴν ἔχοντες, ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου τοῦ οβ. καὶ τοῦ μέσου τοῦ βκ. προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου
2. huius. τοῦ βν. τετράγωνον, ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ μεγίστου τοῦ οβ. καὶ δύο τῶν μέσων τῶν βκ. καὶ ὁ οβ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε οβ. καὶ δύο τῶν κβ. καὶ ἡ τούτου πλευρὰ λιποῦσα δυάδα τὴν οκ. καταλείψει τρεῖς κβ. οἵ εἰσι τοῦ κβ. πολλαπλάσιοι κατὰ τριάδα, ἡ δὲ τριὰς προσλαβοῦσα τὴν μονάδα, διπλασίων ἐστὶ τῆς δυάδος. ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ οβ. ὁ δὲ οβ ἂν τύχῃ, καὶ πολύγωνός ἐστι πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος, ἐπείπερ μονάς ἐστιν ὁ αο. ὁ δὲ δεύτερος ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ αβ. καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα. ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολύγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ οβ. ἔχων γωνίας τοσαύτας, ὅσος
1. huius. ἐστὶν ὁ δυάδι τῆς οκ. μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τῆς κβ. καὶ πλευρὰν ἔχει τὴν ηθ. ὅς ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. Καὶ ἀπεδείχθη τὸ παρὰ Ὑψικλεῖ ἐν ὅρῳ λεγόμενον. ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁποσοιοῦν, μονάδος μενούσης τῆς ὑπεροχῆς, ὁ σύμπας ἐστὶ τρίγωνος, δυάδος δὲ τετράγωνος, τριάδος δὲ πεντάγωνος. λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὴν δυάδι μείζονα τῇ ὑπεροχῇ, πλευραὶ δὲ αὐτῶν τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ὅθεν ἐπεὶ οἱ

CVm ſint quæ propoſuimus, pronunciamus. Si ſint quotcumque numeri ab vnitate, æquali interuallo progredientes, omnium ſumma multangulus eſt, tot enim habet angulos, quot vnitates numerus binario ſuperans interuallum; latus autem illius eſt numerus multitudinis expoſitorum numerorum cum vnitate. Cùm enim oſtenderimus ſummam expoſitorum omnium numerorum multiplicatam in octo K B. & adſumentem quadratum N B. facere quadratum à latere R K. ſi aliam vnitatē ſumamus A O. habebimus KO. binarium. Et eſt ſimiliter KN. binarius Erunt ergo æquali interuallo progredientes O B. B K. B N. Quamobrem qui fit octies ex maximo O B. in medium B K. adſumens quadratum minimi B N. facit quadratum habentem latus ſummam conflatam ex maximo O B. & duplo medij B K. Igitur O B. ductus in octo K B. & adſumens quadratum N B. æqualis eſt quadrato compoſiti ex O B. & duobus K B. & huius latus multatum binario O K. relinquit tres K B. qui ſunt ipſius K B. multiplices ſecundum ternarium, at ternarius adſumens vnitatem, duplum efficit binarii. Quoniam igitur ſumma omnium progreſſionis terminorum cum vnitate idem præſtat quod O B. & O B. vtcunque oblatus eſt, & multangulus primus ab vnitate (quandoquidem A O. eſt vnitas, ſecundus autem poſt eam numerus eſt A B) & eius latus eſt binarius, ſequitur & ſummam omnium progreſſionis terminorum eſſe multangulum æquiangulum ipſi O B. & habentem tot angulos, quot vnitates habet numerus ſuperans binario O K. interuallum K B. & eſt eius latus H T. numerus multitudinis expoſitorum numerorum cum vnitate. Et demonſtratum eſt quod ab Hypſicle in definitione dicitur. Quod ſi fuerint quotlibet numeri ab vnitate æquali interuallo progredientes, ſi interuallum ſit vnitas, ſumma omnium eſt triangulus; ſi binarius, quadratus; ſi ternarius, quinquangulus. Exprimitur autem multitudo angulorum per numerum binario maiorem differentia; latera vero per numerum multitudinis terminorum cum vnitate. Itaque quoniam trianguli fiunt, cum interuallum eſt vnitas, latera ipſorum erunt maximi ter-

minorum, & productus ex maximo terminorum in vnitate maiorem ipſo, duplus eſt ipſius trianguli. Et quia O B. multangulus eſt, & illius tot ſunt anguli, quot in ipſo vnitates, & ductus octies in numerum binario minorem ipſo, hoc eſt in K B. & adſumens quadratum numeri qui ab ipſomet, quaternario deficit hoc eſt quadratum N B. facit quadratum, talis erit multangulorum definitio. Omnis multangulus multiplicatus octies in numerum binario minorem eo qui exprimit multitudinem angulorum, & adſumens quadratum numeri quaternario minoris multitudine angulorum, facit quadratum. Simul ergo demonſtrata Hypſiclis definitione, & horum multangulorum, reliquum eſt vt oſtendamus, quomodo dato latere is qui requiritur multangulus inueniatur. Nam alicuius multanguli latus habentes H T. & habentes multitudinem angulorum eius, habebimus & datum K B. Quare & habebimus productum ex vtroque H T. T M. in K B. qui æqualis eſt ipſi N R. Quare & datum habebimus ipſum KR. quoniam binarius eſt N K. Quamobrem & datum habebimus ipſius K R. quadratum. A quo auferendo quadratum ipſius N B. qui & ipſe datus eſt, habebimus reliquum datum, qui quæſiti multanguli multiplex eſt ſecundum, octuplum ipſius K B. Ergo inuentus eſt quæſitus multangulus. Similiter & dato multangulo, inueniemus latus eius HT. Quod demonſtrandum erat.

τρίγωνοι μονάδος ἴσης τῆς ὑπεροχῆς γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσὶν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκτιθεμένων καὶ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, διπλασίων ἐστὶ τοῦ συγκειμένου τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ὁ οβ. πολύγωνός ἐστι, καὶ ἔχει τοσαύτας γωνίας ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὸν δυάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, τουτέστιν ἐπὶ τὸν κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι αὐτοῦ ἐλάσσονος, τουτέστι τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. ποιεῖ τετράγωνον ὥστε ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων. ὅτι πᾶς πολύγωνος πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον. συναποδειχθέντος οὖν καὶ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου, καὶ τούτων τῶν πολυγώνων, ἑξῆς ἐστὶ δεικνύναι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται. ἔχοντες γὰρ πλευρὰν δοθέντος τινὸς πολυγώνου τὸν ηθ. ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτοῦ γωνιῶν, ἕξομεν καὶ τὸν κβ. δοθέντα. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἕξομεν δοθέντα, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ νρ. ὥστε ἕξομεν καὶ τὸν κρ. δοθέντα, ἐπείπερ δυάς ἐστι ὁ νκ. ὥστε καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κρ. ἕξομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον ὄντα δοθέντα, ἕξομεν καὶ τὸν λοιπὸν δοθέντα, ὅς ἐστι τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πολλαπλασίων καὶ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ κβ. ὥστε εὑρετός ἐστιν ὁ ζητούμενος πολύγωνος. ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὑρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο.α.κ..ν...β——ρ γ——δ ς.λ——ζ
η.μ——ξ——θ
O.A.K..N...B——R G——D E.L——Z
H. M——X——T

IN OCTAVAM.

HÆc propoſitio, vt à nobis reſtituta eſt, parum habet difficultatis, pendet eius demonſtratio à ſuperioribus, præſertim à ſexta, ſecunda, & prima, huius, quas idcirco ſuis locis in margine citauimus.

Quod ait Diophantus de numeris triangulis, nimirum, ſi latus cuiuſlibet trianguli ducatur in numerum vnitate maiorem ſcipſo, fit duplum ipſius trianguli, id ſic infertur. Quoniam omnis triangulus ex definitione, eſt ſumma progreſſionis arithmeticæ quæ incipit ab vnitate, & cuius differentia eſt vnitas, patet numerum terminorum, ſeu ipſum latus trianguli æquari maximo termino, proinde ſi lateri addatur vnitas, ſeu minimus terminus, fiet ſumma extremorum. Quamobrem cùm latus trianguli ſeu numerus terminorum, ducetur in numerum vnitate maiorem ſeipſo, hoc eſt in ſummam extremorum, fiet duplum ſummæ omnium terminorum per 4. huius, hoc eſt duplum ipſius trianguli.

Hinc autem innoteſcit defectus ſextæ propoſitionis vt concipitur à Diophanto, eam reſtringendo ad ſolam progreſſionem arithmeticam quæ incipit ab vnitate, ſic enim per eam vix applicari poteſt hæc octaua propoſitio numeris triangulis. Etenim requirit hæc propoſitio vt à numero multitudinis angulorum auferatur quaternarius, vt reſidui quadratus additus octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, fiat quadratus. At numerus angulorum trianguli eſt ternarius, à quo ſane auferri non poteſt quaternarius. Euaneſcit autem hæc difficultas ſi vniuerſalius enuncietur propoſitio ſexta, vt à nobis præſtitum eſt theoremate quinto. Nam per illud theorema octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, addendus eſt quadratus interualli inter eundem numerum angulorum binario multatum, & duplum minimi termini, hoc eſt binarium, quare non refert vtrum numerus angulorum binario multatus ſit maior binario, (vt accidit in omnibus polygonis ſupra quadratum) vel æqualis binario (vt accidit in quadrato) vel minor binario (vt accidit in triangulo) Nam in primo caſu à numero angulorum binario multato, auferetur rurſus binarius, ſeu vt vult Diophantus à numero angulorum auferetur quaternarius, & reſidui quadratus addetur octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum. in ſecundo caſu etiam à numero angulorum binario multato auferetur rurſus binarius, & quia nil ſupererit, nil addetur ad octuplum ſupradictum, ſed huiuſmodi octuplum erit numerus quadratus, etenim à numero angulorum quadrati auferendo 2. ſupereſt 2. cuius octuplum eſt 16. quo ducto in quemlibet quadratum, patet fieri quadratum.

In tertio denique caſu numerus angulorum binario multatus auferetur à binario, & reſidui quadratus addetur octuplo producti ex triangulo in numerum angulorum binario multatum. Vnde quia numerus angulorum trianguli binario multatus eſt vnitas, quam auferendo à binario ſupereſt rurſus vnitas, hinc demonſtratur quod ait Diophantus propr. 44. lib. 4. omnis triangulus per octo multiplicatus, & adſumens vnitatem, facit quadratum.

Cæterum animaduerſione dignum eſt hanc propoſitionem non conuerti niſi in triangulis & in quadratis. Quemadmodum enim ex hac propoſitione ſequitur omnem quadratum ductum in 16. efficere quadratum, vt ſuprà docuimus, ſic è conuerſo omnis numerus qui ductus in 16. facit quadratum, quadratus eſt, vt manifeſtum eſt, & rurſus quemadmodum hac propoſitione demonſtratur, omnem triangulum per octo multiplicatum, & adſumentem 1. efficere quadratum; ſic è conuerſo omnis numerus cuius octuplum adſcita vnitate facit quadratum, triangulus eſt, vt in promptu eſt demonſtrare.

A. 10. B. 80. C. 81.
F 4. E. 8. D. 9.
G. 10.

Sit numerus A. cuius octuplum B. cui addita vnitate fiat C. quadratus cuius latus D. dico A. eſſe triangulum. Etenim quia B. par eſt cùm ſit octonarij multiplex, erit C. impar, ac proinde & latus eius D. impar eſt, quare ſi ſumatur E. vnitate minor quàm D. erit E. par ſit ergo illius ſemiſſis F. & à latere F. fiat triangulus G. conſtat igitur octuplum ipſius G. adſumpta vnitate facere quadratum, cuius latus ſuperat vnitate duplum ipſius F. tam ex demonſtratis ad 44. 4. quàm ex hac propoſitione triangulis applicata. Quare cum D. ſuperet vnitate duplum ipſius F. & ipſius D. quadratus ſit C. vnde ablata vnitate ſupereſt B. patet B. eſſe octuplum trianguli G. ſed idem B. ex hypotheſi eſt octuplum numeri A. ergo A. eſt æqualis triangulo G. Quod erat propoſitum.

In aliis autem polygonis non conuertitur hæc propoſitio, quod vno aut altero exemplo probaſſe ſufficiet. Quamuis enim vi huius propoſitionis omnis pentagonus ductus in 24. & adſumens vnitatem, faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 24. & adſumens 1. faciat quadratum eſt pentagonus, etenim 2. ductus in 24. & adſumens 1. facit quadratum 49. & tamen 2. non eſt pentagonus. Rurſus quamuis omnis heptagonus, vi huius propoſitionis ductus in 40. & adſumens 9. faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 40. & adſumens 9. facit quadratum, ſtatim eſt heptagonus. Etenim 4. ductus in 40. & adſumens 9. facit quadratum 169. cum tamen 4. non ſit heptagonus, & ſic de alijs.

PROPOSITIO NONA.

Διδασκαλικώτερον δὲ ὑποδείξομεν καὶ τοῖς βουλομένοις εὐχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων. λαβόντες γὰρ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἀεὶ διπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸ λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, τῷ γινομένῳ προσθήσομεν ἀεὶ δυάδα, καὶ λαβόντες τὸ ἀπὸ τοῦ γενομένου τετράγωνον, ἀφελοῦμεν

AD docendum autem accommodatius, oſtendemus hoc iis qui prompte volunt audire ea quæ quæruntur per methodos. ſumpto enim latere multanguli, illud geminabimus, hinc auferemus vnitatem, & reliquum ducemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum; producto addemus binarium, quadratumque eius qui ſic fit ſumentes,

auferemus ab eo quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, reliquumque diuidentes in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, inueniemus quæſitum multangulum. Rurſus ipſo multangulo dato, inueniemus latus hac arte. Multiplicabimus eum per octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto addemus quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, & inueniemus quadratum, ſi tamen datus eſt multangulus. De huius autem quadrati latere, ſemper auferemus binarium, reſiduum diuidemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, quotienti addemus vnitatem, & ſummæ ſemiſſem capientes, habebimus quæſiti multanguli latus.

ἀπ' αὐτοῦ τὸ ἀπὸ τῆς τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν. καὶ τὸ λοιπὸν μερίσαντες εἰς τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν. εὑρήσομεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον. πάλιν δ' αὐτοῦ πολυγώνου δοθέντος, εὑρήσομεν οὕτως τὴν πλευράν. πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες τὸ ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν τετράγωνον, εὑρήσομεν τετράγωνον, ἐάνπερ ᾖ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος. τούτου δὲ τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφελόντες ἀεὶ δυάδα, τὸν λοιπὸν μεριοῦμεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τοῦ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ ἕξομεν τὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

IN NONAM.

Nulla omnino hic eſt difficultas, ſolum moneo has duas regulas paulò aliter tradi in excerptis nondum editis Apofroditi, & Betrubi Rubi architectonis, itemque in Hygini gromatico, nimirum ſic.

DATO LATERE INVENIRE POLYGONVM.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod ſit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, reſidui ſemiſſis erit quæſitus polygonus.

Verbi gratia dato latere 10. ſi velis hexagonum; quadra 10. fit 100. quem ducito in 4. binario minorem multitudine angulorum, fit 400. hinc aufer 20. qui fit ex latere dato 10. in 2. numerum multitudinis angulorum quaternario multatum, relinquitur 380. cuius ſemiſſis 190. eſt hexagonus à latere 10.

DATO POLYGONO INVENIRE LATVS.

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, ſummæ cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, ſummam diuide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæſitum latus.

Vt ſit datus hexagonus 190. hunc ducito in 32. octuplum ipſius 4. binario minoris multitudine angulorum, fit 6080. adde 4. quadratum numeri angulorum quaternario multati, fit 6084. cuius latus 78. cui adde 2. numerum ſcilicet angulorum quaternario multatum, fit 80. quem diuide per duplum ipſius 4. numeri angulorum binario multati, puta per 8. fit quotiens 10. quæſitum latus.

Nos etiam alias multas & faciles regulas ad inueniendum polygonum dato latere trademus in Appendicis libro 1.

Cæterum quamuis vt monuimus ad præcedentem, neque regulæ Diophanti, neque hæ Apofroditi poſſint propriè applicari triangulis, quandoquidem in his omnibus regulis oportet à numero angulorum auferre quaternarium, quod in triangulis propriè fieri nequit. Attamen impropriè & per numeros fictos quos vocant, etiam in triangulis hæ omnes regulæ locum habent, quod exemplis fiet manifeſtum.

Dato enim latere 6. quæratur triangulus per regulam Apofroditi, ſumo quadratum ipſius 6. puta 36. quem duco in numerum angulorum binario multatum, puta in 1. fit 36. Tum ſumo numerum angulorum multatum quaternario, puta − 1. quem duco in datum latus, fit − 6. quem aufero à 36. fit 42. cuius ſemiſſis 21. eſt triangulus à latere 6.

Rurſus dato triangulo 21. quæro eius latus per regulam Apofroditi. Duco 21. in octuplum

numeri angulorum binario multati, puta in 8. fit 168. & quia numerus angulorum multatus quaternario, eſt − 1. cuius quadratus eſt + 1. addo 1. ad 168. fit quadratus 169. cuius latus 13. cui addo numerum angulorum quaternario multatum, puta − 1. fit 12. quem diuido per duplum numeri angulorum binario multati puta per 2. fit quæſitum latus 6. eadem que ratio eſt de regulis à Diophanto traditis.

OBSERVATIO D. P. F.

Propoſitionem pulcherrimam & mirabilem quam nos inuenimus hoc in loco ſine demonſtratione apponemus. In progreſſione naturali quæ ab vnitate ſumit exordium, quilibet numerus in proximè maiorem facit duplum ſui trianguli, in triangulum proximè maioris facit triplum ſuæ pyramidis, in pyramidem proximè maioris facit quadruplum ſui triangulotrianguli, & ſic vniformi & generali in infinitum methodo. Nec exiſtimo pulchrius aut generalius in numeris poſſe dari theorema cuius demonſtrationem margini inſerere nec vacat, nec licet.

PROPOSITIO DECIMA.

Δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρεῖν ποσαχῶς δύναται εἶναι πολύγωνος. ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ αβ. πλῆθος δὲ αὐτοῦ γωνιῶν ὁ βγ. καὶ κείσθω ἐν τῷ βγ. δυὰς μὲν ὁ γδ. τετρὰς δὲ ὁ γε. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ. ὢν πολύγωνος ἔχει γωνίας τοσαύτας ὅσος ἐστὶν ὁ βγ. ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ βε. τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω αὐτοῦ πλευρὰ ὁ ζη. ὥστε
β. huius. ὁ ἀπὸ τοῦ ζη τετράγωνος ἴσος τῷ τε ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. καὶ τῷ ἀπὸ βε. τετραγώνῳ. κείσθω ἐν τῷ αβ. μονὰς ὁ αθ. καὶ διῄρηται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. καὶ τῆς βδ. καὶ κείσθω συναμφοτέρῳ αβ. θβ. ἴσος ὁ δκ. καὶ μεταθησόμεθα τὸν μὲν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. καὶ τοῦ βδ. εἰς τὸν ὑπὸ κδβ. τὸν δὲ τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. εἰς τὸν δὶς ὑπὸ βδ. δε, δυὰς γάρ ἐστιν ὁ εδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη. ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ δὶς ὑπὸ βδ. δε. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ βδε καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἴσοι οἱ ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετράγωνοι καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ τε ὑπὸ κδβ. καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετραγώνοις. τῷ δὲ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δβ. ἴσον τὸ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη. ἄρα ἴσος τῷ τε ὑπὸ κβδ. καὶ τῷ ἀπὸ δε. τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. ἴσος ὢν τετράκις συναμφοτέρῳ τῷ αβ. βθ. μείζων ἐστὶ τετράκις τοῦ αθ. τουτέστι τετράδος, ὧν ὁ βγ. ἐστὶ δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ γκ. μείζων δυάδος τῆς γδ. ἡ ἄρα διχοτομία τοῦ δκ πεσεῖται μεταξὺ

α.θ——β——ε..δ..γ——κ

ζ——η

Dato numero inuenire quot modis multangulus eſſe poſſit. Eſto datus numerus A B. & multitudo angulorum eius B G. & ſumatur in ipſo B G. binarius G D. & quaternarius G E. & quoniam A B. multangulus exiſtens, tot habet angulos quot ſunt in B G. vnitates, qui fit octies ex A B. in B D. adſcito quadrato ex B E. * quadratum facit. Eſto eius latus Z H. igitur quadratus ex Z H. æqualis eſt numero qui fit octies ex A B. in B D. & quadrato ipſius B E. ſumatur in A B. vnitas A T. Itaque qui fit octies ex A B. in BD. diuiditur in eum qui fit quater ex A T. in B D. & in eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in B D. ſumatur ergo DK. æqualis quadruplo vtriuſque AB. TB. & transferamus eum qui fit quater ex vtroque A B. T B. in B D. in eum qui fit ex K D. in B D. loco autem illius qui fit quater ex A T. in B D. ſumamus eum qui fit bis ex B D. in D E. (etenim D E. eſt binarius) igitur quadratus ipſius Z H. æqualis erit producto ex K D. in D B. & ei qui fit bis ex B D. in D E. vna cum quadrato ex BE. atqui duplo producti ex BD. in D E. vna cum quadrato ex B E. æquales ſunt quadrati ex BD. D E. ergo & quadratus ex Z H. æqualis erit producto ex KD. in D B. & quadratis ipſorum B D. D E. at producto ex K D in D B. vna cum quadrato ex DB. æqualis eſt qui fit ex KB. in BD. igitur & quadratus ex ZH. æqualis

A.T——B——E..D..G——K ,

Z——H

igitur

A.T—B—E..D..G—L—K
Z—H—N—M

erit producto ex K B. in B D. & quadrato ex D E. & quoniam D K. æqualis exiſtens quadruplo vtriuſque A B. B T. maior eſt quadruplo ipſius A T. hoc eſt quaternario, & quaternarij ſemiſſis eſt binarius D G. reliquus vtique G K. maior erit binario G D. igitur ſi diuidatur D K. bifariam in L. cadet L. inter G. & K. itaque loco quadrati ex L B. ſumamus quadratum ex L D. cum producto ex K B. in B D. quandoquidem D K. ſecatur bifariam in L. & additur ei D B. ideoque producto ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquatur quadratus ex L B. igitur quadratus ex L B. ſuperat quadratum ex L D. producto ex K B. in B D. quocirca quadratus ex Z H. æqualis eſt interuallo quadratorum B L. L D. & quadrato D E. addatur vtrimque quadratus D L. igitur quadrati Z H. D L. æquales ſunt quadratis B L. D E. cùm autem duo numeri ſimul, duobus ſimul æquales ſunt, ſunt & permutando æqualia eorum interualla. igitur interuallum quadratorum L D. D E. æquale eſt interuallo quadratorum L B. Z H. & quoniam E D. æqualis eſt D G. & additur illis G L. productus vtique ex E L. in L G. cum quadrato G D. æquatur quadrato D L. quamobrem interuallum quadratorum L D. D G. ſeu quadratorum L D. D E. quod eſt productus ex E L. in L G. æquale eſt interuallo quadratorum L B. Z H. ponatur ipſi B L. æqualis Z M. nam B L. maior eſt quam Z H. quoniam quadrati Z H. D L. oſtenſi ſunt æquales quadratis B L. E D. cæterum quadratus D L. maior eſt quadrato D E. (quandoquidem maior eſt quadrato D G.) idcirco & quadratus B L. maior eſt quadrato Z H. ponatur ergo ipſi B L. æqualis Z M. erit igitur interuallum quadratorum Z M. Z H. æquale producto ex E L. in L G. & quoniam D K. quadruplus eſt vtriuſque A B. B T. at D K. bifariam ſecatur in L. erit vtique D L. duplus vtriuſque A B. B T. atqui D G. duplus eſt vnitatis A T. ergo reliquus G L. duplus eſt duorum B T. igitur G L. quadruplus eſt ipſius B T. & B T. eſt quarta pars ipſius G L. ſed & A T. vnitas eſt quarta pars quaternarii E G ergo totus A B. totius E L. quarta pars eſt, ſed & T B. oſtenſus eſt eſſe quarta pars ipſius L G. igitur productus ex A B. in B T. eſt ſextadecima pars producti ex E L. in L G. productus ergo ex E L. in

α. θ — β — ε. δ. γ — λ — κ
ζ — η — ν — μ

τοῦ ϛκ. ἴσον τὸ λ. καὶ μεταβησόμεθα τὸ ἀπὸ βλ. εἴς τε ἀπὸ λδ. καὶ τὸν ὑπὸ κβδ. ἐπείπερ ἡ δκ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ λ. πρόσκειται δὲ ἡ δβ. καὶ ἔστι τοῦτο ὑπὸ κβδ. καὶ τοῦ ἀπὸ λδ. ἴσος τῷ ἀπὸ λβ. καὶ τὸ ἀπὸ λκ ἄρα τοῦ ἀπὸ λδ. ὑπερέχει τῷ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῇ τῶν ἀπὸ τῶν βλ. λδ. ὑπεροχῇ καὶ τῷ ἀπὸ δε τετραγώνῳ. κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ δλ. καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ζη. δλ. ἄρα ἴσοι τετράγωνοι εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βλ. δε τετραγώνοις. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ δυσὶν ἀριθμοῖς ἴσοι ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν μόναι, ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ. δε ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῶν λβ. ζη. ὑπεροχῇ. καὶ ἐπεὶ ὁ εδ. τῷ δγ. ἴσος, πρόσκειται δὲ ὁ γλ. τὸ ἄρα ὑπὸ ελγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ. ἴσον τῷ ἀπὸ δλ. ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ. δγ. ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τῶν λδ. δε. ἥτις ἐστὶν ὁ ὑπὸ ελγ ἴση τῇ ἀπὸ τῶν λβ. ζη. κείσθω τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. μείζων γάρ ἐστιν ὁ βλ τοῦ ζη. ἐπείπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ζη. δλ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ βλ. εδ τετραγώνοις. λοιπὸν δὲ τὸ ἀπὸ δλ. μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ δε, ἐπείπερ καὶ τοῦ ἀπὸ δγ. μεῖζόν ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ βλ. τοῦ ἀπὸ ζη. μεῖζόν ἐστι. κείσθω οὖν τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. ἔσται δὴ καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ζμ. ζη. ὑπεροχὴ ἴση τῷ ὑπὸ ελ. λγ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. τετραπλάσιον ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὁ δὲ δκ. δίχα τέτμηται κατὰ τὸ λ. καὶ ὁ δλ. ἄρα διπλάσιον ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὧν ὁ δγ. διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αθ. λοιπὸς ἄρα ὁ γλ. διπλάσιον ἐστὶ δύο τῶν βθ. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶν ὁ γλ. τοῦ θβ. ὥστε τέταρτον μέρος ἐστὶν ὁ θβ. τοῦ λγ. ἀλλὰ καὶ ἡ αθ. μονὰς τέταρτόν ἐστι τῆς εγ. τετράδος. ὅλος ἄρα ὁ αβ τέταρτόν ἐστι μέρος τοῦ ελ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ θβ τοῦ λγ. μέρος τέταρτον. τὸ ἄρα ὑπὸ αβ. βθ. ἑκκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ελ. λγ. τὸ ἄρα ὑπὸ ελ. λγ. ἴσον τῷ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αβ. βθ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ελ. λγ. ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ μζ. ζη. ὑπεροχῇ. καὶ τὸ ἑκκαιδεκάκις ἄρα ὑπὸ αβ. βθ. ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ μζ. ζη. ὑπεροχῇ, τουτέστι τῷ τε ἀπὸ μη. καὶ

τοῦ δὶς ὑπὸ ζη. ημ. ὥστε ὁ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αβ. βθ. ἴσος τῷ τε ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ζη. ημ. ὥστε ἄρτιός ἐστι ὁ ημ. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ ν.

L G. æquale eſt producto ex A B. in B T. ſedecies, ſed iam oſtenſum eſt productum ex E L. in L G. æquari interuallo quadratorum M Z. Z H. ergo qui fit ſedecies ex A B. in B T. æquatur interuallo quadratorum M Z. Z H. hoc eſt quadrato M H. & duplo producti ex Z H. in H M. quare qui fit ſedecies ex A B. in B T. æqualis eſt quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. quamobrem H M. par eſt. Secetur biſariam in N.

IN DECIMAM.

Quamuis propoſitionis huius demonſtratio tam in codice regio, quam in vaticano atque etiam in eo quem præ manibus habuit Xilander, ſit imperfecta, & multa deſint, quæ diuinare meum non eſt, cum præterea neque ipſe Diophanti ſcopus mihi ſatis perſpectus ſit, tamen quæcumque reperi, à mendis repurgata perfectæ reſtitui ſanitati, vt ex apta ſyllogiſmorum, atque adeo verborum omnium connexione æſtimabit prudens lector. ſi quæ ſunt autem quæ prima fronte obſcuriora videantur, ea ſequenti adnotatione fient perſpicua.

Primo quod ait Diophantus duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquari qua-
3 ſecundi. dratis ex B D. D E. ſic probatur. Duplum producti ex B D. in D E [3] æquatur duplo producti ex B E. in E D. & duplo quadrati E D. quare addendo vtrimque quadratum ex B E. erit duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquale duplo producti ex B E. in E D. quadrato ex B E. ſemel,
4. ſecundi. & quadrato ex E D. bis, ſed quadratis ipſorum B E. E D. cum duplo producti ex B E. in E D. [4] æquatur quadratus totius B D. igitur duplo producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquantur quadrati ex B D. D E. quod erat demonſtrandum.

A. T——B——E.. D.. G——L——K

Z——H——N——M

Secundo quod ait productum ex K D. in D B. cum quadrato ex D B. æquari producto ex K B. in B D. patet per tertiam 2. Euclidis.

Tertio, quod ait ſecto D K. biſariam in L. & addendo ei B D. productum ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquari quadrato totius L B. patet per 6. 2. Euclidis.

Quartò, quod ait ex eo quod quadrati Z H. D L. æquales ſunt quadratis B L. D E. ſequi quadratorum D L. D E. idem eſſe interuallum, quod & quadratorum B L. Z H. id ſic infertur, quia qua-
4. primi poriſm. drati D L. Z H. æquales ſunt quadratis B L. D E. [4] ſunt in arithmetica proportionalitate quadrati
7. primi poriſm. D L. B L. D E. Z H. quare & permutando [7] ſunt arithmeticè proportionales quadrati D L. D E. B L. Z H. quod eſt propoſitum.

Quintò, quod ait ſecto E G. biſariam in D. & addendo illi G L. productum ex E L. in G L. cum quadrato G D. æquari quadrato D L. nil aliud eſt quàm 6. 2. Euclidis.

Sextò, quod ait B L. maiorem eſſe quàm Z H. ita probatur, quoniam quadrati D L. Z H. oſtenſi
4. primi poriſm. ſunt æquales quadratis B L. D E. [4] eſt in arithmetica proportionalitate quadratus D L. ad quadratum D E. ſicut quadratus B L. ad quadratum Z H. ſed quadratus D L. maior eſt quadrato D E. quia D L. maior eſt quam D E. cum contineat D G. æqualem ipſi E D. & præterea G L. igitur & quadratus B L. maior eſt quadrato Z H. ac proinde B L. maior eſt quàm Z H. quod erat demonſtrandum.

Denique quod ait, ex eo quod productus ſedecies ex A B. in B T. æquatur quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. hinc ſequi ipſum H M. eſſe numerum parem, ſic probatur. Productum ſedecies ex A B. in B T. binarius metitur, quandoquidem binarius metitur numerum 16. qui metitur eundem productum, ſed & idem binarius metitur duplum producti ex Z H. in H M. vt euidens eſt. ergo idem binarius metitur reliquum quadratum H M. ac proinde quadratus H M. par eſt, ac per conſequens & ipſe H M. par eſt. quod erat intentum.

Hæc ad librum Diophanti de numeris polygonis adnotaſſe ſufficiat. Quoniam vero hic liber mutilus eſt, & alia multa ſcitu digna tum theoremata, tum problemata excogitari poſſunt de numeris polygonis, præſertim de eorum progreſſione, viſum eſt ea duobus ſequentibus libris perſequi, quos idcirco titulo Appendicis ad librum de numeris polygonis inſignire voluimus. Sed & prætereà, ad calcem libri primi, pulcherrimi corollarij loco, Problematis huius Diophantæi enodationem feliciter, vt ſpero, apponemus.

ΤΕΛΟΣ.

CLAVDII GASPARIS
BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.
LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

IN progreſſione arithmetica, quilibet terminorum poſt minimum, continet minimum ſemel, & differentiam toties, quotus quiſque eſt à minimo; nimirum primus a minimo ſemel; ſecundus bis; tertius ter & ita deinceps.

E. 2. F. 4. G. 6.
A. 3. B. 5. C. 7. D 9.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit differentia E. cuius duplum F. & triplum G. & ſic deinceps, dico B. continere A. & F. atque etiam D. continere A. & G. & euidens eſt ex ſola definitione progreſſionis arithmeticæ. Aliter per 3. Diophanti D. continet A. ſemel; & differentiam E. ſecundum numerum terminorum vnitate multatum id eſt ter, & eadem de cauſa C. continet A. ſemel, & E. bis, & rurſus B. continet A. & E. ſemel eademque ratio ſi plures exponantur numeri. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In progreſſione arithmetica, ſi differentia ducatur in triangulum numeri terminorum, vnitate multati, & producto addatur quod fit ex numero terminorum in minus extremum, fiet ſumma terminorum omnium.

E. 2.
A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Sint A B C D. in progreſſione arithmetica, cuius differentia E. dico ſi triangulum lateris vnitate minoris numero terminorum ducatur in E. & producto addatur quod fit ex ipſo numero terminorum in A. fieri ſummam omnium A B C D. nam per præced. A. continetur ſemel in quolibet ipſorum A B C D. & præterea B. continet E. ſemel; C. bis continet eundem E. & D. continet ter eundem E. & ſic deinceps. Quare patet E. contineri in ipſis B C D. ſecundum vnitates trianguli cuius latus eſt numerus ipſorum B C D. minor ſcilicet vnitate quàm numerus omnium A B C D. quare patet propoſitum.

PROPOSITIO TERTIA.

Dato latere polygoni, ſi numerus angulorum binario multatus ducatur in datum latus vnitate multatum, & qui producitur, binario auctus ducatur in datum latus, fiet duplum polygoni.

H. 3. G. 4. F. 5.
A. 1. B. 4. C. 7 D. 10. E 13.
K. 12. L. 14. M. 70.

Sit F. datum latus polygoni, vnde ablata vnitate ſuperſit G. & ſit H. numerus angulorum binario multatus, quo ducto in G. fiat K. qui auctus binario faciat L. quo ducto in F. fiat M. dico M. eſſe duplum polygoni à latere F. exponantur termini A B C D E. in progreſſione arithmetica conſtitutiua polygoni à latere F. erit ergo ſumma omnium A B C D E. æqualis polygono illi, & erit A. vnitas, H. differentia, numerus terminorum ipſe F. vt conſtat ex demonſtratis à Diophanto. Quoniam igitur interuallum extremorum A E. per tertiam Diophanti æquatur producto ex H. in G. nempe ipſi K. & addendo interuallum numerorum duorum, duplo minoris, fit ſumma ipſorum; patet addito binario qui duplus eſt ipſius A. ad K. aggregatum L. æquari ſummæ ipſorum A E. Quamobrem qui fiet ex numero terminorum F. in ſummam extremorum L. nimirum M. æquatur duplo ſummæ omnium per quartam Diophanti, ſeu duplo polygoni à latere F. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVARTA.

Si latus polygoni ducatur in ſeipſum vnitate multatum & productum ducatur in numerum angulorum binario multatum, fiet numerus qui adſcito duplo lateris, æquabitur duplo polygoni.

A. 5. B. 4. C. 3.
D. 70. E. 60. F. 20.
G. 70. H. 14. K. 12.

Sit A. latus polygoni & B. vnitate minor, & C. numerus angulorum binario multatus ductoque A. in B. fiat F. quo ducto in C. fiat E. & ad ipſum E. addendo duplum lateris A. fiat D. dico D. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in C. fiat K. cui addito binario fiat H. quo ducto in A. fiat G. eritque G. per præced. duplum polygoni à latere A. quare probandum ipſos D G. eſſe æquales. Quoniam igitur idem B. ductus in A. & in C. producit F. & K. erit vt A. ad C. ſic F. ad K. quare ex A. in K. fiet idem E. qui fit ex C. in F. cum itaque H. contineat K. & binarium, productus ex A. in H. nempe G. æquatur productis ex A. in K. nempe ipſi E. & ex A. in binarium, nempe duplo ipſius A. At eidem E. & duplo A. æquatur D. ex hypotheſi. ergo D G. ſunt æquales, & ideo D. eſt duplus polygoni à latere A. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVINTA.

Si quadratus dati lateris ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur quod fit ex dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, reſiduum eſt duplum polygoni à dato latere.

K. 42. L. 210. M. 14. N. 224.
A. 7. B. 6. C. 5. D. 3.
E. 49. F. 245. G. 21. H. 224.

Sit A. datum latus, & B. vnitate minor, & ſit C. numerus angulorum binario multatus, & D. idem numerus angulorum multatus quaternario, ſeu numerus binario minor ipſo C. & ſit E. quadratus ipſius A. quo ducto in C. fiat F. vnde auferendo G. qui fit ex D. in A. ſuperſit H. dico H. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in A. fiat K. quo ducto in C. fiat L. cui addendo M. duplum ipſius A. fiat N. conſtat ex præced. ipſum N. eſſe duplum polygoni à latere A. Probandum ergo N. H. æquales eſſe. Quoniam itaque A. excedit B. vnitate qui fit ex A. in A. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex A. in B. nempe ipſi K. & ex A. in vnitatem, nempe ipſi A. cum ergo K A. æquentur E. qui fit ex C. in E. nempe F. æquatur iis qui fiunt ex C. in K. nempe L. & ex C. in A, ſed quoniam C. ſuperat D. binario, productus ex C. in A. æquatur G. producto ex D. in A. & duplo ipſius A. nempe ipſi M. igitur F. æquatur tribus numeris L. M. G. Quamobrem auferendo vtrimque eundem G. remanent æquales hinc quidem H. inde vero L M. ſeu illis æqualis N. Quare cum N. oſtenſus ſit duplus polygoni à latere A. erit & H. eiuſdem polygoni duplus. Quod demonſtrandum erat

SCHOLIVM.

Hæc eſt demonſtratio regulæ quam tradunt Hyginus & Apofroditus, ad inueniendum polygonum dato latere, de qua ſupra ad nonam Diophanti.

PROPOSITIO SEXTA.

Dato latere polygoni, ſi triangulus à dato latere vnitate multato ducatur in numerum angulorum binario multatum, fit numerus qui adſcito dato latere æquatur ipſi polygono.

G. 42. H. 210.
A. 7. B. 6. C. 5.
D. 21. E. 105. F. 112.

Sit datum latus A. & numerus vnitate minor B. & ſit C. numerus angulorum binario multatus, triangulus autem à latere B. eſto D. quo ducto in C. fiat. E. cui addendo datum latus A. fiat F. dico F. eſſe polygonum à latere A. etenim ducatur B. in A. & fiat G. quo ducto in C. fiat H. Tunc patet per octauam Diophanti ipſum G. eſſe duplum trianguli à latere B. nempe ipſius D. quare cùm ex eodem C. in ipſos G D. fiant H E. erit & H. duplus ipſius E. Itaque cùm ad H. addetur duplum ipſius A. & ad E. addetur A. vnde fit F. erit H. cum duplo A. duplus ipſius F. Atqui H. cum duplo A. eſt duplus polygoni à latere A. per quartam huius. Ergo F. eſt huiuſmodi polygonus. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Si quilibet polygonus adſciſcat ſuum latus ſecundum numerum angulorum binario multatum, & præterea vnitatem, fiet polygonus ſimilis proximè maior.

F. 51. E. 16. D. 35.
B. 6. A. 5. C. 3.
G. 1. H. 4. K. 7. L. 10. M. 13. N. 16.

Eſto polygonus D. cuius latus A. cui addita vnitate fiat B. & ſit numerus angulorum binario multatus C. Et productus ex A. in C. vnitate auctus eſto E. additiſque ſimul E D. fiat F. dico F. eſſe polygonum proximè maiorem ipſo D. ſeu à latere B. Etenim exponatur progreſſio arithmetica conſtitutiua huiuſmodi polygonorum, & ſumantur in ea tot termini G. H. K. L. M. N. quot ſunt in B. vnitates. Igitur per octauam Diophanti differentia progreſſionis eſt C. & ſumma omnium eſt polygonus à latere B. At ſumma ipſorum G. H. K. L. M. eſt polygonus D. Polygonus ergo à latere B. excedit ipſum D. numero N. Atqui per tertiam Diophãti N. continet vnitatem G. & productum ex differentia C. in A. vnitate minorem numero terminorum, & productus ex C. in A. vnitate auctus eſt E. Igitur E. æquatur ipſi N. cum ergo vt oſtenſum eſt compoſitus ex N D. æquetur polygono à latere B. vtique compoſitus ex E D. nempe F. erit huiuſmodi polygonus quod erat propoſitum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Si triangulus collateralis polygono ducatur in numerum angulorum binario multatum, & a producto auferatur, quod fit ex latere polygoni in numerum angulorum ternario multatum, reſiduum æquabitur ipſi polygono.

Eſto polygonus K. cuius latus A. & numerus angulorum binario multatus B. vnde ablata vnitate ſuperſit C. ternario minor numero angulorum, ſitque D. triangulus à latere A. quo ducto in B. fiat

D. 15. E. 45. F. 10.
A. 5. B. 3. C. 2.
G. 10. H. 30. K. 35.

E. ductoque C. in A. fiat F. dico ſi F. auferatur ex E. relinqui polygonum K. etenim ſumatur G. triangulus à latere vnitate minore ipſo A. ductoque B. in G. fiat H. vnde per ſextam huius additis ſimul A. & H. fiet K. Quia igitur per præced. ſi ad G. addatur vnitas, & ſuum latus fiet D. vnitas autem & latus ipſius G. æquantur A. erit D. æqualis duobus A G. ſimul. quamobrem qui fit ex B. in D nempe E. æquatur iis qui fiunt ex B. in A. & ex B. in G. qui eſt H. Productus autem ex B. in A. (quandoquidem B. ſuperat vnitate ipſum C.) æquatur producto ex C. in A. nempe F. & præterea ipſi A. Igitur E. æquatur tribus numeris H. A. F. vnde auferendo vtrimque eundem F. remanet ſummã duorum A. H. nempe polygonus K. æqualis ei qui reſtat ſi ex E. auferatur F. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex multis harum propoſitionum, ad inueniendum polygonum dato latere collige canones elegantes, & quidem faciliores & compendioſiores eo quem tradit Diophantus propoſitione nona.

I. CANON.

Ducito datum latus vnitate multatum in numerum angulorum binario multatum; & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. conſtat per tertiam huius.

Vt dato latere 7. ſi quæratur eius pentagonus: latus vnitate multatum eſt 6. numerus angulorum binario multatus 3. quo ducto in 6. fit 18. qui binario auctus fit 20. quo ducto in 7. fit 140. cuius ſemiſſis 70. eſt quæſitus pentagonus.

II. CANON.

Ducito datum latus in numerum vnitate minorem, productum ducito in numerum angulorum binario multatum producto adde duplum lateris, fiet duplum polygoni per quartam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 7. in 6. fit 42. quo ducto in 3. fit 126. cui ſi addas duplum 7. nimirum 14. fit vt prius 140. cuius ſemiſſis 70. eſt quæſitus pentagonus.

III. CANON.

Ducito quadratum dati lateris in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit à dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, reſiduum erit duplum polygoni per quintam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 49. in 3. fit 147. hinc aufer productum ex 7. in 1. nempe 7. reſiduum eſt vt prius 140. cuius ſemiſſis 70. eſt quæſitus pentagonus.

IV. CANON.

Sume triangulum à latere dato vnitate multato, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde datum latus, fiet quaſitus polygonus per ſextam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum à latere 6. nempe 21. quo ducto in 3. fit 63. cui ſi addas datum latus 7. fit pentagonus quaſitus 70.

V. CANON

Sume triangulum à dato latere, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit ex latere dato in numerum angulorum multatum ternario, reſiduum erit quaſitus polygonus per octauam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum illius nempe 28. quo ducto in 3. fit 84. vnde aufer quod fit ex 7. in 2. nempe 14. reſiduum 70. eſt quaſitus pentagonus, vide rurſus omnium expeditiſſimum Canonem in ſcholio vndecima.

PROPOSITIO NONA.

Si numerus ſecetur in duas partes, triangulus totius æqualis eſt triangulis partium & plano ſub partibus comprehenſo.

D.....E...F. G
A.....B...C
K 72.

Numerus A C. ſecetur in A B. B C. dico triangulum totius A C. æquari triangulis partium A B. B C. & plano ſub A B. B C. ſumatur D E. æqualis ipſi A B. & ei apponatur E F. æqualis B C. & adiiciatur ei vnitas F G. conſtat ergo D G. ſuperare A C. vnitate, ſicut & E G ſuperat B C. vnitate. Ducto inſuper A C. in D G. fiat K. patet ergo per octauam Diophanti vel tertiam huius, ipſum K. eſſe duplum trianguli à latere A C. quia vero ducere A C. in D G. idem eſt atque ducere ſigillatim AB. in D E. E F. F G. & BC. in D E. E G. erit K. æqualis productis illis omnibus. At ducere A B. in D E. ſibi æqualem & in vnitatem F G. idem eſt atque ducere A B. in numerum vnitate maiorem ſeipſo, vnde fit duplum trianguli ipſius A B. ducere autem A B. in E F. idem eſt atque ducere A B. in B C. igitur patet ex ductu A B. in totum D G. fieri duplum trianguli A B. & planum ſub A B. B C. ſimiliter productus ex B C. in D E. æquatur plano ſub A B. B C. & productus ex B C. in E G. qui vnitate maior eſt, æquatur duplo trianguli ipſius B C. igitur productus ex B C. in totum D G. æquatur duplo trianguli ipſius B C. & plano ſub A B. B C. quamobrem compoſitum ex productis ex A B. in D G. & ex B C. in D G. nempe productus ex A C. in D G. nimirum ipſe K. æqualis eſt duplo triangulorum A B. B C. & duplo plani ſub A B. B C. igitur dimidium ipſius K. nempe triangulus A C. æquatur triangulis A B. B C. & plano ſub A B. B C. quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur duplum cuiuſlibet trianguli adſumpto collaterali quadrato, facere triangulum à latere duplicato; quod euidens eſt ſi A B. B C. ponantur æquales.

PROPOSITIO DECIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & plano ſub partibus comprehenſo, ſumpto ſecundum numerum angulorum binario multatum.

D 3. E 2.
A.....B....C.
F. 15. G. 10. H. 20.
K. 45. L. 30. M. 60.
N. 10. P. 8. Q. 57.
R. 35. S. 22. T. 117.

Sit numerus A C. ſectus in A B. B C. & ſit D. numerus angulorum binario multatus, & E. vnitate minor. dico polygonum totius A C. æquari polygonis ſimilibus partium A B. B C. & producto ex D. in planum ſub A B. B C. comprehenſum. Etenim ſumantur F. & G. trianguli ipſorum A B. B C. & ſit H. planus ſub A B. B C. Tum ducto D. in ipſos F. G. H. ſigillatim, fiant K. L. M. & ducto E. qui eſt numerus angulorum ternario multatus in A B. B C. fiant N. P. quibus detractis ab ipſis K L. relinquantur R. S. quorum ſumma Q. qua addita ad M. fiat T. Patet itaque ex ſola conſtructione & per octauam huius numeros R. S. eſſe polygonos ipſorum A B. B C. quorum ſumma Q. addita ad M. (qui fit ex D. in H. planum ſub partibus) fiet vtique T. continens polygonos partium, & planum ſub partibus ſumptum ſecundum

numerum angulorum binario multatum. Reſtat ergo probandum ipſum T. eſſe polygonum ſimilem totius A C. Quoniam ergo F G. ſunt trianguli partium A B. B C. & H. planus ſub partibus erit aggregatum ipſorum F. G. H. æquale triangulo totius A C. per præced. Quare cùm ex D. in ipſos F. G. H. fiant K. L. M. erit aggregatum ipſorum K. L. M æquale producto ex D. in triangulum ipſius A C. Quare cum etiam N. P. æquentur producto ex E. in A C, & us ſublatis de aggregato ipſorum K. L. M. ſuperſint R. S. M. ſeu T. patet T. eſſe id quod reſtat ſi productus ex E. in A C. auferatur à producto ex D. in triangulum eiuſdem A C. ergo T. eſt polygonus ipſius A C. per octauam huius. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Quod peculiariter de triangulis oſtenſum eſt in præcedenti, & ab Euclide de quadratis quarta ſecundi. Hic vniuerſaliter oſtenditur de omnibus polygonis, vt merito inter pulcherrimas propoſitiones hæc cenſeri debeat quam primus omnium (quod ſciam) ego demonſtraui.

Et quemadmodum quartam ſecundi extendimus ad ſectionem numeri in quotlibet partes. Sic & iſtam vniuerſalius proponemus, hoc ſcilicet modo.

Si numerus ſecetur in quotlibet partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & productis ex qualibet parte in quamlibet aliam toties ſumptis quot ſunt vnitates in numero angulorum binario multato.

K. 3.
A....B...C..D

Eſto enim A D. ſectus in quotlibet partes A B. B C. C D. & ſit K. numerus angulorum binario multatus. Dico polygonum totius A D. æquari polygonis ſingulorum A B. B C. C D. & productis ex qualibet parte in quamlibet ſumptis ſecundum K. conſideretur prius A D. vt ſectus in duas partes A C. C D. Tunc per hanc propoſitionem decimam polygonus totius æquatur polygonis ipſorum A C. C D. & producto ex A C. in C D. ducto in K. ſimiliter polygonus A C. æquatur polygonis ipſorum A B. B C. & producto ex A B. in B C. ducto in K. Quare cum & productus ex A C. in C D. ductus in K. æquetur productis ex A B. & B C. in C D. ductis in K. patet polygonum totius æquari polygonis partium A B. B C. C D. & productis ex qualibet in quamlibet ductis in K. quod ſi ponatur numerus diuiſus in quatuor partes, ſimile concludetur per id quod de diuiſione in tres oſtenſum eſt, & ſic in infinitum. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Quilibet polygonus componitur ex tot triangulis, quot vnitates continet numerus angulorum binario multatus. Ex his autem vnus eſt collateralis ipſi polygono, reliqui vero à latere proximè minori.

A. 51.
D. 3. B. 6. C 5.

Eſto quiliber polygonus A. cuius latus B. quod vnitate multatum ſit C. & numerus angulorum binario multatus eſto D. dico polygonum A. componi ex tot triangulis quot ſunt in D. vnitates, quorum vnus eſt ab ipſo latere B. reliqui à latere C. Etenim per ſextam huius polygonus A. æquatur producto ex D. in triangulum abs C. adſcito latere B. ſed ſi vni triangulorum abs C. concipiatur addi B. fiet triangulum ab ipſo B. per ſeptimam huius (quia B. continet C. & præterea vnitatem) Patet ergo polygonum A. componi ex tot triangulis quot ſunt in D. vnitates quorum vnus eſt à latere B. reliqui à latere C. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc etiam elicietur Canon ad inueniendum polygonum dato latere. Nam ſi quæratur pentagonum à latere 6. quia numerus angulorum binario multatus eſt 3. conſtat quæſitum pentagonum compoui ex tribus triangulis quorum vnus eſt à latere 6. reliqui duo à latere 5. ſi ergo ſumas huiuſmodi triangulos 21. 15. 15. horum ſumma erit 51. quæſitus pentagonus. Quia vero ſi datum latus ducatur in ſeipſum vnitate auctum fit duplum trianguli à dato latere, & ſi idem latus ducatur in ſeipſum vnitate multatum, fit duplum trianguli proximè minoris, formari poterit Canon omnium elegantiſſimus & expeditiſſimus.

CANON.

Dato lateri vnitate aucto adde ipſummet latus vnitate multatum toties, quot ſunt vnitates in numero angulorum multato ternario, ſummam ducito in datum latus, fiet duplum quæſiti polygoni.

Vt ſi quæratur pentagonum à latere 6. adde ad 7. duplum ipſius 5. nempe 10. fiet 17. quo ducto in datum latus 6. fit 102. cuius ſemiſſis 51. eſt quæſitus pentagonus.

ALITER.

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, reſiduum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

Vt in dato exemplo ducito 6. in 3. fit 18. hinc aufer 1. reſtant 17. quæ ducta in 6. faciunt 102. vt prius, cuius ſemiſſis 51. Quoniam vero conuerſum huius propoſitionis vtile eſt ad perficiendum vltimum problema Diophanti vt ſuo loco patebit, operæpretium eſt illud demonſtrare, nimirum.

Si quilibet numerus ducatur in quemlibet triangulum, & producto addatur triangulum proxime maius, totum erit numerus polygonus, collateralis quidem maiori triangulo, ſed tot angulorum duobus amplius, quot ipſe triangulis conſtat.

G. 144. H. 189. K. 189.
A. 36. B. 45. C. 9.
D. 4. E. 5. F. 7.

Eſto A. quilibet triangulus, & proxime maior B. cuius latus C. Tum ſumatur quilibet numerus D. qui vnitate auctus fiat E. & huic addendo binarium fiat F. & ducto D. in A. fiat G. cui addendo B. fiat H. Patet ergo H. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. etenim H. conſtat ex triangulo B. & numero G. qui continet toties triangulum A. quot ſunt vnitates in D. quare cum E. ſuperet D. vnitate, patet H. tot triangulis conſtare quot ſunt vnitates in E. cum igitur F. ſit binario amplior quàm E. dico H. eſſe polygonum à latere quidem C. ſed tot angulorum quot ſunt vnitates in F. etenim ſi non ſit, ſumatur talis polygonus K. facile eſt oſtendere K. æquari ipſi H. Quia enim K. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. ſequitur per hanc vndecimam propoſitionem ipſum K. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. quorum vnum collaterale eſt ipſi K. hoc eſt æquale ipſi B. reliqua æqualia ſunt ipſi A. ſed & H. iiſdem prorſus triangulis conſtat ex conſtructione. Igitur K. eſt æqualis ipſi H. ac proinde H. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Si quotlibet polygoni collaterales ordinate diſponantur, ij cum ſuo communi latere conſtituent progreſſionem arithmeticam, cuius differentia erit triangulus ab eodem latere vnitate multato.

H. 1. K. 2. L. 3. M. 4.
A. 7. B. 28. C. 49. D. 70. E. 91.
F. 6. G. 21.

Sit A. datum latus cuius triangulus B. quadratus C. pentagonus D. hexagonus E. & ſic deinceps. ſitque F. minor vnitate quam A. cuius triangulus G. dico ipſos A B C D E. conſtituere progreſſionem arithmeticam cuius differentia eſt G. etenim cum numeri angulorum ipſorum B C D E. ſint numeri 3. 4. 5. 6. & ſic deinceps per additionem vnitatis creſcentes, ſi ſumantur H K L M. numeri angulorum binario multati erunt hi 1. 2. 3. 4. qui etiam per additionem vnitatis creſcent. Itaque quoniam per 7. huius, G. adſciſcens A. maiorem vnitate quam ſuum latus F. facit triangulum B. patet G. eſſe differentiam duorum A B. Rurſus quia per præced. ſinguli C D E. continent tot triangulos quot ſunt vnitates ſingulis K. M. quorum vnus eſt B. reliqui omnes æquales ipſi G. patet C. continere B. & ipſum G. ſemel, at D. continere B. & inſuper G. bis, atque etiam E. continere B. & ipſum præterea G. ter, & ſic in infinitum quilibet altior polygonus continet B. & adhuc ipſum G. ſemel amplius quam antecedens polygonus. Conſtat igitur per primam huius G. eſſe differentiam per quam progrediuntur ipſi A B C D E. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc elicitur Canon ad inueniendam ſummam quotlibet polygonorum collateralium ordinate diſpoſitorum dato latere, vt ſi quæratur ſumma quadrati, pentagoni, hexagoni, heptagoni & octogoni à latere 4.

CANON.

Ducito triangulum lateris vnitate multati in numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum, producto adde duplum minimi polygoni, ſummam ducito in numerum multitudinis polygonorum, fiet duplum quæſitæ ſummæ.

Vt in exemplo propoſito triangulum lateris vnitate multati eſt 6. quo ducto in 4. numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum fit 24. duplum autem minimi polygoni, nempè quadrati à latere 4. eſt 32. qui cum 24. facit 56. quo ducto in 5. numerum multitudinis polygonorum fit 280. cuius ſemiſſis 140. eſt ſumma quæſita.

PROPOSITIO

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In progreſſione numerorum ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ab vnitate, polygonus maximi, æquatur maximo terminorum, & ſummæ reliquorum ſumptæ ſecundum numerum angulorum binario multatum.

H 3. G 51.
A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 6.

Hæc facile per 6. concluditur, cum qua idem ferè eſt mutatis verbis. Sint A B C D E F. quotlibet numeri ſecundum ſeriem naturalem numerorum ab vnitate diſpoſiti, & maximi F. polygonus eſto G. & numerus angulorum binario multatus ſit H. dico G. æquari ipſi F. & ſummæ reliquorum A B C. D. E. ſumptæ ſecundum H. Quia enim ſumma ipſorum A B C D E. eſt triangulus à latere E. vnitate minore ipſo F. patet per 6. productum ex H. in illum triangulum adſcito F. æquari ipſi G. vnde patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In progreſſione numerorum ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum, aggregatum ſimilium polygonorum à ſingulis, æquatur productis ex ſic diſpoſitis numeris in totidem numeros progreſſionis huiuſmodi polygonorum conſtitutiuæ, ſi videlicet maximus vnius ordinis ducatur in minimum alterius ordinis. Tum primus à maximo ducatur in primum à minimo, & ſecundus à maximo in ſecundum à minimo, & ita deinceps.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1 R 3. S 3. T 3. M 1. N. 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

Sint A B C D. ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti & ſumma polygonorum à ſingulis eſto V. tum ſumantur totidem termini in progreſſione huiuſmodi polygonorum conſtituetiua, ordine inuerſo diſpoſiti E F G H. ductiſque A in H. B in G. C in F. D in E. ſit productorum ſumma X. dico VX. eſſe æquales, ſit enim L. differentia progreſſionis conſtitutiuæ, ſeu numerus angulorum binario multatus: patet per primam huius F. continere vnitatem E. & L. ſemel; G. continere vnitatem ſemel, & L. bis; H. continere vnitatem ſemel, & L. ter. Diuidantur ergo numeri H. G. F. in partes ex quibus componuntur, nimirum F. in vnitatem K. & in L. Ipſe autem G. in vnitatem M. & in N. P. æquales ipſi L. Denique ipſe H. reſoluatur in vnitatem Q. & in R. S. T. æquales ipſi L. Patet numeros qui fiunt ex A. in H. ex B. in G. ex C. in F. ex D. in E. ſimul iunctos, nempe X. æquari omnibus qui fiunt ex A in Q R. S. T. ex B. in M N P. & ex C. in K L. & ex D. in E. Quia igitur ex E in D. fit ipſe D. (quia E eſt vnitas) At ducere L. in C. P. in B. & T. in A. idem eſt ac ducere L. in ſummam omnium A B C. productus autem ex L. in ſummam omnium A B C. adſcito D. facit polygonum ipſius D. per præcedentem. Patet productos ex E. in D. ex L. in C. ex P. in B. & ex T. in A. æquari polygono ipſius D. ſimili prorſus argumento oſtendemus productos ex K. in C. ex N. in B. & ex S. in A. æquari polygono ipſius C. & rurſus productos ex M. in B. & ex R. in A. æquari polygono ipſius B. & denique conſtat ex Q vnitate in A. vnitatem fieri polygonum ipſius A. Igitur euidens eſt omnia illa producta ſeu numerum X. æquari polygonis à ſingulis A B C D. ſeu numero V. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, aggregatum productorum ex numero angulorum binario multato in primum à maximo ſemel; in ſecundum bis; in tertium ter, & ſic deinceps adſcita ſumma numerorum, æquatur aggregato polygonorum à ſingulis.

Repetatur enim præcedens figura. Dico aggregatum productorum ex L. in C. ſemel, in B. bis in A ter & ſic deinceps, adſcita ſumma ipſorum A B C D. æquari V. aggregato polygonorum à ſingulis. Nam ex præcedenti conſtat V. æquari productis ex E. in D. ex K L. in C. ex M N P. in B. & ex Q R S T. in A. Quia vero ſinguli E. K. M. Q. æquantur vnitati producta ex E. in D. ex K. in C. ex M. in B. & ex Q. in A. ſimul æquantur ſummæ ipſorum A B C D. Rurſus quia ſinguli L. N. P. R. S. T. ſunt æquales inter ſe, ducere L. in C. & N P. in B. & R S T. in A. idem eſt atque ducere L. in C. ſemel, & in B. bis & in A. ter. Igitur productis ex L. in C. ſemel in B. bis in A. ter, & ſic deinceps, ſi addatur ſumma omnium A B C D. fit V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P. 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & numerus angulorum binario multatus ducatur in aggregatum triangulorum a ſingulis relicto maximo, & producto addatur triangulus maximi, fiet aggregatum polygonorum à ſingulis.

V 40.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
L. 3.

Sint iidem qui ſupra A B C D. dico ſi L. ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. & producto addatur triangulus ipſius D. fieri V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Nam triangulus C. æquatur ſummæ ipſorum A B C. triangulus B. æquatur ſummæ ipſorum A B. & triangulus A. æquatur ipſi A. ſumere autem A B C. tum A B. tum A. idem eſt atque ſumere C. ſemel, B. bis, A. ter, & ſic deinceps, ergo aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. æquatur ipſi C. ſemel, & B. bis, & A. ter. Quare ducere L. in aggregatum illud triangulorum, idem eſt ac ducere L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter. At productis ex L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter, ſi addatur ſumma omnium A B C D. ſeu triangulus D. fit V. per præced. Igitur ſi & producto ex L. in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. addatur triangulus D. fiet idem V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, adſcita ſumma numerorum, vel adſcito triangulo maximi, æquatur triplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

M. 5. L. 4. K. 3. H. 2. G. 1.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E 5. F. 6.
N. 3.

Sint A B C D E F. numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, dico ſi polygonus maximi F. ducatur in numerum terminorum vnitate auctum & producto addatur ſumma ipſorum A B C D E F. ſeu quod idem eſt triangulus ipſius F. ſummam æquari triplo polygonorum ſimilium à ſingulis. Sit enim N. numerus angulorum binario multatus, & ſuper ipſos A B C D E. diſponantur totidem illis æquales ordine inuerſo G. H. K. L. M. ita vt G. ſit vnitas. H. binarius K. ternarius & ſic deinceps. Tunc patet ambos G E. æquari ipſi F. & ſimiliter ambos A M. ſed & ob medietatem arithmeticam ſumma duorum A E. æqualis eſt ſummæ duorum B D. atque etiam duplo ipſius C. Igitur cùm ambo A E. æquentur ipſi F. & ſumma duorum B D. ſit eadem quæ duorum B L. & eadem quæ duorum D H. & K. ſit æqualis ipſi C. patet ſingulas ſummas binorum M A. L B. K C. H D. G E. æquari ipſi F. Quare ſi harum ſummarum polygoni ſumantur, & præterea polygonus ipſius F. bis, æquabuntur hi omnes polygoni ſimul producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Itaque cum polygonus ſummæ M A. per decimam huius ſit æqualis polygonis ipſorum M. & A. & plano ſub M A. ducto in N. Item polygonus ſummæ L B. ſit æqualis polygonis K. & L. & B. & plano ſub L B. ducto in N. Item polygonus ſummæ K C. ſit æqualis polygonis K. & C. & plano ſub K C. ducto in N. Itemque polygoni ſummarum H D. G E. ſint æquales polygonis ipſorum H. D. G. E. & planis ſub H D. G E. ductis in N. polygoni autem ipſorum G. H. K. L. M. ſint æquales polygonis ipſorum ABCDE. ſi his addatur duplum polygoni F. ſequitur duplum polygonorum à ſingulis A B C D E F. vna cum planis M A. ſub L B. ſub K C. ſub A D. ſub G E. ductis in N. æquari producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Quare ſi adiiciatur vtrimque ſumma omnium A B C D E F. erunt ſummæ vtrimque æquales. Quia vero G. eſt vnitas H. binarius. K. ternarius & ſic deinceps patet productum ex G in E æquari ipſi E. & productum ex H. in D. æquari duplo D. & productum ex K in C. æquari C. ter, & productum ex L. in B. æquari B. quater & productum ex M. in A. æquari A. quinquies & ſic deinceps. Igitur ducere N. in omnia illa producta, idem eſt atque ducere N. in E. ſemel, in D. bis, in C. ter, in B. quater, in A quinquies & ſic deinceps. Quare per 16. huius qui fit ex N. in omnia illa producta, adſcita ſumma ipſorum A B C D E F. æquatur polygonis à ſingulis. Quamobrem qui fit ex polygono F. in numerum terminorum vnitate auctum adſcita ſumma omnium, æquatur triplo polygonorum à ſingulis. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, in idem latus vnitate auctum, æquatur ſextuplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 35. G 70. H 75. K 6. M 210. L 450.

Sint A B C D E. ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & maximi E. polygonus eſto F. cuius duplum G. quo addito ad ipſum E. fiat H. quo ducto in K. vnitate maiorem ipſo E. fiat L. dico L. eſſe ſextuplum ſimilium polygonorum à ſingulis A B C D E. Etenim ex K. in F. fiat M. Patet ergo per preced. ſi ad M. addatur ſumma omnium A B C D E. fieri triplum polygonorum à ſingulis. Quia vero productus ex K. in H. nempe L. æquatur productis ex K. in G. & in E. ex quibus H. componitur. Productus autem ex K. in G. eſt duplus ad M. (quia G. duplus eſt ipſius F.) & productus ex K. in E. eſt duplus ſummæ omnium A B C D E. per 4. Diophanti. ſequitur L. continere duplum ipſius M. & ſummæ omnium A B C D E. id eſt duplum tripli polygonorum à ſingulis. Igitur L. eſt ſextuplum huiuſmodi polygonorum. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex his duab. propoſitionib. elicies canones ad inueniendum ſummam quotlibet polygonorum ſimilium ab vnitate ordinate diſpoſitorum.

CANON. I.

Cape maximum polygonorum quem ducito in ſuum latus vnitate auctum, producto adde triangulum ipſius lateris, ſummæ triens erit aggregatum polygonorum per 17.

Vt ſi quæratur ſumma 5. pentagonorum ab vnitate cape pentagonum ipſius 5. nempe 35. quem ducito in 6. fit 210. cui adde triangulum ipſius 5. nempe 15. fiet 225. cuius triens 75. eſt quæſita ſumma.

CANON II.

Duplo maximi polygoni adde latus illius, ſummam ducito in idem latus vnitate auctum, producti ſextans erit aggregatum polygonorum per 18.

Vt in dato exemplo duplo 35. nempe 70. adde 5. fit 75, quo ducto in 6. fit 450. cuius ſextans 75. eſt quæſita ſumma.

Hæc eadem regula habetur in excerptis nondum editis ex libro Apofroditi & Betrubi Rufi Archi-tectonis, quam tamen à nemine hactenus demonſtratam vidi.

Quoniam vero regulæ generales de polygonis ad triangulos vt pote ſimpliciores applicatæ, ſunt ſimpliciores & faciliores, fiet forte Canon facilior applicando 17. huius ad triangulos & implorando auxilium 16. hac arte.

CANON III.

Cape triangulum maximi lateris vnitate multati, quem ducito in idem latus vnitate auctum, producti cape trientem, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde triangulum maximi lateris, fiet aggregatum polygonorum.

Vt ſi quæratur aggregatum 7. pentagonorum ab vnitate cape 21. triangulum ipſius 6. quem ducito in 8. fit 168. cuius triens 56. quo ducto in 3. fit 168. cui ſi addas 28. fit 196. aggregatum quæſitum.

Quoniam vero in hunc locum reiecimus explicationem vltimæ propoſitionis Diophanti, cuius tractatio mutila eſt apud ipſum, eius promiſſi fide nos exoluamus, non quidem inſiſtentes veſtigijs Diophanti, ſed aliam prorſus amplectentes viam.

PROPOSITIO 19. PROBLEMA I.

Propoſito quolibet numero, inueſtigare quot modis polygonus dici poſſit.

Sit propoſitus numerus 120. Primo quidem conſtat ex definitione Diophanti, eum eſſe polygonum à latere 2. totque angulorum, quot ipſe continet vnitates, & ſic dicetur hecaconticoſigonalis. Deinde inuenietur triangulus eſſe à latere 15. quia eius octuplum vnitate auctum, quadratum 961. efficit, cuius latus 31. vnde ablata vnitate ſupereſt 30. cuius ſemiſſis 15. eſt latus trigoni 120. vt conſtat ex Diophanto.

Denique vt ſciamus an alijs modis idem 120. poſſit eſſe polygonus. Exponantur ab vnitate omnes in infinitum ordinatim numeri, puta 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. & illis ſubiiciantur ab vnitate triangulares omnes ordinate diſpoſiti, puta 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. vt factum vides in appoſita tabella, quæ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	620

poteſt in infinitum extendi. Tum propoſitus numerus 120. diuidatur ſigillatim per numeros triangulos, & obſeruetur, quoties reſiduum ex diuiſione æquale erit lateri proxime maioris trianguli, toties enim numerus 120. polygonus erit, cuius latus erit ipſum reſiduum diuiſionis. At quotiens oſtendet differentiam progreſſionis huiuſmodi polygonorum conſtitutiuæ, ſeu quod idem eſt, idem quotiens binario auctus, numerum angulorum indicabit. Hac arte ſi diuidas 120. per triangulum 3. ita vt reſiduum ſit 3. fiet quotiens 39. indicans 120. eſſe polygonum angulorum 41. ſeu teſſaracontahenagonalem, & reſiduum 3. latus illius denotat, ita ſi inſtituas progreſſionem trium terminorum quorum differentia ſit 39. fient hi 1. 40. 79. & ex his polygoni angulorum 41. formabuntur 1. 41. 120. Rurſus ſi diuidas 120. per triangulum 28. ita vt reſiduum ſit 8. fiet quotiens 4. indicans 120. eſſe hexagonum, at reſiduum 8. radicem illius deſignat. Ita ſi inſtituas progreſſionem octo terminorum quorum differentia ſit 4. erunt hi 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. quorum ſumma vtique eſt 120. Quia vero 120. per nullum alium triangulum diuidi poteſt, ita vt reſiduum ſit æquale lateri proxime maioris trianguli, ideo pronunciamus propoſitum eundem numerum, pluribus alijs modis eſſe non poſſe polygonum quàm quatuor; cùm ſit vt oſtenſum eſt triangulus, hexagonus, teſſaracontahenagonus, & hecatontaicoſigonus. Huius rei demonſtratio facilis eſt, quod vno exemplo fiet manifeſtum. Quia 28. diuidens 120. dat quotientem 4. & reſiduum 8. patet 120. æquari quadruplo ipſius 28. & numero 8. atqui per ſeptimam huius triangulus 28. cum 8 (qui vnitate maior eſt quam latus ipſius) facit triangulum 36. proximè maiorem, igitur iungendo 28. ſemel cum reſiduo 8. ſemel, erit 120. æqualia triangulo 28. ter, & triangulo ſequenti 36. ſemel, quamobrem per demonſtrata in ſcholio 11. huius 120. eſt polygonus collateralis ipſi 36. hoc eſt à latere 8. & habens tot angulos, quot triangulis ipſe conſtat plus duobus hoc eſt 6. quod erat demonſtrandum. Et euidens eſt ſi diuiſio tentata ſit per omnes triangulos, donec deuentum ſit ad æqualem vel maiorem ipſo 120. eundem 120. non poſſe eſſe polygonum aliter quam modis ſic inuentis, etenim quomodocunque dicatur eſſe polygonus, oportebit per 11. huius vt componatur ex tot triangulis quot ipſe angulos habet, minus duobus, quorum vnus erit illi collateralis, alij à latere vnitate minore, quare ſi collateralis triangulus reſoluatur in ſuum latus, & in proxime minorem triangulum, quibus æquatur, iam propoſitus numerus continebit aliquoties minorem triangulum, & præterea latus maioris trianguli ſemel, & ideo propoſitus numerus ex demonſtratis oſtendetur eſſe polygonus vno inuentorum modorum, vel inferetur omnes diuiſiones non eſſe tentatas, Quorum primum negabatur, alterum aſſerebatur, vnde manifeſta ſequitur contradictio, igitur ex omni parte propoſito eſt ſatisfactum.

Aduerte autem compendij gratia, non omnino tentandam eſſe diuiſionem donec peruenias ad triangulum æqualem vel maiorem propoſito numero; ſufficit enim ſi deuenias ad triangulum qui ſemel tantum in propoſito numero contineatur; cùm enim ex huiuſmodi diuiſione quotiens non poſſit eſſe niſi 1. qui auctus binario efficit 3. numerum angulorum trianguli, patet per hanc diuiſionem propoſitum numerum non poſſe eſſe niſi triangulum, ſi forte triangulus per quem fit diuiſio, cum latere ſequentis iunctus, efficiat ipſum ſequentem triangulum. Quare cùm per regulam Diophanti iam expertus ſis an propoſitus numerus ſit triangulus, ſuperfluum erit id amplius inquirere, ſic in data hypotheſi numeri 120. cum perueneris ad triangulum 66. qui ſemel tantum continetur in 120. iam deſiſtere poteris ab examine, cum per id nil amplius tibi poſſit innoteſcere niſi 120. eſſe triangulum, cùm diuides ſcilicet eum per triangulum 105. ſed id iam tibi conſtat.

Rurſus ſi propoſitus numerus ſit par, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem cum latus ſequentis eſt impar, quia enim cuiuſlibet trianguli paris multiplex quilibet eſt par, eo detracto à propoſito numero pari, impoſſibile eſt relinqui imparem vt conſtat ex Euclide. Hac de cauſa propoſito numero 120. fruſtra tentabitur diuiſio per triangulos 10. & 36. quia latera ſequentium, ſunt 5. & 9. impares numeri.

Eadem de cauſa ſi propoſitus numerus ſit impar, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem quando ſequentis latus eſt etiam par. etenim trianguli paris multiplex quilibet, par eſt, quo detracto à numero propoſito impari, impoſſibile eſt reſiduum eſſe par. Itaque in hoc caſu non tentabitur diuiſio per triangulos 6. 28. 66. qui latera ſequentium ſunt 4. 8. 12. numeri pares, & ſic de alijs.

Denique poſſunt & alia compendia obſeruari, quibus iam prouecta diuiſione, antequam penitus abſoluatur, dignoſci poſſit an vtilis ſit futura necne, quæ ſtudioſo lectori indaganda relinquo.

CLAVDII GASPARIS

BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.

LIBER SECVNDVS.

ACTVM eſt ſuperiore libro de progreſſione polygonorum, quorum latera ſecundum ſeriem naturalem numerorum ab vnitate diſpoſita ſunt. Hoc vero agemus de illorum progreſſione quorum latera reperiuntur in qualibet medietate arithmetica continua, cuius differentia æquatur minimo termino. Et primum quidem inſignes aliquot huius medietatis proprietates perſequemur. Deinde peculiares de quadratorum progreſſione trademus regulas, tum generales de omnibus polygonis, demum ſingularia quædam de cubis deque eorum progreſſione proferemus.

PROPOSITIO PRIMA.

In medietate arithmetica, in qua differentia minimo termino eſt æqualis, productus ex numero terminorum in minimum, æquatur maximo.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 2. F 4.

Sint in medietate arithmetica A B C D. & differentia progreſſionis ſit E. æqualis ipſi A. & ſit F. numerus terminorum, dico productum ex A. in F. æquari maximo D. etenim [1] B. continet A ſemel & differentiam E. ſemel, at C. continet A. ſemel & differentiam E bis, ac denique D. continet A ſemel & differentiam E ter, & ſic deinceps. Quare cùm E. ſit æqualis ipſi A. patet B. continere A. bis, C. ter, D. quater, & ſic deinceps quilibet ſequentium continet minimum toties quot ſunt à minimo vſque ad ipſum incluſiuè numeri terminorum, quamobrem D. continet A. ſecundum vnitates ipſius E. ac proinde ducto A. in F. producitur D. quod demonſtrandum erat. 1. 1. appen.

COROLLARIVM.

Hinc patet ſecundum à minimo continere minimum bis, tertium ter, quartum quater, & ſic deinceps quotus quiſque eſt in ſerie progreſſionis, toties continet minimum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In hac progreſſione, productus ex numero terminorum vnitate multato in maximum, duplus eſt ſummæ reliquorum.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
G 5. H 4.

Sint in hac progreſſione A B C D E. ſitque G. numerus terminorum & H. vnitate minor, dico productum ex H. in E. duplum eſſe ſummæ reliquorum A B C D. quia enim H. eſt numerus terminorum A B C D. productus ex H. in ſummam extremorum A D. æquatur duplo ſummæ ipſorum A B C D. per quartam Diophanti, at ſumma extremorum A D. æquatur ipſi E. quandoquidem A. æqualis eſt differentiæ. Igitur ex H. in E. ſit duplum ſummæ antecedentium A B C D. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO TERTIA.

In hac progreſſione. Quadratus maximi æquatur producto ex numero terminorum in planum ſub extremis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
K. 20. G. 5.

Sint numeri qui ſuprà, & planus ſub extremis eſto K. dico quadratum maximi E. æquari producto ex G. in K. [1] Etenim ex A. in G. ſit ipſe E. 1. huius.
Quare ſumendo tres numeros A. G. E. [1] idem producetur numerus 3. 1. poriſm.
ducendo A. in E. & productum K. in G. qui fiet ducendo A. in G. & productum E. in E. hoc eſt quadratus ipſius E. Quare patet propoſitum.

COROLLARIVM.

Quadratus maximi æquatur producto ex quolibet extremo, in planum ſub numero terminorum, & altero extremo.

Eadem enim ratione oſtendetur quadratum ex E. æquari producto ex A. in planum ſub G. & B. vel producto ex E. in planum ſub G. & A.

PROPOSITIO QVARTA.

In hac progreſſione, quadratus maximi æquatur producto ex minimo in compoſitum ex maximo & ſumma reliquorum dupla.

L. 50. M. 40.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E 10.
a. huius. G. 5. H. 4.

Sint numeri qui ſuprà, & duplum ſummæ ipſorum A B C D. eſto M. dico quadratum ipſius E. æquari producto ex A. in aggregatum ipſorum M E. ſit enim H. vnitate deficiens à G. & ducto G. in E. fiat L. Quia igitur [a] ex H. in E. fit M. & ex G. in eundem E. fit L. cùm G. H. differant, vnitate patet L. æquari vtrique M. E. ſimul. At ex A. in L. fit quadratus ipſius E. per corollarium præcedentis. Igitur ex A. in vtrumque M E. ſimul, fit idem quadratus. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

In progreſsione quæ ab vnitate incipit, quadratus maximi æquatur duplo ſummæ antecedentium adſumente ipſum maximum.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5.

Etenim ſi ponatur A. vnitas, & differentia etiam progreſſionis vnitas, erit per hanc quartam propoſitionem quadratus E. æqualis producto ex A. in E. & in duplum ipſorum A B C D. Quia ergo A. eſt vnitas quæ non mutat numeros quos multiplicat, patet quadratum E. æquari ipſi E. & duplo ſummæ ipſorum A B C D. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO QVINTA.

In hac progreſſione aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur productis ex minimo in maximum ſemel, & in ſecundum ab illo ter, & in tertium quinquies, & in quartum ſepties, & ſic continue per numeros impares aſcendendo.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint in hac progreſſione numeri A B C D E. dico aggregatum quadratorum à ſingulis æquari productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies, & ſic deinceps per numeros impares aſcendendo. Etenim per præcedentem quadratus ex E. æquatur producto ex A. in E. ſemel, & in reliquos bis. Rurſus quadratus ex D. æquatur producto ex A. in D. ſemel, & in antecedentes bis. Quare quadrati ex E. & D. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, & in reliquos quater. At rurſus quadratus ex C. æquatur producto ex A. in C. ſemel, & in antecedentes bis. Igitur quadrati ex E D C. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, & in reliquos ſexies. Rurſus denique quadratus ex B. æquatur producto ex A. in B. ſemel, & in A. bis. Igitur quadrati ex E D C B. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, & in A. octies, quare addito quadrato ex A. fiunt quadrati omnium A B C D E. æquales productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO SEXTA.

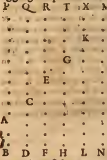
In hac progreſſione, qui fit ex numero terminorum in ſummam extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto in maximum.

K 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
1. huius. G 5. H 6.

Sint numeri qui prius, & ſit numerus terminorum G. cui addendo vnitatem, fiat H. & ſit ſumma extremorum K. dico ex K. in G. eundem produci numerum qui ex E. in H. etenim [1] E. continet A. ſecundum vnitates numeri G. quare cùm addito A. ad E. fiat K. ac proinde K. contineat A. ſemel amplius quàm E. patet K. continere A. ſecundum numerum H. qui vnitate ſuperat
17. 7. G. quamobrem cùm ex eodem A. in H. & in G. fiant K. & E. [a] erit K. ad E. ſicut H. ad G. ac proinde
19. 7. ex K. in G. producetur numerus æqualis producto ex E. in H. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

In hac progreſſione, productus ex numero terminorum vnitate aucto in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in ſummam omnium, æquatur triplo aggregati quadratorum a ſingulis.



Hæc eſt decima propoſitio Archimedis de lineis ſpiralibus, quæ ſic oſtenditur. Sint in hac progreſſione AB. CD. EF. GH. KL. MN. dico quadratum ex MN. ſumptum ſecundum vnitatea numeri terminorum vnitate aucti, vna cum producto ex AB. in ſummam omnium æquari triplo ſummæ quadratorum à ſingulis. Etenim adiiciatur ipſi KL. numerus XK. æqualis ipſi AB. ipſi quoque GH. addatur TG. æqualis ipſi CD. & ipſi EF. addatur RE. eidem EF. æqualis. At ipſi CD. addatur QC. æqualis ipſi GH. & demum ipſi AB. addatur PA. æqualis ipſi KL. Tunc patet totos PB. QD. TH. XL. æquales eſſe ipſi MN. Quia enim AB. eſt æqualis differentiæ, eo addito ad KL. & ad PA. fiunt XL. PB. qui ſinguli æquantur ipſi MN. [a] ſed ob medietatem arithmeticam ſummæ duorum AB. KL. æqualis eſt ſumma duo- 6. primi poriſ.
rum CD. GH. itemque duplum ipſius EF. igitur conſtat & totos QD. RF. TH. æquales eſſe ſingulos ſingulis PB. XL. ſeu ipſi MN. quamobrem ſi ſumantur quadrati ipſorum PB. QD. RF. TH. XL. MN. & adhuc ſemel quadratus ipſius MN. ſumetur vtique quadratus MN. ſecundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti. Oſtendendum ergo hos quadratos, vna cum producto ex AB. in ſummã omnium AB. CD. EF. GH. KL. MN. efficere triplum quadratorum à ſingulis. Itaque [b] quadratus ex PB. 4. ſecundi.
æquatur quadratis ex PA. & AB. & plano bis ſub PA. AB. contento. Item quadratus ex QD. æquatur quadratis ex QC. CD. & plano bis ſub QC. CD. contento. Et ſimiliter quadrati reliquorum æquantur quadratis partium, & plano bis ſub partibus contento. at quadrati ex AB. CD. EF. GH. KL. æquales ſunt quadratis ex XK. TG. RE. QC. PA. quare ſi his addas duplum quadrati MN. patet iam haberi duplum quadratorum à ſingulis. Reſtat ergo probandum dupla planorum ſub partibus contentorum, vna cum producto ex AB. in AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquari adhuc ſummæ quadratorum à ſingulis. Quoniam itaque quod fit bis ex XK. in KL. æquatur ei quod fit bis ex AB. in KL. at quod fit bis ex TG. in GH. æquatur ei quod fit quater ex AB. in GH. [c] quia TG. duplus eſt ipſius AB. ſimiliter quod fit bis ex RE. in EF. æquatur ei quod corol. 1. huius.
fit ſexies ex AB. in EF. quia RE. triplus eſt ipſius AB. & eadem de cauſa quæ bis ſub alijs partibus continentur, æquantur producto ex AB. in alios numeros, ſecundum numeros pares continenter aſcendendo multiplicatos, omnia vtique plana illa ſimul ſumpta cum producto ex AB. in omnes AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquabuntur productis ex AB. in MN. ſemel, in KL. ter, in GH. quinquies, in EF. ſepties, & ſic per numeros impares aſcendendo. His autem productis æquantur quadrati à ſingulis per quintam huius, ergo conſtat propoſitum.

PROPOSITIO OCTAVA.

In hac progreſſione productus ex maximo in ſummam extremorum, æquatur producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

F 12.
A 2. B 4. C. 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit ſumma extremorum F. Dico productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim cùm F. componatur ex duobus A. & E. productus ex E. in F. æquatur quadrato ipſius E. & producto ex A. in E. at [a] quadratus ex E. æquatur producto ex A in E. ſemel, & in antecedentes bis, igitur addito producto ex A. in E. pa- 4. huius.
tet productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, quod demonſtrandum, erat.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur euidenter productum ex minimo in ſummam omnium æquari producto ex maximo in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel producto ex ſumma extremorum in ſemiſſem maximi.

PROPOSITIO NONA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in quadratum ſummæ extre-

morum, æquatur producto ex eodem numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

Sint numeri qui ſupra,& ſit G. numerus terminorum,& vnitate maior ſit H.dico productum ex G. in quadratum ipſius F. æquari productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium,
quarta 2. etenim [1] quadratus F. æquatur quadratis partium A E. & duplo plani ſub A. & E. quare productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in quadratos A E. & in duplum plani ſub A E. & lo-
3. huius. co producti ex G. in planum ſub A,E. ſemel, ſumendo [2] illi æqualem quadratum ipſius E. erit productus ex G. in quadratum F. æqualis productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratos A E. & ipſi quadrato E. quia vero H.ſuperat G. vnitate, productus ex H. in quadratum E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipſi quadrato E. Igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. & ex H. in quadratum E. atqui cum F. æquetur ipſis
tertia 2. A E. [3] planus ſub A E. cum quadrato A æquatur producto ex F. in A. ac proinde producti ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. æquantur producto ex G. in planum ſub F A. igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub F A. & ex H. in quadratum E. quia
tertia 1. poriſ. vero ſumptis tribus numeris F. A. G. [4] fit idem numerus ſi F. ducatur in A. & productus in G. qui fit
4. Diophanti. ſi G. ducatur in F. & productus, [5] nempe duplum ſummæ omnium, ducatur in A. patet productum ex G. in quadratum F. æquari productis ex H. in quadratum F. & ex A. in duplum ſummæ omnium. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hac & ex præcedente collige tres numeros æquales eſſe, nimirum.
Productum ex numero terminorum, in planum ſub minimo, & ſub ſumma extremorum.
Productum ex minimo in duplum ſummæ omnium.
Productum ex maximo in ſummam extremorum.

PROPOSITIO DECIMA.

In hac progreſſione productus ex minimo in duplum ſummæ omnium,æquatur quadrato maximi, & plano ſub extremis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint numeri qui ſupra, dico quadratum maximi E. cum plano ſub A E. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim quadratus E.
3. huius. [6] æquatur producto ex A. in ipſos A B C D. bis & in E. ſemel, quare ſi eidem quadrato addatur rurſus productus ex A. in E ſemel, erit vtique quadratus E. cum plano ſub A E. æqualis producto ex A. in omnes A B C D E. bis. quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc rurſus collige quadratum maximi cum plano ſub extremis, æquari cuilibet trium illorum productorum, de quibus in corollario præcedentis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

In hac progreſſione productus ex duplo numeri terminorum ternario aucto in quadratum maximi, vna cum plano ſub extremis, æquatur ſextuplo aggregati quadratorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
K 13. H 6. G 5.

Sint numeri qui prius,. & ſit G. numerus terminorum, & H. vnitate maior, & K. duplum ipſius G. ternario auctum, dico productum ex K. in quadratum ipſius E. cum plano ſub A E. æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis: etenim quia H. ſuperat G. vnitate, duplum ipſius H. ſuperat binario duplum ipſius G ac proinde cum K. ſuperet ternario duplum ipſius G. idem K. ſuperat vnitate duplum ipſius H. Ita-
7. huius. que quia triplum quadratorum à ſingulis, [7] æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in ſummam omnium, vtique ſextuplum quadratorum à ſingulis æquatur productis ex duplo H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium; at productus ex A. in duplum ſummæ omnium,
10. huius, [8] æquatur quadrato E. & plano ſub A E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis,æquatur producto ex duplo H. in quadratum E. ipſi quadrato E. & plano ſub A E. quia vero K. ſuperat vnitate duplum H. vt oſtenſum eſt, patet productum ex K. in quadratum E. æquari producto ex duplo H. in quadratum E. & ipſi quadrato E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex K. in quadratum E. & plano ſub A E. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM

COROLLARIVM.

Quia E. multiplex eſt ad A. ſecundum ipſum G. per primam huius, patet ducto A. in E. produci partem quadrati ipſius E. denominatam à G. quare ſi ipſi K. addatur pars vnitatis ab ipſo G. denominata, & ſumma ducatur in quadratum E. fiet ſextuplum aggregati quadratorum à ſingulis, vt euidens eſt.

PROPOSITIO DVODECIMA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui ſupra, & ſumma extremorum eſto F. dico productum ex G. in planum ſub F E. æquari producto ex H. in quadratum ipſius E. etenim quia F. ex ipſis A E. componitur planus ſub F E [a] æquatur quadrato ipſius E. & plano ſub A E. Quare productus ex G. in planum ſub F E. æquatur productis ex G. in quadratum E. & in planum ſub A E. ſed productus ex G. in planum ſub A E. [b] æquatur quadrato ipſius E. Igitur productus ex G. in planum ſub F E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipſi quadrato E. hoc eſt producto ex H. in quadratum E. quod erat demonſtrandum. tertia 2. 3. huius.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In hac progreſſione producti ex numero terminorum in quadratum ſummæ extremorum, & in planum ſub ſumma extremorum, & ſub maximo comprehenſum, æquatur ſextuplo quadratorum à ſingulis.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui prius. Dico productos ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. contentum, æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis. Nam productus ex G. in quadratum F. [a] æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium. At productus ex G. in planum ſub F E. [b] æquatur producto ex H. in quadratum E. Igitur producti ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. æquantur productis ex H. in quadratum E. bis, & ex A. in ſummam omnium bis. Verum producti ex H. in quadratum E. & ex A. in ſummam omnium, [c] æquantur triplo quadratorum à ſingulis. Igitur iidem producti bis, ſeu illis æquales producti ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. æquantur ſextuplo quadratorum à ſingulis. Quod demonſtrandum fuit. 9. huius. 12. huius. 9. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In hac progreſſione, eſt vt minimus ad maximum, ita quadratus ſummæ extremorum, cum plano ſub eadem ſumma & ſub maximo comprehenſo, ad ſextuplum aggregati quadratorum à ſingulis.

Sint numeri qui ſupra, dico eſſe A. ad E. ſicut quadratum F. cum plano ſub F E. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Nam [a] cùm ex A. in G. fiat E. eſt A. ad E. vt vnitas ad G. ſed etiam [b] quia ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. fit ſextuplum quadratorum à ſingulis, eſt vnitas ad G. ſicut quadratus F. cum plano ſub F E. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Ergo eſt A. ad E. ſicut quadratus F. cum plano ſub F E. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat. 1. huius. 13. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

In hac progreſſione, productus ex maximo in dimidium numeri terminorum vnitate aucti, vel ex numero terminorum vnitate aucto in dimidium maximi, æquatur ſummæ omnium.

Sint numeri qui prius. Dico productum ex E. in ſemiſſem ipſius H. vel ex H. in dimidium E. æquari ſummæ omnium. Etenim productus ex G. in F. æquatur duplo ſummæ omnium. per 4. Diophanti at producto ex G. in F. [a] æquatur productus ex H. in E. Igitur cùm ex H. in E. fiat duplum ſummæ omnium, ſane ex E. in dimidium H: vel ex H. in dimidium E. fiet ipſa ſumma omnium Quod erat oſtendendum. 6. huius.

SCHOLIVM.

Semper autem continget vel E. vel H. parem eſſe, & alterutrius dimidium poſſe ſumi ſine fractione;
1. huius. *nam vel G. par eſt, vel impar; ſi G. ſit par cum eo ducto in A. fiat E. erit & E, par; ſi autem G. ſit impar, ſane qui eum ſuperat vnitate, puta H. par erit.*

Cæterum ex multis harum propoſitionum eliciuntur regulæ ad inueniendam ſummam quadratorum à quotlibet numeris in hac progreſſione diſpoſitis.

PRIMA.

Ducito numerum terminorum vnitate auctum in quadratum maximi, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per ſeptimam huius, ſic ducendo 6. in 100. fit 600. cui addendo productum ex 2. in 30. nempe 60. fit 660. cuius triens 220. eſt ſumma quadratorum.

SECVNDA.

Ducito numerum terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorum.

Conſtat per duodecimam adiuuante ſeptima, ſic ducendo 5. in 120. (qui fit ex 10. in 12.) fit 600. cui reddendo 60. vt prius, fit 660. cuius triens eſt 220. vt ſupra.

TERTIA.

Ducito numerum terminorum in quadratum ſummæ extremorum, à producto aufer quod fit ex minimo in ſummam omnium, reſidui triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per nonam adiuuante ſeptima, ſic ducto 5. in 144. quadratum ipſius 12. fit 720. vnde ſi auferas 60. reſtat 660. cuius triens eſt 220. vt prius.

Porro ſicut tribus modis, huius regulæ prima pars variata eſt in tribus hiſce præceptis, ita & totidem modis variari poteſt ſecunda. Nam loco producti ex minimo in ſummam omnium ſumi poteſt productus ex minimo in planum ſub maximo, & ſub dimidio numeri terminorum vnitate aucti per decimam quintam, vel productus ex maximo in dimidium ſummæ extremorum per corollarium octauæ.

QVARTA.

Ducito duplum numeri terminorum ternario auctum in quadratum maximi, producto adde planum ſub extremis, compoſiti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per vndecimam: ſic ducendo 13. in 100. fit 1300. cui addendo 20. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

QVINTA.

Ducito quadratum maximi in duplum numeri terminorum auctum ternario, & parte vnitatis à numero terminorum denominata, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per corollarium vndecimæ ſic ducendo 100. in $13\frac{1}{5}$ fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ſupra.

SEXTA.

Ducito numerum terminorum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano ſub maximo & ſub ſumma extremorum contento, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimam tertiam, ſic ducendo 5. in aggregatum ex 144. & ex 120. nempe in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

SEPTIMA.

Ducito maximum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex planò

ſub maximo & ſub ſumma extremorum, productum diuide per minimum, quotientis ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimamquartam indagando quartum proportionalem, tribus cognitis. Sic ducendo 10. in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ante.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

In hac progreſſione. Octuplum plani ſub minimo, & ſub ſumma omnium adſcito minimi quadrato æquatur quadrato compoſiti ex minimo, & duplo maximi.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium F. Dico octuplum plani ex A. in F. adſumpto quadrato ipſius A. æquari quadrato compoſiti ex A. & duplo ipſius E. Etenim [1] productus bis ex A. in F. æquatur quadrato E. cùm plano ſub A E. Quare octuplum producti ex A. in F. æquatur quadruplo quadrati E. & quadruplo plani ſub A E. Proinde ſi addatur vtrimque quadratus A. vtique octuplum plani ſub A F. cum quadrato A. æquabitur quadrato E. quater, plano ſub A E. quater, & quadrato A. ſemel. Atqui quadruplum quadrati E. æquatur quadrato dupli ipſius E. & quadruplum plani ſub A E. æquatur duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. Rurſus autem [2] quadrati ex A. & ex duplo ipſius E. cum duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. æquantur quadrato compoſiti ex A. & ex duplo E. Igitur hic quadratus æquatur octuplo plani ſub A F. Quod erat demonſtrandum.

[1] 10. huius.
[2] 4. ſecundi.

SCHOLIVM.

Hinc rurſus demonſtratur quod ait Diophantus quæſt. 44. lib. 4. Itemque Plutarchus quæſtione Platonica quarta nimirum Πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος ϗ μονάδα προσλαβὼν γίνεται τετράγωνος. vt euidens eſt ſi A. ponatur vnitas, & differentia progreſſionis vnitas. Tunc enim F. erit triangulus ex definitione. Etenim cum vnitas non mutet numerum quem multiplicat, & quadratus vnitatis ſit ipſa vnitas patet octuplum producti ex A. in F. fore octuplum ipſius F. cui addendo quadratum ipſius A. puta vnitatem fiet quadratus, cuius latus æquabitur duplo ipſius E. & vnitati. Itaque hanc eandem propoſitionem iam tripliciter demonſtrauimus. Primo ad quadrageſimam quartam 4. peculiari demonſtratione. Secundo hic vniuerſalius, prout hæc proprietas conuenit omni progreſſioni arithmeticæ, cuius minimus terminus æqualis eſt differentiæ. Tertio vniuerſaliſſimè, ad octauam Diophanti de numeris multangulis, proprietatem hanc omni in vniuerſum progreſſioni arithmeticæ applicantes vi theorematis 5. eorum quæ ad ſextam demonſtrauimus.

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5.
F 15.

Hæc ergo dixiſſe ſufficiat de progreſſione quadratorum, quorum latera in hac progreſſione ſunt ordinata. Agamus iam de omnium polygonorum in vniuerſum progreſſione.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque; & ſic deinceps, & quælibet pars vnius ſectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiuſdem ſectionis, continget hanc comparationem in prima ſectione fieri ſemel, in ſecunda ter, in tertia ſexies, in quarta decies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

A......C......B
D....E....F....G
H... K... L... M... N

Secetur A B. in duas partes A C. C B. & ſecetur D G. in tres D E. E F. F G. & ſecetur H N. in quatuor H K. K L. L M. M N. & ſic deinceps, & comparetur quælibet pars vnius ſectionis cuilibet ex alijs eiuſdem ſectionis, dico in ſectione numeri A B. hanc comparationem fieri ſemel, in ſectione D G. fieri ter, in ſectione H N. fieri ſexies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

Primo enim in ſectione A B. patet A C. tantum comparari poſſe ipſi C B. vnde conſtat propoſitum.

Secundo in ſectione D G. quia D E. comparari poteſt ſingulis E F. F G. & ipſæ E F. F G. rurſus inter ſe ſemel comparantur, patet tres hic fieri comparationes. Quod erat intentum.

Tertio in ſectione H N. quia H K. comparari poteſt ſigillatim tribus reliquis, vnde tres oriuntur comparationes, & rurſus tres reliquæ per proxime demonſtrata, ter inter ſe comparantur. Patet hic in vniuerſum ſex fieri comparationes, quod erat propoſitum.

Denique ſi numerus ſecetur in quinque partes, cùm prima pars comparari poſſit quatuor reliquis; & quatuor reliquæ per iam demonſtrata, ſexies inter ſe comparentur, fient omnino decem compa-

tionum æquabitur triangulo præcedentium comparationum adſciſcenti ſuum latus vnitate auctum, vnde fiet triangulus proximè maior ex definitione triangulorum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

In hac progreſſione ſi polygonus quilibet minimi ducatur in triangulum numeri terminorum, & producto addatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub numero angulorum, binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi numeri vno minus, fiet ſumma ſimilium polygonorum à ſingulis.

L 2.
G 2. M 2.
E 2. H 2. N 2.
F 2. K 2. O 2.
A 2. B 4. C 6. D 8.
coroll. 1. huius. P 7. Q 10. R 4. T 5. V 10.
X 70. Y 200.

Sint in hac progreſſione A B C D. & ſit P. quilibet polygonus minimi, puta heptagonus, ſitque Q. triangulus numeri terminorum, quo ducto in P. fiat X. ſitque R. quadratus ipſius A. & T. numerus angulorum binario multatus, & V. ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi B C D. & ſolidus ſub ipſis R T V. eſto Y. dico aggregatum duorum X Y. æquari ſummæ ſimilium polygonorum, puta heptagonorum à ſingulis A B C D. Quia enim A. continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, reſoluantur B C D. in numeros æquales ipſi A. puta B. in E F. At C in G H K. ac demum D. in L M N O. Itaque per ſcholium 10. primi polygonus B. æquatur polygonis ipſorum E F & producto ex E, in F, ſeu quadrato R. ducto in T. ſimiliter polygonus C. æquatur polygonis G H K. & productis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ſeu totidem quadratis R. ductis in T. denique polygonus D. æquatur polygonis ipſorum L M N O. & productis ex quolibet in quemlibet ex alijs, ſeu totidem R. ductis in T. quamobrem ſi his omnibus polygonis & productis addatur polygonus ipſius A. patet polygonos à ſingulis A B C D. continere polygonum ipſius A. ſeu ipſum P. ſemel, bis, ter, quater, & ſic deinceps, id eſt ſecundum vnitates trianguli Q & præterea ipſum R. ductum in T. ſemel, ter, ſexies & ſic deinceps ſecundum triangulos ab vnitate, id eſt ſecundum vnitates ipſius V. per præcedentem. Quamobrem polygoni à ſingulis A B C D. æquantur producto ex Q. in P. ſeu ipſi X. adſciſcenti ſolidum ſub R. T. V. nempe ipſum Y. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMANONA.

In hac progreſſione aggregatum productorum ex minimo in maximum ſemel, in ſecundum ab illo bis, in tertium ter, in quartum quater, & ſic deinceps, æquatur producto ex quadrato minimi in ſummam totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
N. 4. M. 3. L. 2. K. 1.
E. 1. F. 2. G. 3. H. 4.
O. 4. P. 6. Q 6. R. 4.

Sint in hac progreſſione A B C D. Dico ſi A. ducatur in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, & ſic deinceps, aggregatum productorum, æquari producto ex A. in ſummam totidem triangulorum ab vnitate. Etenim ſumantur totidem numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti E. F. G. H. quibus ſuperponantur totidem illis æquales ordine inuerſo, puta K L M N. & ex K. in H. fiat R. ex L. in G. fiat Q. ex M. in F. fiat P. ex N. in E fiat O. Coroll. 1. huius. Patet A. contineri in A. ſecundum E. in B. ſecundum F. in C. ſecundum Q. in D. ſecundum H. Quare cùm K. ſit vnitas, ſi A. ducatur ſemel in D. productus continebit quadratum ipſius A. toties, quoties productus ex K. in H. puta R. continet vnitatem. Similiter quia L. eſt Binarius, ſi A. ducatur bis in C. productus continebit quadratum A. toties quoties productus ex L. in G. puta Q continet vnitatem. Eodem argumento probabitur productum ex A. in B. ter toties continere quadratum A. quoties P. continet vnitatem, & rurſus productum ex A. in A. quater toties continere quadratum A. quoties O. continet vnitatem. Quamobrem producti omnes ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma ipſorum O P Q R. ſed ſumma ipſorum O P Q R. 24. 1. appen. æquatur ſummæ triangulorum ab ipſis E. F. G. H. Igitur producti omnes ex A. in D. ſemel in C. bis, in B. ter, in A. quater toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma totidem triangulorum ab vnitate. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMA.

In hac progreſſione, ſi numerus terminorum vnitate auctus, ducatur in polygonum maximi, & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub

numero angulorum binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri vno minus, reſiduum æquatur duplo polygonorum a ſingulis.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 3.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & numerus angulorum binario multatus eſto L. Dico ſi numerus terminorum vnitate auctus ducatur in polygonum ipſius E. & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato A. numero L. & ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi A B C D. reſiduum æquari duplo polygonorum à ſingulis A B C D E. Etenim ſuperponantur ipſis totidem illis æquales ordine inuerſo F G H K. Tunc ex demonſtratione ſeptimæ huius patet binos A K. B H. C G. D F. æquari ſigillatim ipſi E. quare ſi ſumantur polygoni harum ſumma tum, & præterea polygonus ipſius E. bis, horum aggregatum æquabitur producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum ipſius E. Atqui polygoni ſummæ binorum A K. B H. C G. D F. ' æquantur polygonis omnium A K. B H. C G. D F. ſeu duplo polygonorum à ſingulis A B C D. & præterea productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygo- 10. 1. app.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
L. 3.

num E. æquatur duplo polygonorum à ſingulis A B C D E. & productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. ſed hi producti (' quandoquidem A. continetur in F. ſemel, in G bis, in H ter, in K quater) æquantur productis ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter in A. quater, ac proinde per præcedentem iidem producti æquantur producto ex quadrato A, in ſummam tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C D. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à ſingulis, & producto ex quadrato A, in ſummam tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C D. ducto in L. quare ſi ſolidus ſub quadrato A, numero L, & ſumma tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C D. auferatur à producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E, reſiduum erit duplum polygonorum à ſingulis A B C D E. quod demonſtrare oportuit. coroll. 1. huius.

PROPOSITIO VIGESIMA PRIMA.

In hac progreſſione, qui fit ex polygono minimi in triangulum numeri terminorum, adſcito producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, æquatur triplo polygonorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 50. F 460.
K 120.

Sint in hac progreſſione A B C D. & qui fit ex polygono minimi A, in triangulum numeri terminorum eſto E. qui fit autem ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi eſto F. dico aggregatum duorum E F. æquari triplo polygonorum à ſingulis, etenim ſumatur K, ſolidus ſub quadrato A, ſub numero angulorum binario multato, & ſub ſumma tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C. igitur per 18. ambo E K. ſimul æquantur ſummæ polygonorum à ſingulis A B C D. ſed per præcedentem, detracto K, ex F. manet duplum polygonorum à ſingulis. Igitur ſi ad F. multatum numero K. concipiamus addi ipſos E K. nempe ſummam polygonorum à ſingulis; fiet vtique ſumma ipſorum E F. æqualis triplo polygonorum à ſingulis, quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMA SECVNDA.

In hac progreſſione ſi productus ex polygono minimi in numerum terminorum adſciſcat duplum polygoni maximi, & aggregatum ducatur in numerum terminorum vnitate auctum, fiet ſextuplum polygonorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 3. F 4. G 5. H 12.
K 60. L 36. M 72.
N 360. O 420. P 84.

Sint in hac progreſſione A B C D. & polygonus minimi eſto E, numerus vero terminorum F, & illo vnitate maior eſto G. ductoque E in F. fiat H. Maximi vero polygonus eſto L. cuius duplum M. quo addito ad H. fiat P. ductoque P. in G. fiat O. dico O. eſſe ſextuplum polygonorum à ſingulis, etenim ducto G in ipſos H. M. fiant K N. cùm ergo ex eodem G in P, ſummam eorundem H M. factus ſit O. erit O. æqualis ambobus K N. Quia vero ex E in F, fit H. & ex H in G. fit K, eſt K. ſolidus ſub tribus E F G. proinde ' idem K, fiet ducto F in G. & producto in E, ſed ex F. in G. fit duplum trianguli ipſius F. per octauam Diophanti. Ergo K, fit ducto E, in duplum trianguli F, ſimiliter N. factus eſt ex G, in M, duplum polygoni L. ergo ſumma duorum K N. ſeu O. componitur ex ductu E. in duplum trianguli ex F, & ex ductu G in duplum polygoni ex D. ſed horum ſemiſſis, nempe productus ex E, in triangulum ex F. vna cum producto ex G. in polygonum ex D. æquatur triplo polygonorum à ſingulis per præcedentem. Igitur O, æquatur ſextuplo eorundem polygonorum. Quod oſtendendum ſuſceperam. 3. 1. poriſ.

SCHOLIVM.

Ex his duabus propoſitionibus duo elici poſſunt Canones ad inueniendum ſummam quotlibet ſimilium polygonorum, quorum latera in hac progreſſione diſponantur, ſed quia ipſi Canones ab ipſis propoſitionibus non differunt, illos adſcribere ſuperuacaneum duxi. Itaque hactenus de polygonorum progreſſione dictum eſto: Reſtat vt agamus de cuborum progreſſione, ſed prius tres inſignes illorum proprietates demonſtrabimus, quæ ad illorum progreſſionem aliquatenus ſpectant.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

Si diſponantur omnes numeri impares ab vnitate, ex illorum ordinata & continua additione, quadrati omnes procreabuntur.

Putabit forte quiſpiam nos huic propoſitioni ſuperſedere debuiſſe, quandoquidem ex polygonorum definitione quadratis applicata, hoc ipſum manifeſtum fit. Verum quoniam antiqua definitio quadratorum ab Euclide cæteriſque omnibus, & ab ipſo Diophanto libro primo arithmeticorum tradita, diuerſa eſt, quatenus definiuntur quadrati, numeri qui fiunt ex alio quopiam in ſeipſum multiplicato, operæpretium viſum eſt, oſtendere vtramque definitionem iiſdem numeris conuenire, ne vlla ſuperſit hac de re dubitatio. Etenim poſſet aliquis iure ambigere, an quadratus cui conuenit polygoni definitio, & qui fit ex imparium aggregatione, idem ſit qui producitur latere in ſeipſum ducto, quandoquidem neque triangulus neque pentagonus, nec hexagonus, neque alius quiſpiam polygonus præter ſolum quadratum, reſpondet figuræ Geometricæ angulorum & laterum æqualium, eiuſdemque nominis.

A 1. B 3. C 5. D 7.
L 2. M 4. N 6.
F 1. G 2. H 3.

Sint ab vnitate impares A B C D. dico ex eorum ordinata aggregatione fieri omnes quadratos, etenim cùm vnitas A. ſit primus quadratus, dico ſummam duorum A B. eſſe ſecundum quadratum ſeu quadratum binarij, & ſummam trium A B C. eſſe quadratum ternarij, & ſummam quatuor numerorum A B C D. eſſe quadratum quaternarij, & ſic in infinitum, ſumantur numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem, F G H. & ſint eorum dupli L M N. patet igitur ipſos L M N. eſſe numeros pares ordinate diſpoſitos, ac proinde ſi ſingulis addatur vnitas, fieri omnes impares, hoc eſt L. cum vnitate æquatur ipſi B. at M. cum vnitate æquatur ipſi C. ac demum N. cum vnitate æquatur
18. 1. poriſ. ipſi D. & ſic deinceps. Itaque [a] quoniam ſi quadrato vnitatis F. hoc eſt ipſi vnitati A, addatur duplum lateris illius & præterea vnitas, fit quadratus proxime maior, hoc eſt quadratus binarij, cum L, ſit duplus ipſius F, & B, excedat L, vnitate, patet addito B. ad vnitatem A, fieri quadratum binarij. Rurſus quia quadrato binarij G. addendo duplum ipſius G. & vnitatem, hoc eſt numerum C. fit quadratus ternarij, cum A G. ſimul faciant quadratum binarij vt oſtenſum eſt, facient tres A B C. ſimul quadratum ternarij. Et eodem argumento oſtendetur quatuor A B C D. æquari quadrato quaternarij, & ſic in infinitum. Igitur conſtat propoſitum.

COROLLARIVM.

Patet ergo quemlibet quadratum tot imparibus conſtare, quot vnitates continet latus quadrati.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

In progreſſione arithmetica ab vnitate incipiente, & per vnitatem creſcente, cubus maximi æquatur quadrato maximi, & producto ex maximo in duplum antecedentium.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 12.

Sit vnitas A. & quotlibet numeri deinceps B C D. per vnitatis augmentum creſcentes, ſitque E duplum ipſorum A B C. Dico cubum maximi D. æquari quadrato ipſius D. & producto ex D. in E etenim productus ex D. in E.
tertia 2. cum quadrato ipſius D. [a] æquatur producto ex D E. ſimul in D. at E D. ſimul æquantur quadrato ipſius D. per corollarium 4. huius. Igitur productus ex E. in D. cum quadrato ex D. æquatur producto ex quadrato ipſius D, in D. hoc eſt cubo ipſius D. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

Quotlibet cuborum ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ſumma quadratus eſt, cuius latus componitur ex cuborum ipſorum lateribus ſimul additis.

Sint quotlibet numeri ab vnitate A B C D. ſecundum ſeriem numerorum, quorum cubi ſint E F G H. Dico ſummam duorum E F. Itemque trium E F G. itemque quatuor E F G H. eſſe quadratum, cuius latus eſt ſumma duorum A B. vel trium A B C. vel quatuor A B C D.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 1. F 8. G 27. H 64.

Primò enim quadratus ſummæ duorum A B. [1] æquatur quadratis ipſorum A & B & duplo producti ex A in B. At quadratus vnitatis A æquatur cubo ipſius vnitatis E. quadratus autem ex B. cum duplo producti ex B in A æquatur cubo F per præcedentem. Igitur quadratus ſummæ duorum A B. æquatur cubis E F. ſimul, quod erat propoſitum. Deinde quadratus ſummæ trium A B C. æquatur quadrato ſummæ duorum A B. & quadrato ipſius C. & duplo producti ex A B. ſimul in C. ſed quadrato ſummæ duorum A B. æquantur cubi E F. per demonſtrata: quadrato autem ipſius C, cum duplo producti ex A B. ſimul in C. æquatur cubus G, per præcedentem. Igitur quadratus ſummæ trium A B C. æquatur cubis E F G. ſimul. Denique eodem argumento quadratus ſummæ omnium A B C D. æquatur quadrato ſummæ trium A B C. hoc eſt cubis E F G. & quadrato ipſius D. cum duplo producti ex D. in ſummam trium A B C. hoc eſt cubo H. per præced. Igitur quadratus ſummæ ipſorum A B C D. æquatur cubis E F G H ſimul. Quod erat demonſtrandum, eademque eſt demonſtrationis ratio in pluribus, vt patet, quamobrem abundè conſtat propoſitum. quarta 2.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur ſummam quotlibet cuborum ab vnitate, facere quadratum cuius latus, eſt numerus triangulus, quia enim A B C D. eſt progreſſio naturalis numerorum ab vnitate, patet ex definitione triangulorum, tam A B. ſimul, quàm A B C, vel A B C D. conficere triangulum, eſt autem trianguli latus, ipſe cuborum numerus, vt etiam perſpicuum eſt.

PROPOSITIO VIGESIMASEXTA.

Quadratus quilibet adſumpto ſuo latere, duplum facit collateralis trianguli.

A 16.
B.... C. D

Eſto quilibet quadratus A cuius latus B C. dico ſi B C. addatur ad A fieri duplum trianguli à latere B C. etenim ipſi B C. addatur vnitas C D. igitur ex B C. in B D. fiet duplum trianguli ex B C. per 8. Diophanti, ſed productus ex B C in B D. æquatur quadrato ex B C. hoc eſt ipſi A, & producto ex B C in C D. ſit hoc eſt ipſi B C. cùm CD. ſit vnitas. Ergo duplum trianguli ex B C. æquatur quadrato A cum ſuo latere B C. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

Vnitas primum cubum; duo ſequentes impares coniuncti, ſecundum cubum; tres ſequentes tertium cubum; quatuor ſuccedentes, quartum, ſemperque vno plures ſequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares conſtituunt.

A 1.
B 3 | R 8
C 5.
D 7.
E 9. | T 27
F 11.
G 13.
H 15.
K 17. | V 64
L 19.

Diſponantur ab vnitate A. numeri impares B C D E F G H K L. dico quod B C. ſimul ſecundum ab vnitate cubum faciunt, at D E F. faciunt tertium cubum, ac demum G H K L. quartum cubum conſtituunt, & ſic deinceps, ſit enim R. ſumma duorum B C. & ſit T. ſumma trium D E F. ſitque V. ſumma ipſorum quatuor G H K L. etenim quoniam A B C D E F G K L. ſunt impares ordinate diſpoſiti ab vnitate, eorum ſumma, ſeu ſumma ipſorum A R T V. [2] eſt quadratus, cuius latus tot conſtat vnitatibus, quot ſunt numeri A B C D E F G H K L. Quoniam vero ex ipſis vnus ſumitur; tum duo, tum tres, tum quatuor, patet numerum numerorum eſſe triangulum, cuius latus tot continet vnitates, quot fiunt propoſitorum numerorum ſumptiones, hoc eſt, quot ſunt ipſi A R T V. Cùm itaque ſumma ipſorum A R T V. ſit quadratus cuius latus eſt triangulum, [3] erit eadem ſumma, aggregatum totidem cuborum ab vnitate quot ſunt vnitates in latere trianguli, hoc eſt quot ſunt ipſi A R T V, puta quatuor cuborum, ſimili prorſus argumento oſtendemus aggregatum ipſorum A R T. eſſe ſummam trium cuborum ab vnitate. Quare relinquetur V. eſſe quartum cubum, eademque ratione oſtendemus A R. ſimul eſſe ſummam duorum cuborum ab vnitate, ac proinde relinquetur T, tertius cubus, eritque R. ſecundus, cùm A ſit vnitas. Quare patet propoſitum.

25. huius.
Corolla. 25. huius.

SCHOLIVM.

Eadem fere ratione demonſtratur hæc propoſitio à Franciſco Maurolyco, prop. 62. arithmeticorum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hanc propoſitionem ita conſtituo magis vniuerſalem. Vnitas primam columnam in quacumque polygonorum progreſſione conſtituit; duo ſequentes numeri multati primo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, ſecundam columnam; tres ſequentes multati ſecundo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, tertiam columnam, & ſic eodem in infinitum progreſſu.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA.

Cubus quilibet adſumpto ſextuplo trianguli collateralis vnitate aucto facit cubum proxime maiorem.

A. 27. B. 36. C. 64.
D 3. E. 6. F. 4.

Sit cubus A cuius latus D. & ab eodem latere triangulus eſto E. cuius ſextuplum B. addiroque B. vnitate aucto ad A. fiat C. dico C. eſſe cubum proxime maiorem. Sumarur F. ſuperans vnitate ipſum D. Igitur cubus ex F. [1] æqualis
80. 2. por. eſt cubo ipſius D. & vnitati, & triplo tum quadrati ipſius D. tum ipſius D. Ar quadratus ipſius D.
26. huius. cum ſuo latere [2] æquabitur duplo trianguli E. Quare triplum quadrati ex D. cum triplo ipſius D. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur ad cubum ipſius D. hoc eſt ad A. addendo B. & vnitarem, qui fit puta C. eſt cubus ipſius F. Quod demonſtrandum erat.
21. 2. pori. Alirer interuallum cuborum ab ipſis D F. [3] æquatur cubo interualli, hoc eſt vnitati, & triplo producti ex D. in F. At ex D. in F. fit duplum trianguli E. per octauam Diophanti, ac proinde triplum producti ex D. in F. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur interuallum cuborum ab ipſis D F. æquatur ipſi B. & vnitati. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

In progreſſione arithmetica, in qua minimus terminus æquarur differentiæ, productus ex minimo in quadratum numeri terminorum, æquatur producto ex maximo in numerum terminorum.

A 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 5.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit numerus terminorum F. dico productum ex A. in quadratum ipſius F. æquari producto ex E. in F.
5. huius. Quia enim [4] ex A. in F. fit E. vtique productus ex F. in E. erit ſolidus
3. 1. pori. contentus ſub tribus numeris A. E. F. Quare [5] idem ſolidus fiet ſi F. ducatur in E. & productus hoc eſt quadratus ipſius F. ducatur in A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

In hac progreſſione, productus ex minimo in triangulum numeri terminorum, æquatur ſummæ omnium.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 5. G. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium G. dico G. æquari producto ex A. in triangulum ipſius F. Etenim ducto F. in ſummam extremorum, hoc eſt in ipſos A. E. fit duplum ipſius G. per quartam Diophanti. At productus ex F. in E. æquatur producto ex quadrato ipſius F. in A. per præcedentem, igi-
26. huius. tur duplum ipſius G. æquatur productis ex A. in F. & ex A in quadratum F. hoc eſt producto ex A in F. auctum ſuo quadrato. Quare [6] cùm F. cum ſuo quadrato ſit duplus trianguli ex F. erit duplum ipſius G. æquale producto ex A. in duplum trianguli ex F. ac proinde ipſe G. æquabitur producto ex A. in triangulum ipſius F. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

In hac progreſſione, productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum, æquatur aggregato cuborum à ſingulis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 8. N. 15.
G. 1. H. 2. K. 3. L. 4. M. 5.
P. 225.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ipſius A. cubus eſto F. ſumanturque rotidem ab vnitate continue diſpoſiti numeri G H K L M. quorum ſumma N. patet ergo N. eſſe triangulum numeri terminorum. Quare ſit eius quadratus P. dico productum ex F. in P. æquari aggregato cuborum à ſingulis A B C D E. Quia enim ſicut [7] A conti-
2. huius. netur in B. bis, in C. ter, in D. quater, in E. quinquies, ſic etiam G. continetur in H. bis, in K. ter,

ter, in L. quater in M. quinquies, patet ipſos A B C D E eſſe in iiſdem rationibus, in quibus & ipſi G H K L M. Quamobrem & cubi illorum ſunt in iiſdem rationibus, in quibus & cubi iſtorum, cum ſit ergo cubus A ad cubum G. ſicut cubus B. ad cubum H. & cubus C ad cubum K. & cubus D. ad cubum L. & cubus E ad cubum M. erunt & omnes antecedentes hoc eſt aggregatum cuborum à ſingulis A B C D E. ad conſequentes ſimul, hoc eſt ad aggregatum cuborum à ſingulis G H K L M. ſicut F ad cubum ipſius G hoc eſt ad vnitatem, ſed aggregatum cuborum à ſingulis G H K L M. æquatur ipſi P. per 25. huius, ergo eſt aggregatum cuborum à ſingulis A B C D E. ad P. ſicut F, ad vnitatem proinde ex definitione multiplicationis, ducto F in P. fiet aggregatum cuborum à ſingulis A B C D E. Quod erat demonſtrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hinc ſequitur cubum maximi toties ſumptum quot ſunt numeri terminorum ad aggregatum cuborum habere minorem rationem quam quadruplam.

PROPOSITIO TRIGESIMASECVNDA.

In hac progreſſione productus ex minimo in quadratum ſummæ omnium æquatur aggregato cuborum à ſingulis.

H 4. K 8. F 30. G 900.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 225. M 15.

Sint in hac progreſſione A B C D E. quorum ſumma F. cuius quadratus G. dico ex A. in G. produci aggregatum cuborum à ſingulis. Sit enim H. quadratus ipſius A & K cubus eiuſdem, ſitque M. triangulus numeri terminorum, cuius quadratus L. Itaque [a] quoniam ex A in M. producitur F eſt F. medius proportionalis inter quadratos ipſorum A M. hoc eſt inter H & L. per 7. Diophanti, quamobrem ex H in L. producitur G. quadratus ipſius F. Quamobrem [b] cum ex eodem H in A & in L. producantur K & G eſt A ad L. vt K ad G. [c] ac proinde ex A in G. fiet idem numerus, qui ex K in L. ſed ex K. in L. fit aggregatum cuborum à ſingulis per præcedentem. Igitur & ex A in G. fit idem aggregatum cuborum, quod erat oſtendendum.

30. huius. 17. 7. 19. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMATERTIA.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, & quilibet extremorum ducatur in quadratum alterius extremi; quilibet autem mediorum ducatur in quadratum alterius medij, fient quatuor ſolidi in eadem ratione proportionales.

E 4. F 16. G 9. H 36.
A 2. B 4. C 3. D 6.
K 12.
L 24. M 48. N 36. P 72.

Sit A ad B. vt C ad D. & ſint ipſorum A B C D. quadrati E F G H. ductoque D. in E. fiat L. & ex A in H. fiat P. & rurſus ducto C in F fiat M. & ex B in G. fiat N. dico eſſe L ad M. & N. ad P. ſicut A ad B vel C ad D. ſumatur K. planus ſub mediis B C. vel ſub extremis A D. Quia ergo L fit ducto A in A. & producto E in D. [a] Idem L fiet ducto A in D, & producto K in A. ſimiliter quia M. fit ducto B in B. & producto F in C fiet idem M. ducto B in C. & producto K in B. quare cum eodem K ducto in A & in B. fiant L M. [b] erit L. ad M. vt A ad B. eodem argumento oſtendemus ex eodem K. in C, & in D. produci N. & P ac proinde eſſe N ad P. vt C. ad D. igitur vt A ad B vel C. ad D. ſic eſt L ad M. & N. ad P. quod erat oſtendendum.

3. 1. poriſ. 17. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMAQVARTA.

In hac progreſſione, eſt vt minimus ad maximum, ita ſolidus ſub maximo, & ſub quadrato ſummæ extremorum, ad quadruplum aggregati cuborum à ſingulis.

F 12. L. 5.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 30. K 60.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſumma extremorum F. dico eſſe A ad E. ſicut ſolidus ſub E & quadrato ipſius F. ad quadruplum aggregati cuborum à ſingulis, ſumatur H ſumma omnium cuius duplum ſit K & ſit numerus terminorum L. quia ergo ducto L in F fit K per 4 Diophanti, [a] at ducto eodem L. in A. fit E [b] erit A ad E. ſicut F ad K. quare per præcedentem erit A ad E. ſicut productus ex E in quadratum ipſius F. ad productum ex A in quadratum ipſius K, ſed productus ex A in quadratum ipſius H [c] æquatur aggregato cuborum à ſingulis, & quadratus ipſius K quadruplus eſt quadrati ſui ſemiſſis H. ac proinde productus ex A in quadratum ex K quadruplus eſt aggregati cuborum à ſingulis. Igitur eſt A ad E. ſicut productus ex E in quadratum ipſius F ad quadruplum aggregati cuborum à ſingulis, quod demonſtrandum erat.

1. huius. 17. 7. 32. huius.

SCHOLIVM.

Ex aliquibus harum propoſitionum licebit faciles elicere regulas ad inueniendum ſummam quotlibet cuborum, quorum latera ſint in hac progreſſione diſpoſita.

PRIMA REGVLA.

Sume triangulum numeri terminorum, & eius quadratum ducito in cubum minimi, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 31. vt ſi ſint 5. numeri, & ſit minimus 2. ſume triangulum ipſius 5. puta 15. & eius quadratum 225. ducito in 8. cubum ipſius 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800.

SECVNDA.

Ducito minimum in quadratum ſummæ omnium, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 32. ſic in dato ſupra exemplo, ducito 2. in 900. quadratum ſummæ omnium 30. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800. vt prius.

TERTIA.

Ducito quadratum maximi in quadratum ſummæ extremorum, productum diuide per quadruplum minimi, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Facile infertur ex 34. ſic in dato exemplo ducito 100. quadratum maximi, in 144. quadratum ſummæ extremorum, fit 14400. quem diuide per quadruplum minimi 2. puta per 8. fit 1800. aggregatum cuborum vt ante.

QVARTA.

Ducito maximum in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel ſummam extremorum in ſemiſſem maximi, producti quadratum diuide per minimum, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Rurſus infertur ex 54. vel etiam ex precedente regula, fit ducendo 10. in 6. vel 12. in 5. fit 60. cuius quadratus 3600. quo diuiſo per minimum 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis, vt ſupra 1800.

FINIS.

Ne vacarent paginæ ſequentes, placuit has Epiſtolas adjicere varijs refertas D. P. de FERMAT in quoſdam Græcos authores obſeruationibus, quarum nonnullæ ad Mathematicas pertinent diſciplinas.

VIRO CLARISSIMO D. DE RANCHIN.
P. Fermat S. P. D.

POlyænum tibi tuum, Vir Clariſſime, mitto, ſed obſeruanda in eo quædam ſuppedirat codex manuſcriprus optimæ noræ auctorum rei militaris hactenus inedirorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum & monitorum milirarium inueni ſub nomine παρεκβολῶν, cuius auctorem licet manuſcriptus non deregat, colligo tamen ex gloſſario Græcobarbaro Meurſii, eum eſſe Heronem, non illum quidem Alexandrinum cuius ſpiritalia & alia quædam opuſcula extant, & qui anriquo, hoc eſt, oprimo æuo, Græcè ſcripſit, ſed alium poſterioris æui, quod pleraque ipſius vocabula Græcobarbara ſaris innuunr; vrrumque, ærarem nempe & nomen auctoris confirmat Meurſius in voce κοντυβέρνιον vbi citantur ſequentia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἀπόστειλε γοῦν τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντυβέρνια, hæc enim verba cum in meo manuſcripto deſint, ſupplendum in eo nomen auctoris ex manuſcripto Meurſii; rempus vero quo hæc ſcribebantur & quo voces ἄπληκτον & κοντυβέρνιον in vſu erant, vltra ſeptingentos plus minùs annos non viderur excurrere; in hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni ſtraragemata ſuppreſſo aurhoris nomine aliis ſæpe verbis referuntur, quandoque & iiſdem, vnde ampla emergit emendarionum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel ſi mauis doctis omnibus tuo nomine iure repreſentationis libenter exhibeo.

Cleomenis ſtraragema narrarur libro 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæſianæ ſequentibus verbis, Κλεομένης Λακεδαιμονίων βασιλεὺς, Αργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν, ἦν τοῖς Αργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος ἐσήμαινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾶν ἐσπούδαζον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, ἀναπαυομένων ἀντανεπαύοντο. Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ ὁπλίζεσθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Αργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο. Κλεομένης ὡπλισμένους ἐπαγαγὼν δίμαρχος ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Αργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco poſt verba ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, addendum ex manuſcripto ἀριστώντων ἠρίστων, quod finis ipſius ſtraragemaris pleniſſimè confirmat.

Themiſtoclis ſtraragema, eodem libro pag. 44. referrur hoc modo, Θεμιστοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐκέλευσε τοῖς Ελλησι καταγράφειν ἐπὶ τῶν τοίχων. Ἄνδρες Ἴωνες οὐ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ἐπὶ τοὺς πατέρας, τούτων ἀναγινωσκομένων βασιλεὺς ὑπόπτους αὐτοὺς ἐποιήσατο, corrigendum ex manuſcripto ἐλογίσατο, quam eſſe veram lectionem innuit ſenſus.

Ageſilai ſtratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Αγησίλαος, ait ille, ἐν Κορωνείᾳ Αθηναίους ἐνίκησεν, ἤγγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Αθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς, οἳ καὶ βούλοιντο ἀπιέναι. ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Αθηναίους reponendum ex manuſcripto Θηβαίους.

Aliud Ageſilai ſtraragema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Αγησίλαος ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἠξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιστα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξηται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων. τούτοις ἐπὶ πλεῖστον συγγινόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑστίας καὶ σπονδῶν, ταῖς πόλεσι στάσιν ἐνεποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας, Vulteius hoc modo interpretatur, Ageſilaus in legationibus perebat ab hoſtibus vt maxime potentes ad ſe mitterent; cum quibus de communi vtilirate ſermones conferret, cum his plurimum habens conſuetudinis, & communicans focum ac cineres, ſeditiones in vrbibus excirabat propter vulgi ſuſpiciones. Viderur interpres loco verbi σπονδῶν quod eſt in textu Græco

legiſſe σποδῷ cum vertat cineres, ſed nihil mutandum ex manuſcripto euincitur vbi leguntur hæc verba καὶ ὅρκους πρὸς αὐτοὺς ποιούμενος.

Clearchi ſtratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχος ἦν ἐν Θράκῃ νυκτερινοὶ φόβοι τὸ στράτευμα κατελάμβανον, ὁ δὲ παρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδένα ὀρθὸν ἀνίστασθαι, ὁ δὲ ἀναστὰς ἀναιρείσθω, τὸ παράγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς στρατιώτας καταφρονεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. verba quædam hîc ſupplenda ex manuſcripto, quæ tamen videtur in ſuo codice vidiſſe interpres latinus, licet deſint in editione græcâ Tornæſii, ſunt autem ſequentia, καὶ οὕτως ἀνεπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. Atque ita deſierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ ſtratagema ſequens legitur libro 4. pag. 314. Περδίκας Ἰλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμούντων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσκοντο ζωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι ἐπεκηρυκεύσατο περὶ λύτρων, ἐντειλάμενος τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγγεῖλαι ὡς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίεντο. ἀλλὰ ψηφίσαιντο τοὺς αἰχμαλώτους κτενεῖν. οἱ δὴ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας εὐτολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγένοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾶν ἔχοντες τὸ ζώζεσθαι, quod ſic interpretatur Vulteius, Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur viui, reliqui etiam redemptionis ſpe ad pugnam minus alacres erant, quibus legationem inrer ſe de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato vt reuerſus nunciaret ſe redemptoria munera Illyriorum non acceprurum, ſed condemnatos captiuos morte affecturum, Macedones deſperatâ ſalute redemptiuâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in ſolâ victoriâ ſalus poſita eſſet, in hoc ſtratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæſianæ; ſi vera eſſet explicatio Vulteii, non ſolum vera, ſed & neceſſaria eſſet illa emendatio, ſed frigidiſſimum eſſet ſtratagema, ſi ſequeremur ſenſum interpretis, Polyænus quippe vult Perdiccam præcepiſſe legato, vt reuerſus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic eſt verus ſenſus ſtratagematis, quem Hero aliis verbis, ſecundum hanc quæ eſt vera & germana interpretatio, expreſſit in manuſcripto his verbis, ἐπετήδευσε τοιοῦτον, παρεσκεύασε τινὰ ὡς πρόσφυγα ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεκύρωσαν ἵνα ὅσους κρατήσωσιν αἰχμαλώτους ἀποκτείνωσι.

Alexandri ſtratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis ſequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ παρατάσσεσθαι μέλλων, παράγγελμα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἢν ἐγγὺς γένησθε τῶν Περσῶν εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν. ἢν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνῃ τότε δὴ...... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκυνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος δὲ ἐσεμνύνετο καὶ φαιδρὸς ἦν ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες ῥυμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες ἐς φυγὴν ἐτράποντο.

Hoc loco deſunt quædam verba poſt vocem τότε, quæ ſupplenda ex manuſcripto vbi narratio eſt integra & elegans; lacuna itaque ex eo ſic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis ſtratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλειόνων ἀπολειφθεὶς ἔπεμψεν αὐτομόλους ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει, ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξιππεύσατο αὐτὸς σύνθημα, τοῖς δὲ ἦν ἀπορία γνωρίζειν ἐν σκότει τοὺς οἰκείους μὴ δυναμένοις διὰ τοῦ συνθήματος.

Hîc addenda ex manuſcripto poſt verbum αὐτὸς ſequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὁ τούτου στρατὸς ἐγίνωσκον τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολεμίους, τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα ἀποκρινομένων.

Pompiſci ſtratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπίσκος πολιορκῶν πόλιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολλὴν τῆς χώρας ἐξιέναι τοὺς πολεμίους ἐκώλυσεν, ἐπὶ δὲ τόπον ἕνα συνεχοῦς.... καὶ τοῖς ληιζομένοις ἀπέχεσθαι τοῦ τόπου τούτου προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως, ἀδεῶς ἐνταῦθα

περιΐσταν, ὁ δὲ παρὰ τῶν σκοπῶν, ὡς ἔμαθεν τοὺς ἥκοντας πολλοὺς ἐπιθέμενος τοὺς πλείους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hic vulgò legitur, corrigenda ex manuſcripto & loco illius reponendum συνεχώρει quod ex conjecturâ viderat Caſaubonus vt patet ex ipſius notis.

Alexandri Pherenſis ſtratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάνορμον πολιορκοῦντος Λεωσθένους πρὸς ἁπάσας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum eſſe ἐπὶ ἀκατίου, vt vult Caſaubonus in notis, confirmat codex manuſcriptus vbi legitur διὰ μικροῦ πλοιαρίου, quæ verba idem ſonant.

Cyri ſtratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις παραταξάμενος τρὶς ἡττήθη· ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις, τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἴδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτως διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τηλικαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κύρῳ πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεηθῆναι μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuſcripto συμπαθόντες quæ vox itidem reſtituenda in ſtratagemate Apollodori pag. 435. manuſcriptus noſter ex quo coniicimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες; verbis ſequentibus rem narrat & ſtratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθείᾳ τέκνων νικώμενοι, &c. vox autem illa melius authoris ſenſui reſpondet quam τὸ παθόντες vt legendum cenſuit Caſaubonus.

Darij ſtratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκαις τριχῆ διῃρημένοις, μιᾶς ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακῶν ἱζόντων τὰς ἐσθῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα περιέθηκε τοῖς Πέρσαις, &c. hic loco vocis ἱζόντων quæ eſt corrupta in editione Tornæſii, legendum ex manuſcripto ἀναιρεθέντων.

Autophradatis ſtratagema legitur lib. 7. pag. 516. & tale eſt, Αὐτοφραδάτης ἐμβαλεῖν Πισίδαις βουλόμενος τὴν εἰσβολὴν στενὴν οὖσαν καὶ φυλαττομένην ὁρῶν, περιστήσας μὲν τὸ στρατόπεδον, πάλιν δὲ ἀπήγαγεν ὀπίσω, μέχρι σταδίων ϛ', νὺξ ἐπῆλθεν, οἱ μὲν φυλάττοντες τῶν Πισιδῶν ἀπηλλάγησαν, οἰόμενοι τοὺς πολεμίους ἀπεληλυθέναι. ὁ δὲ τῶν ψιλῶν καὶ ὁπλιτῶν τοὺς ἐλαφροτάτους λαβὼν, πολλῇ σπουδῇ δραμὼν διῆλθε τὰ στενὰ καὶ τὴν Πισιδῶν χώραν ἐπόρθησεν.

In hoc ſtratagemate loco verborum μέχρι σταδίων ϛ' reponendum procul dubio ἐπίσημον κόππα, quod Vulteius arithmeticarum apud Græcos notarum parum callens non intellexit, ſimilitudine inter ϛ' quod ſignificat 6. & ϟ' quod ſignificat 90. deluſus, legendum igitur μέχρι σταδίων ϟ'. quam eſſe veram lectionem, ratio ipſa primum confirmat, ſi enim Autophradates ad ſex tantum ſtadia receſſiſſet, hoſtes ſuſpicione, & metu non liberaſſet, deinde in manuſcripto legitur ἐνενήκοντα abſque notis arithmeticis.

Scipionis continentiæ exemplum laude digniſſimum refertur lib. 8. pag. 568. ſequentibus verbis, Σκηπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν φοίνισσαν, ὡς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλους ὑπερφυοῦς ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φήσας ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur φυγαγωγοὶ quod interpres vertit captiuorum ductores, ſed legendum ex manuſcripto νυμφαγωγοὶ, hoc eſt virginum ductores, quæ correctio & veriſſima, & elegantiſſima, vt nullus ſuperſit dubitandi locus.

Plura adiungerem, ſed feriis iam deſinentibus quarum beneficio otium ſuppetebat, finem quoque huic παραβολῶν παραβολῇ imponimus. Vale & me ama.

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON.
S. Fermat S. P. D.

CRiticas obſeruationes quas mihi nuper miſiſti, vir clariſſime, ſæpius legi non ſine voluptate & admiratione; in illis enim ingenij, iudicij, & doctrinæ dotes quas in te iampridem ſuſpicimus vbique elucent, nihil autem inuenire poſſim quod tanti muneris vice tibi referam, niſi commodùm egeſtati meæ ſuccurrerent variæ lectiones quas vir tibi ſingulari coniunctus amicitiâ, cuius mihi iucunda ſemper eſt recordatio, margini appoſuit quorumdam librorum quos ſedulò peruoluebat, & quorum pleraque loca, ſed ἐν παρέργῳ, emendauit; ſcis enim quàm præcoci ille vbertate florum amœnitatem fructuum maturitati iunxerit, nec me latet quantâ ipſe fiduciâ ſuas exercitationes ſolitus ſit in tuum ſinum effundere; licet autem omnes iſtæ quas excerpſi emendationes, tibi nouitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua eſt comitas, te benignâ manu ſuſcepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius moret, vir clariſſime, noſti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi inſtar eſt aut iſagoges Philoſophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat, illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Iſmael Bullialdus vir doctiſſimus & Latinitate donatum elegantibus notis illuſtrauit; ſed non omnibus illud mendis purgaſſe videtur, vt aliquot, ni fallor, exemplis quæ ſequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis vbi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit, locum illum exſcribere non piget, ipſa enim ſeries emẽdationis procul dubio neceſſitatem, & veritatem oſtendet, τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ στοιχειώδεις καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται &c. & inferius, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων οἵτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ aſteriſcus in margine reſpõdet cum voce διαιρεταὶ, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαίρετοι loco τοῦ διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαίρετοι, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν legendum præterea φθόγγων οἵτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαίρετοι, & hæc quoque lectio confirmatur verbis eiuſdem Bryennii lib. 1. cap. 3. vbi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & inſtans ſunt ἀδιαίρετα & conſequenter φθόγγος ἀδιαίρετος non diuidendi vim habens, vt vult interpres Latinus, nec immerito Bacchius Senior in introductione artis muſicæ quæſtioni illi τί οὖν ἐστὶν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, reſpondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, ſed etiam ἄτομον eſſe docet antiquæ muſicæ celeberrimus auctor Ariſtides Quintilianus lib. 1. de Muſicâ, atque ita authoritas æque ac ratio ſuffragatur huic emendationi, quæ fit vnius tantum litteræ mutatione; minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, vbi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικοὺς, legendum ſcilicet, φασὶ, vt apud Bryennium λέγουσι; paulo inferius vbi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρὺς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμου δὲ μικρὸς, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennij authoritate confirmatur.

Hactenus de ſono de quo agitur in cap. illo 6. in cap. vero 8. agitur de ſemitonio, & ita vulgo legitur κατὰ καὶ τὸ ἡμίφωνον γράμμα οὐχ ὡς ἥμισυ φωνῆς καλοῦμεν ἀλλ᾽ ὡς μὴ παρ᾽ αὐτοτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὸ non κατὰ, legendum præterea, ἀλλ᾽ ὡς μὴ αὐτοτελῆ καθ᾽ αὑτὸ φωνὴν ἀποτελῶν, quæ lectio eiuſdem Bryennij authoritate nixa veriorem vulgatâ ſenſum efficit.

Atque harum probatio lectionum deſumi poteſt, ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μουσικοῖς ὑποτιθεμένων καὶ ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανομένων, vt Porphyrii verbis vtar quæ in commentariis clariſſimi interpretis referuntur pag. 276. ſed non ſine mendo, male enim ibi legitur, ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς μουσῆς ὑποτιθεμένων.

Nec ſilentio prætermittenda eſt elegantiſſima, &, audacter dicam, certiſſima alterius loci eiuſdem Theonis emendatio pagina 164. vbi de octonario loquitur, refertur ibi vetus inſcriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradit Euander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Ὄσιρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι καὶ οὐρανῷ ἡλίῳ καὶ σελήνῃ καὶ γῇ καὶ νυκτὶ καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτοῦ ἀρετῆς βίου συντάξεως, id eſt, vt vertit Bullialdus, antiquiſſimus omnium Rex Oſiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & Terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ ſunt quæque futura ſunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ eius, mendoſum procul dubio in hac inſcriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem ſi retineas quis inde ſenſus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita parua vnius ſcilicet litteræ mutatione huic loco ſua lux, & amori ſua laus facile reſtituitur; nec aliena eſt ab hoc loco ſapientiſſimi Platonis, cuius velut interpres Smyrnæus ille, ſententia, dum ait in conuiuio καὶ μὴν δὴ τήν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων τίς ἐναντιώσεται μὴ οὐχὶ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ᾗ γίγνεται καὶ φύεται πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectionem, vt vertit Serranus, ex amoris ſapientiâ exiſtere, ideſt gigni atque naſci ecquis negauerit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur viſitque exortum lumina Solis.

His emendationibus vnam aut alteram duorum inſignium locorum addam, quorum primus eſt apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotypoſeon pag. 12. oſtendere conatur quam variæ ſint pro diuerſitate ætatum Phantaſiæ, παρὰ δὲ τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὔκρατος καὶ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσι κατακορές, καὶ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἐξάκουστος, id eſt vt vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aer ſenibus quidem frigidus eſſe videtur, aliis qui in ætatis flore conſtituti ſunt bene temperatus, & idem cibus ſenibus quidem tenuis videtur at iis qui florent ætate craſſus, eodem modo & vox eadem, alijs quidem depreſſa eſſe videtur, alijs vero alta; at huius loci elegantior ſenſus erit ſi legatur non βρῶμα ſed χρῶμα, alioquin de ſenſu viſus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hîc foret ſermo, præterea τὸ ἀμαυρὸν melius colori conuenit quam cibo, & æque de colore ac de cibo dici poteſt τὸ κατακορές, ſic apud Virgilium legimus, ſaturatas murice veſtes, & hyali ſaturo fucata colore.

Nunc ad Athenæi locum tranſeo; quis autem vrbaniſſimi illius ſcriptoris ſales variâ conditos eruditione ignorat? Et ſi quid in eo frigidum aut inficetum occurrat quis ibi mendum ſubeſſe non ſuſpicetur? Suſpecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de deprauatis Alcibiadis moribus, qui locus ſi vulgaram lectionem retineas ipſo forſan Alcibiade deprauatior erit, Athenæi verba hæc ſunt Λυσίας δὲ ὁ ῥήτωρ περὶ τῆς τρυφῆς αὐτοῦ λέγων φησὶν, ἐκπλεύσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξίοχος καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημαν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντίδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνωκείπην, ἔπειτα αὐτοῖς γίνεται θυγάτηρ ἣν οὐκ ἔφασαν δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δὲ ἦν ἀνδρὸς ὡραία συνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ, καὶ εἰ μὲν χρῷτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης Ἀξιόχου ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δὲ Ἀξίοχος Ἀλκιβιάδου, error hic procul dubio in voce illa ξυνωκείπην & legendum ξυνῳκείτην hoc eſt concubuerunt, atque ita ſi falſa Xynoceipe deleatur, & ſola ſuperſit illa duobus nupta Medontias, portentoſæ iſtorum iuuenum libidinis nouitati nihil detrahetur; veritas autem iſtius emendationis ſatis per ſe patet, & ex ipſâ loci ſerie elici poteſt, in quo illud δύο ὄντε alioqui ſuperuacaneum foret, nec iam amplius ambigua proles; ratio igitur illius correctionis in promptu eſt, cui eiuſdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδοντίδος γοῦν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἤρξεν καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιόχῳ ὅς ἦν αὐτοῦ τῆς ὥρας ἐραστής, ὥς φησι Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτοῦ λόγῳ, καὶ ταύτης ἐκοινώνησεν αὐτῷ, id eſt vt interpretatur Dalechampius, Medontidem Abydenam auditione tantum ille amare cœpit, & imprimis charam habuit, eam tamen cum Helleſpontum nauibus

adiiſſet, Axiocho nauigationis comiti, & pulchritudinis ipſius amatori, vt inquit Lyſias in oratione quam contra eum ſcripſit, vtendam dedit, ibi autem fictitiæ Xynoceipes nulla mentio, & illud *ἱκονόμνου* æque ac *ξυνωκεῖν* communes Alcibiadis,& Axiochi amores fuiſſe ſatis arguit.

Sed ab iſtorum juuenum voluptate oculos auertamus, & eam quæ ex ſtudiorum ſocietate percipitur, puriorem & diuturniorem, ſummumque aduerſorum ſolatium litteras eſſe fateamur; cum tu his mirum in modum oblecteris, non iniucundas tibi fore confido obſeruationes in quibus amici manum agnoſces; ipſius ego lucubrationum ſparſas varijs in locis reliquias,etenebris quibus illas parentis modeſtia abdiderat, eruere conatus ſum, neque hæc contemnenda duxi, vt ex hoc ſpicilegio rerum quæ perſpicaciſſimos, vt ita loquar, meſſores latuerunt, pateat, quantam earum auctor in liberiori & coniecturis aperto critices campo ſegetem fuerit collecturus ſi ſæpius in illo ſpatiari voluiſſet: Vale & me ama.